

# シンクロトロン電磁石

高エネルギー加速器研究機構

遠藤有聲

## はじめに

この度、加速器講義ノート集において「シンクロトロン電磁石」という内容で、その一翼を担うことになりました。以前、高エネルギー物理学研究所時代に技術系職員を対象に電磁石に関連した講義を行っています。今回はこれとは別に電磁石設計の実践に役立つ内容になるようシンクロトロン加速器の立場からできる限り詳細に書き下ろしたものです。理解のために所々に練習問題を設けたので、挑戦してみてください。また、理解しやすいように順を追って長々と式を導いた所もあります。このような所は理解のために式の誘導を試みて下さい。

実物大のモデル電磁石による検討がなされなくなった現在では、加速器に使用できる電磁石を設計するためには磁場計算コードによる正確な検討が必要です。世界の主要な加速器研究機関で使用されている計算コードで設計すれば問題はないと思いますが、それでも計算内容の理解なしには計算の正しさ、誤りについて判断することは困難を伴います。また、パソコン用に市販されている計算コードでは加速器電磁石の精密な測定値との比較検討がなされていないので、由緒ある計算コードを使用し、身近に電磁石があればその測定値と比べてみることをお勧めします。

このテキストでは省略しましたが、磁場測定も重要な電磁石技術です。磁場計算は鉄心材料の平均的な磁気特性に合わせて行われますが、製作された電磁石は必ずしもこの磁気特性に合致するとは限りません。実際には、磁気特性のズレや機械的寸法の誤差などがあり、信用できるのは正しく測定された磁場の値です。計算値も厳密には正しくありません。電磁石の形状は可能な限り誤差が小さくなるように近似され、計算コードのアルゴリズムもできる限り計算誤差を避けるような近似式が使用され、磁気特性も使用する鉄心材料の実測値が入力できます。これで得られる計算精度は磁束密度で $\pm 0.01\%$ 程度です。

電磁石の数値設計法は特定の目的に限って実用的レベルでは問題ないように見えますが、一般的にはまだまだ不完全で、時間変化を伴う動的な磁場解析を含めて様々な角度からの研究が必要です。

平成27年 4月 1日

高エネルギー加速器研究機構

遠藤有聲

# 目次

はじめに

第1章	シンクロトロンとは	1
1	シンクロトロンについて	1
2	電磁石とは	2
3	リングにおける荷電粒子の運動	10
3.1	偏向電磁石における荷電粒子の運動	15
3.2	磁場のない直線部における荷電粒子の運動	15
3.3	4極電磁石における荷電粒子の運動	16
4	運動量の違いを考慮した伝達マトリックス (機能分離型の場合)	17
5	運動量の違いを考慮した伝達マトリックス (機能結合型の場合)	21
6	偏向電磁石の線形変換	24
第2章	電磁気学からみた電磁石	28
1	電流による磁場の発生	28
2	電磁石を磁気回路として考える	34
3	ソレノイド磁場の計算	37
3.1	ソレノイドの半径方向磁場成分	37
3.2	ソレノイドの軸方向磁場成分	39
第3章	シンクロトロンと電磁石	41
1	初期のシンクロトロン電磁石	41
2	機能結合型電磁石	43
3	機能分離型シンクロトロン	44
4	リングにおける電磁石の配列	46
4.1	電磁石の伝達マトリックス (transfer matrix)	47
4.2	磁場とビーム軌道の安定条件	47
第4章	常伝導電磁石	54
1	種々のシンクロトロン電磁石とビームの運動	54
1.1	偏向電磁石 (dipole magnet)	54
1.2	4極電磁石 (quadrupole magnet, quad)	64
1.3	機能結合型電磁石	70
1.4	6極電磁石 (sextupole magnet)	71
2	特殊な電磁石	74
2.1	セプタム電磁石 (septum magnet)	74
2.2	多極電磁石	76
3	ラピッドサイクルシンクロトロンの電磁石	76
第5章	常伝導電磁石の鉄心材料	81
1	強磁性体の性質と種類	81
1.1	強磁性体の磁化特性	81
1.2	ヒステリシス・ループ	83
1.3	比透磁率	83

1.4	強磁性の発生	84
1.5	自発磁化	89
1.6	磁区 (magnetic domain)	91
1.7	磁壁構造と磁壁のエネルギー	91
1.8	磁気余効 (magnetic aftereffect)	93
2	電磁石の鉄心材料	94
2.1	電磁軟鉄	94
2.2	磁気異方性 (magnetic anisotropy)	95
3	電磁石用鋼 (板) の選択	97
3.1	不純物の影響	98
3.2	鍛造	100
3.3	磁氣的性質の経年変化	100
3.4	結晶粒度	101
3.5	塑性歪	101
3.6	方向性	102
3.7	鋼板の絶縁被膜	102
3.8	具体例、加速器の電磁石用鋼板	103
第6章	電磁石の製作工程とコイルの設計	107
1	鉄心の製作	107
1.1	シャフリング (shuffling)	107
1.2	打抜き (stamping, punching)	107
1.3	積層、拘束	108
1.4	溶接	109
1.5	溶接法	109
1.6	鉄心の寸法測定	110
2	コイル	111
2.1	コイル導体	111
2.2	コイル絶縁材料	112
2.3	コイルの設計	114
2.4	コイルの冷却	116
2.5	特殊な絶縁方法	118
第7章	超伝導電磁石の設計	126
1	超伝導線材	126
2	超伝導電磁石における磁場の記述	127
2.1	単一電流導体の多極磁場成分展開	127
2.2	純粋な多極磁場の発生 (ノーマル電磁石)	129
2.3	回転磁場成分 (スキュー電磁石)	130
2.4	電流分布の近似	130
3	超伝導電磁石の断面構造	131
3.1	2極超伝導電磁石	131
3.2	4極超伝導電磁石	132
3.3	6極超伝導電磁石	134
4	鉄ヨークの影響	135
4.1	鉄ヨークをもつ2極超伝導電磁石	135
4.2	鉄の飽和がある場合	136

5	端部磁場	137
6	持続電流	138
7	超伝導電磁石の渦電流	140
	7.1 ストランド内の結合電流	141
	7.2 ケーブル渦電流(1次元モデル)	141
	7.3 磁場特性に及ぼす渦電流の影響	143
8	補正電磁石	143
第8章	永久磁石とその材料	146
1	永久磁石材料	146
	1.1 金属系磁石材料	147
	1.2 酸化物系	147
	1.3 希土類系	147
	1.4 永久磁石の減磁	148
2	永久磁石を利用する磁気回路	149
3	REC永久磁石	151
	3.1 永久磁石の動作	151
	3.2 永久磁石の基本公式	151
	3.3 RECのB-H特性	152
4	RECによる磁場の計算	153
5	永久磁石による多極磁石	154
6	4極永久磁石	156
7	アンジュレータ(undulator)	158
第9章	磁場計算の理論的基礎	162
1	差分法によるアルゴリズム	162
	1.1 ベクトルポテンシャルによる定式化	162
	1.2 差分方程式	164
2	ハーモニックス解析	168
3	境界条件	170
4	三角メッシュの発生	170
5	異方性のある静磁場問題	173
6	容易軸が場所の関数である場合	174
7	磁場に蓄積されるエネルギー	175
第10章	磁場計算コードの実際	176
1	2次元磁場計算コード	176
2	2次元差分法による計算例(常伝導電磁石)	178
3	永久磁石の磁場解析	191
4	ハイブリッド永久磁石の磁場解析	195
5	超伝導電磁石の磁場解析	207
参考文献		213
コーヒータイム		
	「電磁石を支える地盤の安定度」	79

「強磁性の話」	104
「加速器の放射線線量とコイル絶縁エポキシ樹脂の吸収線量」	123
「希土類永久磁石の身近な応用」	160

## 第1章 シンクロトロンとは

加速器の理解なしには正確な電磁石の設計に困難を伴う。多くの場合、技術的な理解だけで設計を行うと非常に厳しい技術的要求を課すことになるか、安易に妥協して使用に耐えないものが出来てしまう。電磁石もその目的を理解して初めて正確な設計ができる。ここでの主題はシンクロトロン加速器にあるので、その中で電磁石がどのような役割をしているかについて扱うことにする。

### 1. シンクロトロンについて

加速器には多くの種類があるが、線形加速器と円形加速器に大別できる。線形加速器は直線的に一方に絶えず加速しなければならないので、その長さは長くなる。ところが、円形加速器では加速される粒子が円形軌道を周回するので、軌道上の一箇所で加速を行えば、粒子の回転周期に合わせて繰り返し加速することができる。シンクロトロンは円形加速器の一種である。

サイクロトロンも円形加速器の仲間であるが、加速とともに軌道半径が徐々に大きくなる。電磁石は一定電流で励磁されて、小さな軌道半径から大きな軌道半径までカバーしなければならないため、電磁石は非常に大きくなる。電磁石の重量や製作コストの上から制約が現れ、実用的な加速エネルギーの最大値は1 GeV程度である。

シンクロトロンでは加速とともに磁場を強くして、軌道半径を変えないようにする。このため電磁石はパルス的に励磁される。軌道半径が一定であるため、粒子が存在する領域だけを電磁石でカバーすればよく、1台1台の電磁石は小型化できる。最大加速エネルギーに合わせて軌道を設計し、その軌道に沿って電磁石を並べればよいので、加速エネルギーの原理的な上限はない。物理的には地球を取り巻く軌道が上限ということになる。技術的には利用できる土地の広さや電力、冷却水などの資源および予算規模によって制限される。

シンクロトロンは電子、陽子、重イオンなど目的に合わせて設計が最適化される。特に素粒子物理の実験においては高いエネルギー状態が必要とされ、蓄積衝突型の加速器が主流になっている。これには低いエネルギーでシンクロトロンに入射して加速した後で衝突させるものと、入射されたエネルギーを変えないで衝突させるものがある。前者の例はトリスタンで、後者の例はKEKBファクトリである。これらは電子と陽電子を衝突させる加速器で、円形軌道を描くとき軌道の接線方向に放射光として粒子の運動エネルギーを失うため、後者の場合にもエネルギーを一定に保つために加速が必要であるが、電磁石は直流で励磁される。

非常にエネルギーの高い素粒子実験には陽子や重イオンの加速器として蓄積衝突型シンクロトロンが現れ、LHC (CERN) やRHIC (BNL) が建設されている。電子に比べて重い粒子を加速するためには軌道半径をできるだけ小さくする上で磁場の強い超伝導電磁石が採用される。

## 2 . 電磁石とは

陽子や電子のような電荷を帯びた粒子を荷電粒子とよび、これらの粒子に電氣的な力を作用させて加速する装置が加速器である。シンクロトロンのように加速される粒子が半径一定の円形軌道をもつようにするためには、粒子の遠心力に釣り合う向心力を発生させなければならない。遠心力は円形軌道の中心から外向きに働く力であり、向心力は逆に中心に向かう力である。

電磁気学の教えるところによれば、磁場の中を運動する荷電粒子はその速度の方向と磁場の方向のどちらにも垂直な方向に力を受ける。この力の方向が軌道の曲率中心の方向に一致すれば、遠心力を打ち消すことができる。どうすれば向心力を発生できるであろうか。

ここで粒子の電荷 ( $e$ )、粒子の速度ベクトル ( $\mathbf{v}$ )、磁場ベクトル ( $\mathbf{B}$ ) を導入する。 $\mathbf{B}$  は磁束密度 (または磁気誘導) と呼ばれる量で、荷電粒子が感じる磁場の強さを表す。これら 3 つの量から次式で与えられるローレンツ力と呼ばれる力 ( $\mathbf{F}$ ) が定義される。

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

力もベクトルである。速度や力のように大きさと方向 (速度は進む方向、力は働く方向) をもつものをベクトルと呼ぶ。磁場も大きさと方向をもつのでベクトルである。これに対し、重さや電荷のように大きさだけあって方向をもたないものはスカラーと呼ばれる。

上の式で表した速度ベクトルと磁場ベクトルの積 ( $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ) をベクトル積 (または外積) と呼び、演算の結果もベクトルである。すなわち、ローレンツ力がベクトルで与えられる。ベクトル積の大きさは速度と磁場の積の絶対値 ( $|\mathbf{v}\mathbf{B}|$ ) で与えられるが、その方向はどのように定義されるであろうか。

図 1 に示すように速度と磁場の方向が作る角度には、それらの交点の回りに必ず小さい角度と大きな角度の 2 つがある。この内の小さい角度に注目して、小さい角度を通して速度ベクトルから磁場ベクトルに右手で円弧を描くように右ネジを回す操作を想像する。この操作によって右ネジはねじ込まれて進む。右ネジが進む方向がベクトル積で得られるベクトル (この場合ローレンツ力) の方向である。

ところで、上の式には電荷 ( $e$ ) もあるので、電荷が正の場合と負の場合で異なる結果が予想される。電荷が (陽子や重イオンのように) 正であれば、ベクトル積の結果に符号の変化はないので、ベクトル積の方向とローレンツ力の方向は同

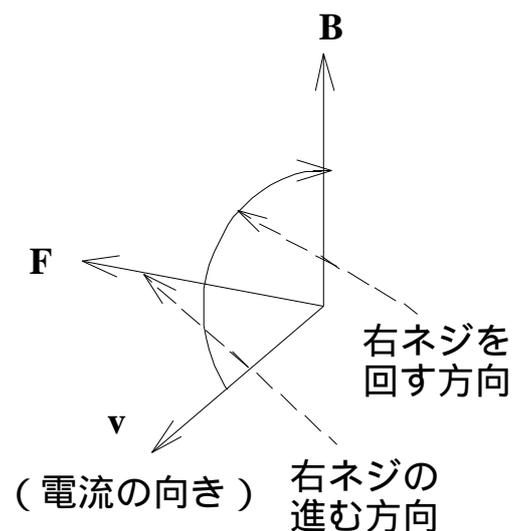


図 1 ベクトル積の説明図。

じである。

電子や負水素イオンのように電荷が負であれば、ベクトル積の方向は反転し、逆向きになる。この様子を図2に示す。

くどいようであるが、あと一步進めて、電荷と速度ベクトルの積 ( $e\mathbf{v}$ ) を考えてみよう。この積は大きさ ( $|e\mathbf{v}|$ ) と方向に影響を及ぼし、その結果はベクトルである。電荷が正であればベクトルの方向は速度の方向であり、電荷が負であればベクトルの方向は速度とは逆方向である。正電荷の進む方向が電流の方向と定義されているので、負電荷の進む方向の逆方向が電流の方向である。すなわち、荷電粒子の移動は電荷の移動であり、電流が流れていることと等価であるので、電流の流れる方向でベクトル積を捉え直せば電荷符号を考慮したローレンツ力の方向が決定できる。この様子は図2からも明らかである。

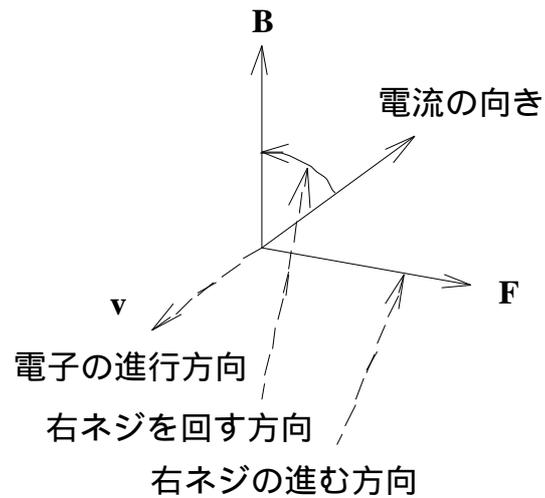


図2 電荷の符号を考慮したローレンツ力の方向。

以上の内容が電磁石とどう関係するのであろうか。遠心力と釣り合う向心力はローレンツ力である。すなわち、加速器の中を運動する荷電粒子はその進行方向（円形軌道の接線方向）に速度ベクトルをもつので、磁場によるローレンツ力が曲率中心に向かうことが分かる。粒子が運動する軌道面に垂直に磁場を与えればよい。荷電粒子の進行方向とローレンツ力の方向が決まるので、電荷の符号を考慮して磁場の方向が決められる。軌道に沿って遠心力と向心力が釣り合っていれば、粒子は円形軌道を描く。このような軌道を決めるための磁場を発生させる装置が偏向電磁石（または2極電磁石）である。偏向電磁石の他にも重要な働きをする収束電磁石（または4極電磁石）や補正電磁石もあるが、これらについては後で述べることにする。

ここでシンクロトロンを考えて見よう。シンクロトンの置かれているトンネルに入っ  
て見れば、図3のように電磁石の置かれていない直線部と呼ばれる場所が沢山あって、偏向電磁石のある場所は疎らであることに気づくであろう。電磁石のない場所、すなわち磁場のない場所では荷電粒子は直線運動をする。

磁場との相互作用によって運動する荷電粒子にローレンツ力が働き、軌道が曲げられる。その結果、遠心力が発生し、両者の力が釣り合うように軌道半径が決まるのである。偏向磁場のある場所で軌道が円弧状に湾曲する。偏向電磁石から次の偏向電磁石までの空間においては、粒子は直線運動をする。そうであれば円形軌道と言えないのではないか。その通りである。厳密には一周する軌道は円弧と直線の組み合わせであり、一周の軌道長（周長）を2で割った値が平均軌道半径（R）である。

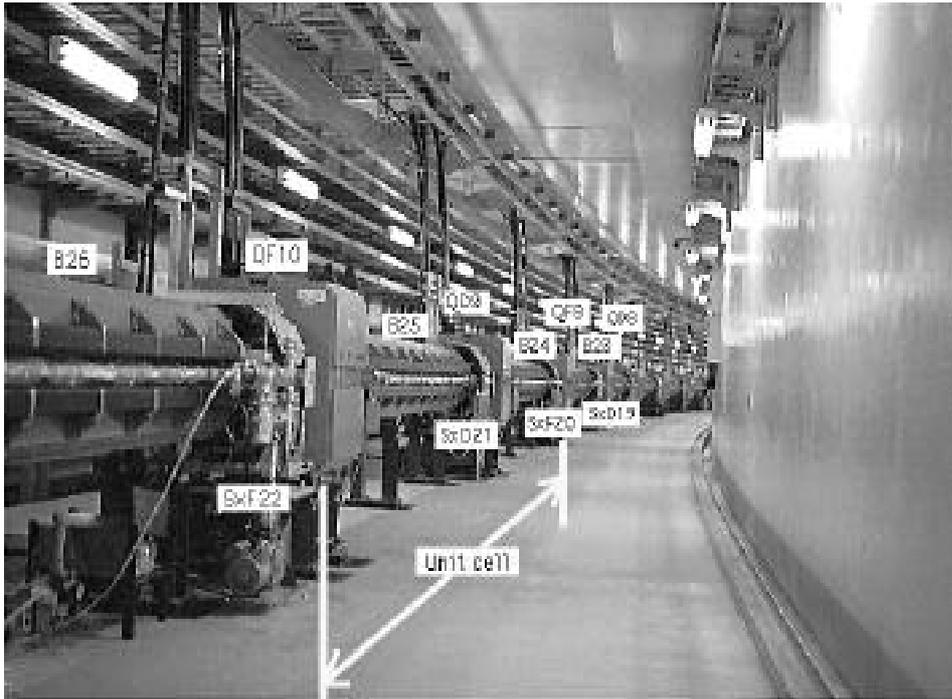


図3 トンネル内に設置されたシンクロトロンリング(トリスタン主リング)。

粒子が偏向電磁石の中でもつ軌道半径を曲率半径と呼ぶ。それでは、曲率半径 $\rho$ はどのように定義されるのであろうか。遠心力とローレンツ力の釣り合いを考えてみよう。

$$\begin{aligned} \text{(遠心力)} &= \frac{mv^2}{\rho} \\ \text{(ローレンツ力)} &= evB \end{aligned}$$

ここでは速度方向と磁場方向は直交するので、 $v$  と  $B$  のベクトル積は $vB$ である。また、 $m$  は粒子の質量である。これらを等しいと置けば、

$$\frac{mv^2}{\rho} = evB \quad (2)$$

この式を整理すれば、

$$mv = eB\rho \quad (3)$$

となる。さらに、加速器の中で粒子の速度は非常に大きいので、粒子の運動を厳密に取り扱うために相対性理論による記述が必要である。古典力学の運動量は $mv$ であるが、相対性理論に従って、

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_0 v}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_0 \beta}{c \sqrt{1-\beta^2}} \quad (4)$$

なる書き換えが必要である。ここで、 $m_0$  は粒子の静止質量、 $\beta$  は相対速度 ( $\beta = v/c$ )、 $c$  は光速、 $E_0$  は静止エネルギー ( $=m_0 c^2$ ) である。そうすれば、

$$eB\rho = mv = \frac{p}{c} [eV/c] = \frac{p}{2.997925 \times 10^8} [eV/c] = 3.3356 p [GeV/c] \quad (5)$$

$$cp = \frac{E_0 \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = E\beta \quad (6)$$

が導かれる。ここで、 $E$  は全エネルギー (= 静止エネルギー + 運動エネルギー) である。(6) の式は単なる式の変形であるが、 $cp$  は無次元量であるので  $cp$  は  $E$  の次元、すなわち、

エネルギーの次元を有することが分かる。エネルギーの単位として加速器で一般的に使用される [eV] を用いることを念頭に置いて考えよう。加速器では非常に大きなエネルギーを扱うので、[MeV] とか [GeV] などの誘導単位が使われる。

$$\begin{aligned} 1 [\text{keV}] &= 10^3 [\text{eV}] \\ 1 [\text{MeV}] &= 10^6 [\text{eV}] \\ 1 [\text{GeV}] &= 10^9 [\text{eV}] \\ 1 [\text{TeV}] &= 10^{12} [\text{eV}] \end{aligned}$$

(5) の式に注目して、何故このような式が得られるのか考えて見よう。この式に現れる物理量の単位は実用単位系を用いて  $B$  はテスラ [Tesla, T] である。 $\rho$  はメートル [meter, m] である。テスラは次のような別の単位の組み合わせで与えられる。言い換えれば、テスラは基本単位から導かれる誘導単位である。

$$[T] = [V \cdot s/m^2]$$

すなわち、

$$\{eB\rho\} = [e T m] = [eV s/m] = \{mv\} = \{p\} = [eV/c]$$

となる。ここで、 $\{ \}$  内は物理量を表し、 $[ \ ]$  内は物理量に対応する単位を表す。 $\{eB\rho\}$  の  $e$  は [eV] として単位の中に組み込まれてしまうので、

$$eB\rho [e T m] = B\rho [eV s/m]$$

となり、最終的に

$$B\rho [T m] = 3.3356 p [GeV/c] \quad (7)$$

である。これは磁場の強さと軌道の曲率半径および粒子の運動量（または運動エネルギー）の間の関係を与える重要な式（加速器家のゴールドデンルール）である。

加速器で最大エネルギー「何々 GeV」を言われるのは、加速器で加速される粒子のもつ運動エネルギーであるので、運動量に変換して考えなければならない。「全エネルギー = 静止エネルギー + 運動エネルギー」なる関係を思い起こして、

$$E = E_0 + T \quad (8)$$

ここで、 $T$  が運動エネルギー、 $E_0 (= m_0 c^2)$  は静止エネルギーである。(6) の式から得られる

$$cp = E\beta = (E_0 + T)\beta = (m_0 c^2 + T)\beta \quad (9)$$

と

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = E_0 + T \quad (10)$$

の 2 つの式が役に立つ。(10) の式から、

$$1 - \beta^2 = \frac{1}{(1 + T/E_0)^2}$$

が得られるので、これを  $\beta$  について求めれば、

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + T/E_0)^2}} \quad (11)$$

である。以上から、

$$cp = (E_0 + T) \sqrt{1 - \frac{1}{(1 + T/E_0)^2}} = \sqrt{T(2E_0 + T)} = \sqrt{T(2m_0c^2 + T)} \quad (12)$$

=====ここで、頭の体操 ( 1 )=====

問題 1  $cp = \sqrt{T(2m_0c^2 + T)}$  の関係を求めてみよう。

問題 2 陽子と電子の質量を実用単位で与えれば、それぞれ  $1.6725 \times 10^{-27}$  [kg]、 $9.1091 \times 10^{-31}$  [kg] である。陽子と電子の静止エネルギーを [GeV] 単位で求めよう。ただし、光速  $c = 2.997925 \times 10^8$  [m]、陽子と電子の電荷はともに  $1.6021 \times 10^{-19}$  クーロン [Coulomb, C] である。ここでは単位の変換に注意しよう。  
 $1$  [kg] =  $1$  [A · V · s<sup>3</sup>/m<sup>2</sup>]、 $1$  [C] =  $1$  [A · s] なる単位の変換式から、

$$\{m_0c^2\} = [kg \ m^2/s^2] = [A \ V \ s] = [C \ V] = 1.6021 \times 10^{-19} [eV]$$

すなわち、

$$E_0 = m_0c^2 [kg \ m^2/s^2] / 1.6021 \times 10^{-19} [C]$$

[答] 陽子は 0.93825 [GeV]、電子は 0.000511 [GeV]。

問題 3 それでは、問題 1 の関係式に従って 12 GeV の陽子と 8 GeV の電子の運動量を [GeV/c] の単位で求めてみよう。ここで運動量の単位に何故 [GeV/c] を使うのか考えて見よう。cp はエネルギーの単位をもつので、これを [eV] で与えれば、 $\{cp\} = [eV]$  から簡単に  $\{p\} = [eV/c]$  が得られる。

[答] 12 GeV 陽子の運動量は 12.90419 [GeV/c]、  
 8 GeV 電子の運動量は 8.0005 [GeV/c]。

問題 4  $B\rho [T \ m] = 3.3356 p [GeV/c]$  の関係式から、12 GeV 陽子が 1 [T] の磁場中を運動するときの軌道の曲率半径を求めてみよう。

[答] 40.33 [m]。

問題 5 8 GeV 電子が 0.5 [T] の磁場中を運動するときの軌道の曲率半径はいくらか。

[答] 53.37 [m]。

=====頭の体操終わり=====

電荷の流れは電流に等価であり、偏向電磁石の磁場は電流に力を及ぼし、力の向きは磁場と電流の両方に直交する方向である。加速器の場合は、磁場の方向が荷電粒子の軌道面に垂直になるように偏向電磁石が配置されるので、話は簡単である。すなわち、2

次元平面軌道の円弧をなす部分において絶えずその円弧中心に向く力を受ける。円弧と円弧の間の直線軌道ではこのような力は存在しない（厳密に言えば、地磁気やまわり構造物の磁化による浮遊磁場が存在するが、電磁石による磁場に比べて非常に小さいので通常は無視する）。シンクロトロンにおける加速粒子の設計軌道は図4のようになる。

粒子は図4の設計軌道（厳密には平衡軌道）のまわりを振動しながら水平・垂直方向にベータトロン振動する。点線の長さが周長である。軌道の直線部分には収束用の4極電磁石やビーム軌道補正用のステアリング電磁石や6極電磁石、ビーム加速のための高周波（RF）空洞、ビーム診断のためのビーム位置モニターやビーム強度モニターなどが置かれる。また、入射器からのビーム受渡しのための装置を入れる場所にもなる。

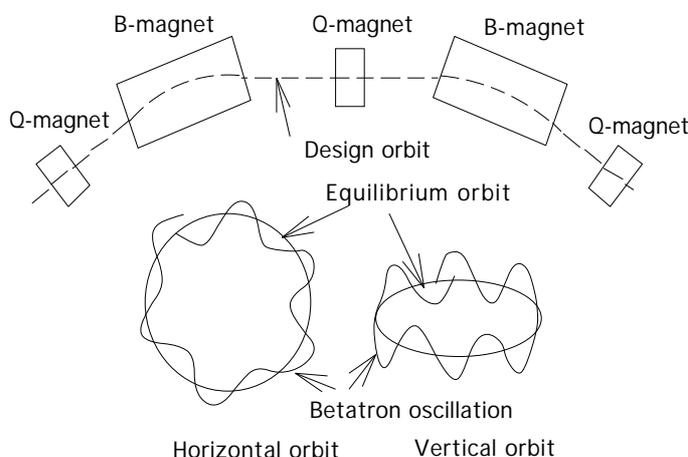


図4 シンクロトロンにおける加速粒子の設計軌道と水平・垂直方向のベータトロン振動。

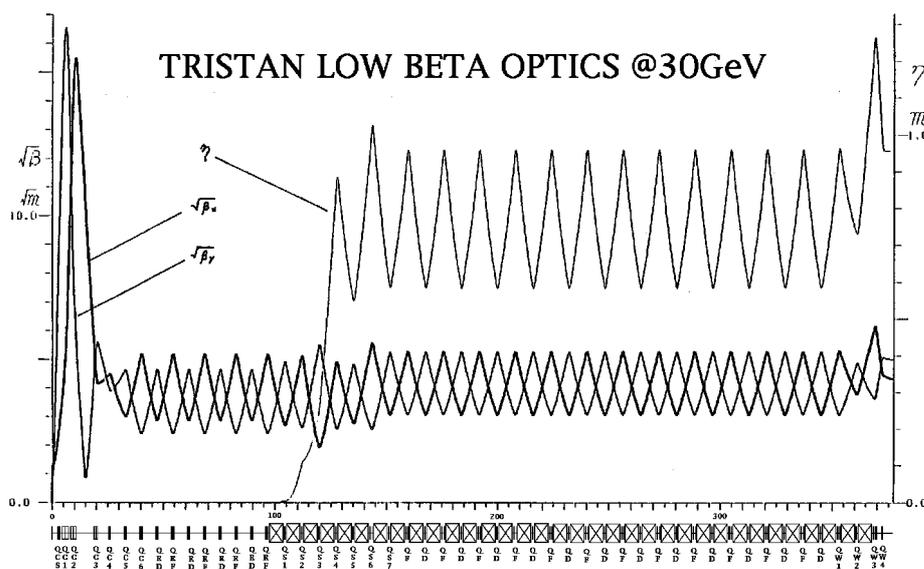


図5 実験直線部のあるビーム衝突型シンクロトロン。衝突点・対称点間の1/8リング（377m 区間）の軌道パラメータを示す。電磁石配列は下部に表示。衝突点から片側100m（両側で200m）が実験直線部である。

ところで、周長に占める直線部分の長さはどれくらいであろうか。極端な例として図5の電子・陽電子衝突型のシンクロトロンを考えて見よう。ビーム衝突点の前後には実験直線部と呼ばれる非常に長い直線部があるが、これはなぜ必要なのか。ビーム衝突型加速器の必要条件は、お互いに逆向きに周回するビームが衝突点で効率良く衝突することである。そのためには、衝突点でビームを可能な限り小さく絞らなければならない。ミニベータシステムと呼ばれる強収束4極電磁石システムがビームを絞るための装置である。このシステムは衝突点に置かれる大型検出器を挟んで対称に配置される。さらに、電子と陽電子を高いエネルギーまで加速するために多数のRF空洞が必要であり、強収束

4 極電磁石システムを挟むようにこの実験直線部に置かれる。

実験直線部は高周波加速セクション、ミニベータセクションおよび大型検出器で占められる。高周波加速セクションの長さは最大ビームエネルギーによって決まり、衝突点の数に応じて分散配置させることができる。電子・陽電子蓄積衝突型シンクロトロンではシンクロトロン放射によって運動エネルギーを失う（放射損失）ので、エネルギーを一定に維持するために絶えず加速が必要である。このシンクロトロン放射がいわゆる放射光と呼ばれる X 線で、電子や陽電子の軌道が曲げられるところで必然的に発生する。

電子や陽電子の加速と放射光によるエネルギー損失の補填のために必要な加速空洞の全長は一般に非常に長く、シンクロトロンリングの中にライナックを組み込むようなものである。このためリング内に直線部を数箇所つくり、分散配置する。このような場所は実験直線部の延長上に設けるのが効率的である。実験直線部ではビーム軌道は直線であるので偏向電磁石は不要である。しかし、ビーム収束は必要であり、4 極電磁石と水平軌道および垂直軌道の補正のためのステアリング電磁石が必要である。

リングの対称性を考慮して、偶数個の実験直線部が用意される。同時に行われる高エネルギー実験の数と電子・陽電子の入射を考慮して、必要な実験直線部が決められる。実験直線部と実験直線部を結ぶ部分は曲線部（またはアーク部）と呼ばれ、軌道は偏向電磁石によってこの部分で円弧状にカーブする。実験直線部と曲線部の長さの総和が周長である。

運動量の拡がりによって軌道も拡がり、ルミノシティが低下する。これを防ぐため衝突点における分散関数をゼロにする。加速空洞の置かれる場所においてもシンクロトロン振動とベータトロン振動の結合によるビーム不安定性を防ぐため、ここでも分散関数をゼロにする。この目的に使用される一部の偏向電磁石と 4 極電磁石がディスパージョンサプレッサと呼ばれるものである。この目的に使用される電磁石は実験直線部から曲線部に移る場所にあり、4 極電磁石の磁場勾配をある規則で調整することにより実現できる。

ビーム光学的な実験直線部の特徴は、

( 1 ) 実験直線部全域において分散関数がゼロである。

( 2 ) 衝突点前後に置かれる 4 極電磁石の磁場勾配は非常に大きい。

上には説明しなかったが、

( 3 ) 衝突点におけるベータ関数 (  $\beta^*$  ) は非常に小さい。これはビーム断面が小さいこと等価である。

( 4 ) ベータ関数が非常に小さいため、この近傍におけるベータ関数は非常に大きくなる。その結果として、ミニベータ用の 4 極電磁石のアパーチャが大きくなる。

( 5 ) ミニベータ用 4 極電磁石の磁場勾配は非常に大きいことから、この部分で非常に大きなクロマチシティが発生する。

いきなり分散関数とかクロマチシティという聞きなれない ( ? ) 専門語が現れたが、ビームがエネルギーの拡がりをもつため、同じ磁場勾配ではエネルギーによって焦点を

結ぶ位置が異なることを意味する。光学的な類推が成り立つので、エネルギーを光の波長、磁場勾配を凸レンズの強さに置き換えて考えれば、波長の違いによって焦点距離が異なることに相当する。波長の違いは光の色の違いとなって現れるので、色収差が発生することに相当する。加速器では色収差に対応するものがベータトロン振動数（チューン）の拡がりである。つまり、クロマチシティを補正しなければチューンの値に幅が生じ、この幅が大きい場合には共鳴線にひかかってビーム損失を引き起こす。クロマチシティの補正はリングの分散関数と密接な関係にあり、分散関数がゼロでない場所においてのみビームの運動量に比例して半径方向に軌道がずれる。磁場勾配が半径方向に線形的に変化する6極電磁石をこのような場所に置けばクロマチシティの補正ができる。

実験直線部で分散関数がゼロであることから、この直線部で発生するクロマチシティは分散関数がゼロにならない曲線部で補正する必要がある。この補正に使用する電磁石が6極電磁石である。曲線部では偏向電磁石、4極電磁石、6極電磁石、ステアリング電磁石などがセル（格子）と呼ばれる単位で配置される。1つのセルは収束用と発散用の4極電磁石が各1台ずつ、水平用と垂直用の6極電磁石が各1台、水平用と垂直用のステアリング電磁石が各1台、偏向電磁石はリングの大きさによって2台またはそれ以上から構成される。また、ビームの入出射などの特別な目的で偏向電磁石のないセルもある。このようなセルをミッシングベンドセルという。

偏向電磁石とビームエネルギーの関係は上で見てきたが、4極電磁石との関係はどうであろうか。リングの中でビームはベータトロン振動をしながら周回運動をする。1回転の間に振動する回数がベータトロン振動数（チューン）である。（ベータトロン振動数） $\times$ （360度）＝（1回転当りのベータトロン振動の位相の進み）であるから、1セル当りのベータトロン振動の位相の進みを定義できる。

シンクロトロン1周が1つのセルの整数倍で構成されていれば、（ベータトロン振動数） $\times$ （360度）/（セル数）＝（1セル当りのベータトロン振動の位相の進み）である。しかし、電子・陽電子衝突型シンクロトロンでは実験直線部やディスパージョンサプレッサ部などの規則的でない部分があるため、曲線部の代表的なセルについて考えなければならない。

ここで1つのセルを取り上げたのは「セル当りのベータトロン振動の位相の進みは何度が適切であるか」というビーム光学上の問題があるからである。ビーム断面を小さくして電磁石を可能なかぎり小型化することによって加速器を経済的に作ることができる。ビーム断面の縦・横寸法は垂直・水平方向のベータトロン関数の値と関係し、ベータトロン関数が小さければビーム断面の寸法も小さくなる。1セル当りのベータトロン振動の位相の進みが90度付近でベータトロン関数が最小になるので、4極電磁石の強さはこの付近を狙って決められる。ビーム断面の縦・横方向のベータトロン振動をひとまとめにして横方向（transverse direction）の運動という。電磁石は横方向運動すべてに関係する。

### 3. リングにおける荷電粒子の運動

横方向運動の話は少し専門的になるが、大学初級程度の数学で理解できる。磁場中における荷電粒子の運動方程式に入る前にニュートンの古典力学を復習しよう。運動方程式は

$$(\text{運動量の時間微分}) = (\text{力})$$

で表されたことを思い起して、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (13)$$

である。ここで、運動量は質量と速度の積で、 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{F}$  は荷電粒子に働く力である。mks単位系に従えば、 $m$  [kg]、 $\mathbf{v}$  [m/sec]、 $\mathbf{F}$  [N] である。 $\mathbf{F}$  は磁場によるローレンツ力である。

$$\mathbf{F} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (14)$$

である。ここで、 $q$  は荷電粒子の電荷量 [C]、 $\mathbf{B}$  は磁場の強さ [T] である。

次に  $d\mathbf{p}/dt$  であるが、加速によるエネルギーの変化を考えないので質量の時間的变化はなく、

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (15)$$

である。さらに、位置の時間変化が速度であるので、

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (16)$$

である。ここで、 $\mathbf{r}$  は位置を表すベクトルである。図6のように3次元空間においてある参照軌道の近傍で起こる荷電粒子の運動を定義する曲線座標 (curvilinear coordinates) を用いて位置ベクトルを記述する。出発点から測った距離を  $s$  とすれば参照軌道は、

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0(s) \quad (17)$$

で与えられる。

$s$  点において曲線の接線方向の単位ベクトルは図6から、

$$\hat{\alpha}(s) = \frac{d\mathbf{r}_0(s)}{ds} \quad (18)$$

である。 $s$  点における曲率ベクトルは、

$$\hat{\kappa}(s) = -\frac{d\hat{\alpha}(s)}{ds} = - (s)\hat{\beta}(s) \quad (19)$$

で表される。ここで、 $(s)$  は曲率、 $\hat{\beta}(s)$  は  $x$  方向の単位ベクトル、曲率の逆数が曲率半径 ( $(s) = 1/ (s)$ ) である。点  $\mathbf{r}_0(s)$  を含み、 $\hat{\alpha}(s)$  と  $\hat{\beta}(s)$  に平行な面が粒子の振動面を与える。 $\hat{\alpha}(s)$  と  $\hat{\beta}(s)$  に垂直な  $y$  方向の単位ベクトルは、

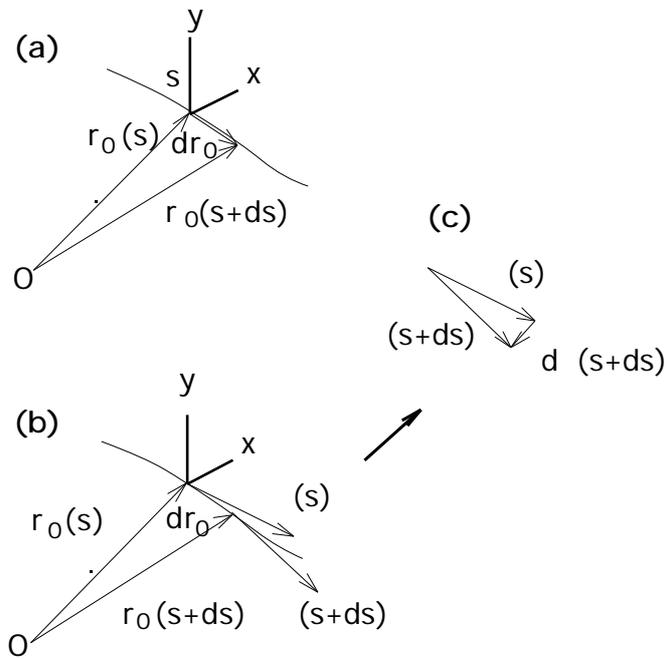


図6 曲線座標  $(x, y, s)$  の定義。

$$\hat{\gamma}(s) = \hat{\alpha}(s) \times \hat{\beta}(s) \quad (20)$$

であることは容易に分かる。そうすれば、参照曲線の点 $\mathbf{r}_0(s)$ から $(x, y)$ だけずれた粒子の空間の位置は、

$$\mathbf{r}_0(x, y, s) = \mathbf{r}_0(s) + x\hat{\beta}(s) + y\hat{\gamma}(s) \quad (21)$$

で与えられる。 $(x, y, s)$ は動く粒子に付随する直交座標系を構成し、動枠 (moving frame) と呼ばれる。 $(x, y)$ は横方向の水平・垂直座標を与え、 $s$ は縦方向 (進行方向) の座標である。曲線座標を採用することによって進行方向に垂直な断面 (すなわち、横方向) の粒子の位置が明確に定義できる。 $x, y$ 方向の運動量は

$$p_x = \mathbf{p} \cdot \hat{\beta} \quad (22)$$

$$p_y = \mathbf{p} \cdot \hat{\gamma} \quad (23)$$

である。今、エネルギーの変化は考えないで $\mathbf{p} = \text{一定}$ とすれば、

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{dp_x}{ds} \frac{ds}{dt} = v\mathbf{p} \cdot \frac{d\hat{\beta}(s)}{ds} = v\mathbf{p} \cdot (-\hat{\alpha}(s)\hat{\alpha}'(s) + \omega(s)\hat{\gamma}(s)) = v\mathbf{p} \cdot \frac{-d\mathbf{r}_0(s)}{\rho(s)ds} + \omega(s)\hat{\gamma}(s) \quad (24)$$

である。 $\omega(s)$ は曲線の捩れ率であるが、平面軌道の場合 $\omega(s) = 0$ である。すなわち、

$$\frac{dp_x}{dt} = -\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{r}_0(s)}{\rho(s)dt} = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}}{\rho(s)} = -\frac{mv^2}{\rho(s)} \quad (25)$$

同様にして、

$$\frac{dp_y}{dt} = \mathbf{p} \cdot \frac{d\hat{\gamma}(s)}{dt} = v\mathbf{p} \cdot \frac{d\hat{\gamma}(s)}{ds} = -\omega(s)v\mathbf{p} \cdot \hat{\beta}(s) = 0 \quad (26)$$

ここで、フレネ・セレ (Frenet-Serret) の公式

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\alpha}(s)}{ds} &= -\hat{\beta}(s) \\ \frac{d\hat{\beta}(s)}{ds} &= \hat{\alpha}(s)\hat{\alpha}'(s) + \omega(s)\hat{\gamma}(s) \\ \frac{d\hat{\gamma}(s)}{ds} &= -\omega(s)\hat{\beta}(s) \end{aligned} \quad (27)$$

を使用した。 $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_x = -vB_y$ 、 $[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_y = vB_x$ を考慮して、以上から

$$\frac{dp_x}{dt} = -qvB_y \quad \frac{mv^2}{\rho(s)} \quad (28)$$

$$\frac{dp_y}{dt} = qvB_x \quad (0) \quad (29)$$

が得られる。垂直方向の運動方程式である2番目の式から平面軌道を維持するためには $B_x = 0$ であることが必要である。

$$\frac{dp_y}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} = m \frac{d^2y}{ds^2} \frac{ds}{dt}^2 = mv^2 \frac{d^2y}{ds^2} \quad (30)$$

から、垂直方向の運動方程式は、 $p = mv$ であることを考慮して、

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{qB_x}{p} \quad (31)$$

である。

(28)の式は水平方向の運動方程式であるが、同様に考えて

$$\frac{dp_x}{dt} = mv^2 \frac{d^2x}{ds^2} \quad (32)$$

から、

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{qB_y}{p} \quad (33)$$

が得られる。これらの式は荷電粒子が磁場によるローレンツ力を受けて運動する様子を記述する2階微分方程式である。曲率ベクトルの式において、

$$\hat{\kappa}(s) = -\frac{d\hat{\alpha}(s)}{ds} = -\frac{d^2\mathbf{r}_0(s)}{ds^2} = (\kappa_x, \kappa_y) = -\frac{d^2x}{ds^2}, -\frac{d^2y}{ds^2} \quad (34)$$

であるので、曲率と磁場と電荷の関係は

$$\kappa_x = \frac{qB_y}{p} \quad (35)$$

$$\kappa_y = -\frac{qB_x}{p} \quad (36)$$

である。正電荷 ( $q > 0$ ) の粒子に対して  $B_y > 0$  であれば曲率は正 ( $\kappa_x > 0$ 、 $x$  軸の負の方向に偏向する)、 $B_x > 0$  に対して垂直方向の曲率は負 ( $\kappa_y < 0$ 、 $y$  軸の正の方向に偏向する) である。磁場の向きは図7のように  $x$ 、 $y$  座標と同じ向きに定義する。粒子の縦方向の位置座標による微分を、 $' = d/ds$ 、 $'' = d^2/ds^2$  と略記すれば、

$$x'' = -\frac{qB_y}{p} \quad (37)$$

$$y'' = \frac{qB_x}{p} \quad (38)$$

である。

リング内に若干の  $x$  方向磁場成分  $B_x$  が存在するため局所的に平面軌道から上下にずれる。垂直面内の曲率半径を  $\rho_y$ 、水平面内の曲率半径を  $\rho_x$  とすれば、 $|x''| = 1/\rho_x$ 、 $|y''| = 1/\rho_y$  の関係から、

$$\rho_x = \left| \frac{p}{qB_y} \right| \quad (39)$$

$$\rho_y = \left| \frac{p}{qB_x} \right| \quad (40)$$

である。 $x$  方向磁場成分  $B_x$  の源は浮遊磁場や電磁石のミスアライメントから発生し、垂直方向の閉軌道歪 (COD, closed orbit distortion) の原因になる。 $y$  方向にも理想的な偏向電磁石の磁場から外れたこのような磁場誤差が存在し、水平方向の閉軌道歪を与える。理想的偏向磁場を  $\mathbf{B}_0$  とすれば、参照軌道 (または、理想軌道) と呼ばれる粒子軌道の曲率半径  $\rho_{0,x}$  は

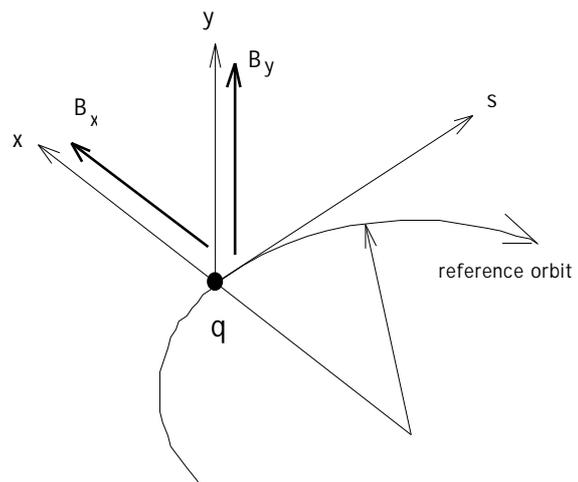


図7  $q > 0$  の電荷をもつ粒子に対する局所 ( $x, y, s$ ) 座標と磁場方向の定義。

$$\rho_{0x} = \left| \frac{p}{qB_{0y}} \right| \quad (41)$$

$$\rho_{0y} = \left| \frac{p}{qB_{0x}} \right| \quad (42)$$

で与えられる。通常は水平軌道を扱うので  $B_{0x} = 0$  である。参照軌道は偏向電磁石の強さとその配置によって決まる。

次に、水平方向の運動方程式

$$x'' = -\frac{qB_y}{p} \quad (43)$$

を考えよう。  $ds$  の参照軌道長に対する偏向面（ $x$  方向の運動を記述する面）における偏向角  $d\phi_0$  は

$$d\phi_0 = \frac{ds}{\rho_{0x}} = \kappa_{0x} ds \quad (44)$$

であるので、図8のように異なる運動量をもつ個々の粒子の軌道に対しては、

$$d\phi = \kappa_x d\sigma \quad (45)$$

である。参照軌道長  $ds$  に対する任意の軌道長  $d\sigma$  は近似的に

$$d\sigma = ds + x d\phi_0 = (1 + \kappa_{0x} x) ds \quad (46)$$

で与えられるので、

$$d\phi = \kappa_x d\sigma = (1 + \kappa_{0x} x) \kappa_x ds$$

参照軌道上の粒子は  $ds$  進む間に軌道中心方向に  $d\phi_0$  の偏向を受け、 $x$  だけズレた軌道上の粒子は同じ方向に  $d\phi$  の偏向を受けるので、両者の偏向角の差は  $dx = -d(\phi - \phi_0)$  である。したがって、 $x$  の  $s$  による2階微分は

$$x'' = -\frac{d\phi}{ds} + \frac{d\phi_0}{ds} = -(1 + \kappa_{0x} x) \kappa_x + \kappa_{0x} \quad (47)$$

ただし、 $\kappa_{0x} = 1/\rho_{0x}$ 、 $\kappa_x = 1/\rho_x$  である。 $y$  方向に対しては、 $\kappa_{0y} = 0$  であるから、

$$y'' = -(1 + \kappa_{0y} y) \kappa_y + \kappa_{0y} = -\kappa_y \quad (48)$$

である。 $x$ 、 $y$  方向の軌道の曲率は

$$\kappa_x = \frac{qB_y}{p} \quad (49)$$

$$\kappa_y = -\frac{qB_x}{p} \quad (50)$$

である。

次に、磁場 ( $B_x, B_y$ ) を次のように展開する。

$$B_x = gy + sxy + \frac{1}{6} o(3x^2y - y^3) + \quad (51)$$

$$B_y = B_{0y} + gx + \frac{1}{2} s(x^2 - y^2) + \frac{1}{6} o(x^3 - 3xy^2) + \quad (52)$$

ここで、 $g$  は磁場勾配（または4極磁場成分）[T/m]、 $s$  は6極磁場成分 [T/m<sup>2</sup>]、 $o$  は8

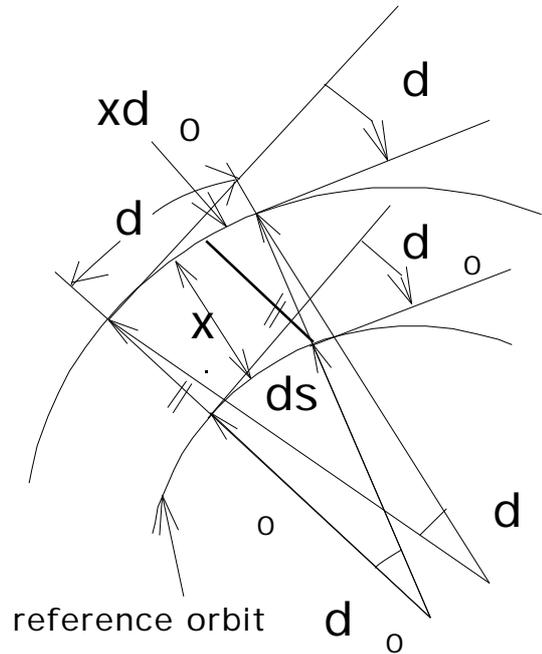


図8 偏向面における粒子の軌道。

極磁場成分 [T/m<sup>3</sup>]、 $B_{0y}$  は偏向磁場（または 2 極磁場成分） [T] である。さらに、ビームの運動量の拡がり  $\delta = p/p_0$  を考慮する必要があるので、

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_0(1+\delta)} = \frac{1}{p_0}(1-\delta+\delta^2-\dots) \quad (53)$$

のように展開して代入すれば(47)、(49)、(52)より、

$$x'' = \kappa_{0x} - \frac{q}{p_0}(1+\kappa_{0x}x)\{B_{0y} + gx + \frac{1}{2}s(x^2 - y^2) + \frac{1}{6}o(x^3 - 3xy^2) + \dots\}(1-\delta+\delta^2-\dots) \quad (54)$$

(48)、(50)、(51)より、

$$y'' = \frac{q}{p_0}\{gy + sxy + \frac{1}{6}o(3x^2y - y^3) + \dots\}(1-\delta+\delta^2-\dots) \quad (55)$$

$\kappa_{0x} = qB_{0y}/p_0$  を考慮して、 $x, y,$  の 2 次の項まで考えれば、

$$x'' + (k_0 + \kappa_{0x}^2)x = \kappa_{0x}(\delta - \delta^2) + (k_0 + \kappa_{0x}^2)x\delta - k_0\kappa_{0x}x^2 - \frac{1}{2}\frac{q}{p_0}s(x^2 - y^2) + O(3) \quad (56)$$

$$y'' - k_0y = -k_0y\delta + \frac{q}{p_0}sxy + O(3) \quad (57)$$

ただし、

$$k_0 = \frac{\kappa_{0x}}{B_{0y}}g = \frac{q}{p_0}g \quad (58)$$

である。ここで、 $m_0 = (q/p_0)s$  とおけば、

$$x'' + (k_0 + \kappa_{0x}^2)x = \kappa_{0x}(\delta - \delta^2) + (k_0 + \kappa_{0x}^2)x\delta - k_0\kappa_{0x}x^2 - \frac{1}{2}m_0(x^2 - y^2) + O(3) \quad (59)$$

$$y'' - k_0y = -k_0y\delta + m_0xy + O(3) \quad (60)$$

ここで得られた微分方程式は磁場の 6 極成分まで考慮したものである。運動量の変化や 2 次以上の項を無視すれば、擾乱のない線形微分方程式が得られる。

$$x'' + (k_0 + \kappa_{0x}^2)x = 0 \quad (61)$$

$$y'' - k_0y = 0 \quad (62)$$

このような近似は線形近似と呼ばれ、 $x, y$  面からの粒子が大きく外れない限り非常によい近似を与える。2 つの式はお互いによく似ているので

$$u'' + Ku = 0 \quad (63)$$

のように一般化できる。すなわち、 $x$  方向の運動は  $u = x$ 、 $K = k_0 + \kappa_{0x}^2$  として、 $y$  方向には  $u = y$ 、 $K = -k_0$  と置けばよい。

$K > 0$  のときの 2 つの独立解は

$$C(s) = \cos(K^{1/2}s) \quad \text{と} \quad S(s) = \frac{\sin(K^{1/2}s)}{K^{1/2}} \quad (64)$$

$K < 0$  のときは

$$C(s) = \cosh(|K|^{1/2}s) \quad \text{と} \quad S(s) = \frac{\sinh(|K|^{1/2}s)}{|K|^{1/2}} \quad (65)$$

であるので、一般解は  $A, B$  を定数として次の線形結合で与えられる。

$$u(s) = AC(s) + BS(s) \quad (66)$$

この  $s$  に関する 1 階微分は

$$u'(s) = AC'(s) + BS'(s) \quad (67)$$

である。ここで、 $s = 0$  のとき

$$u(0) = A, \quad u(0) = B \quad (68)$$

であるので、

$$u(s) = C(s)u(0) + S(s)u(0) \quad (69)$$

$$u(s) = C(s)u(0) + S(s)u(0) \quad (70)$$

となり、これをマトリックス形式で表せば、

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) \\ C(s) & S(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(0) \end{pmatrix} \quad (71)$$

すなわち、 $u(0)$ と $u(0)$ は粒子軌道の初期状態を表し、初期状態が分かれば  $C(s)$ ,  $S(s)$ ,  $C(s)$ ,  $S(s)$  で与えられる磁場のマトリックスを通過した直後の軌道の状態が $u(s)$  と  $u(s)$  で与えられることを意味する。このマトリックスは伝達マトリックス (transfermatrix) と呼ばれるもので、 $K$  の値から決まる。 $k_0$  は 4 極電磁石の磁場勾配に関係するので、発散か収束かによって符号を異にする。

### ( 3 - 1 ) 偏向電磁石における荷電粒子の運動

ここで、純粋な偏向電磁石を考えてみよう。その中で  $k_0 = 0$  であるので、純粋な偏向磁場中における運動方程式は

$$x'' + \kappa_{0x}^2 x = 0 \quad (72)$$

である。 $\kappa_{0x}^2 > 0$  であるので、一般解は  $\kappa_{0x} s = \theta$ 、 $\kappa_{0x} = 1/\rho_0$  として

$$u(s) = \cos\theta u(0) + \rho_0 \sin\theta u(0) \quad (73)$$

$$u(s) = -\frac{\sin\theta}{\rho_0} u(0) + \cos\theta u(0) \quad (74)$$

すなわち、純粋な偏向磁場に対する伝達マトリックスの方程式として

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho_0 \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{\rho_0} & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(0) \end{pmatrix} \quad (75)$$

が得られる。この式に現れる角度  $\theta$  は偏向角であって、図 9 のように偏向電磁石の中で軌道は曲率半径に従って曲線を描く。

偏向磁場のない垂直面においては、 $\kappa_{0y} s = \theta = 0$  とおいて、

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_0 \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(0) \end{pmatrix} \quad (76)$$

となる。

### ( 3 - 2 ) 磁場のない直線部における荷電粒子の運動

磁場のない直線部においては  $K = 0$  であるので、 $x$ 、 $y$  方向ともに運動方程式は  $u'' = 0$  となるため、直接的に解くことができ

$$u(s) = As + B \quad (77)$$

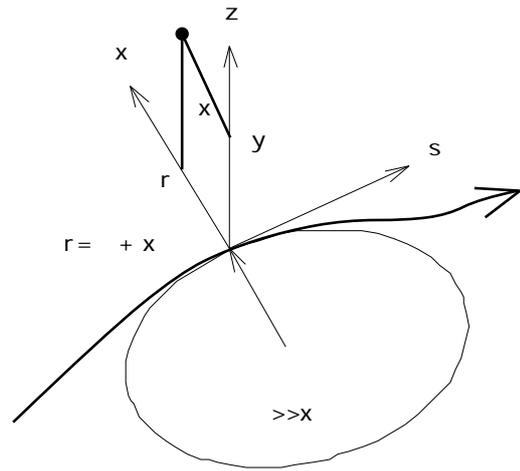


図 9 偏向電磁石における粒子の軌道。

$$u(s) = A \quad (78)$$

これより

$$u(0) = B, \quad u(0) = A \quad (79)$$

が得られるので、

$$u(s) = u(0) + su(0) \quad (80)$$

$$u(s) = u(0) \quad (81)$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(0) \end{pmatrix} \quad (82)$$

である。ここで、 $s$  は直線部の長さである。

### (3-3) 4極電磁石における荷電粒子の運動

今度は、純粋な4極磁場中ではどうであろうか。この場合 $\kappa_{0x} = 0$ である。したがって、

(1)  $K > 0$  (収束面) のとき、 $k_0^{1/2}s = \zeta$  と置いて、

$$u(s) = \cos\zeta u(0) + \frac{\sin\zeta}{k_0^{1/2}} u(0) \quad (83)$$

$$u(s) = -k_0^{1/2} \sin\zeta u(0) + \cos\zeta u(0) \quad (84)$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\zeta & \frac{\sin\zeta}{k_0^{1/2}} \\ -k_0^{1/2} \sin\zeta & \cos\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(0) \end{pmatrix} \quad (85)$$

4極電磁石の磁場実効長を $\ell_{Qeff}$  [m]、磁場勾配を $g$  [T/m]、磁気剛性を $B_{0y}\rho_{0x}$  [T·m] とすれば、 $k_0 = g/B_{0y}\rho_{0x}$  [m<sup>-2</sup>]、 $\zeta = \ell_{Qeff}\sqrt{k_0}$  である。

(2)  $K < 0$  (発散面) のとき、

$$u(s) = \cosh\zeta u(0) + \frac{\sinh\zeta}{k_0^{1/2}} u(0) \quad (86)$$

$$u(s) = k_0^{1/2} \sinh\zeta u(0) + \cosh\zeta u(0) \quad (87)$$

すなわち、

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\zeta & \frac{\sinh\zeta}{k_0^{1/2}} \\ k_0^{1/2} \sinh\zeta & \cosh\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u(0) \end{pmatrix} \quad (88)$$

である。

以上の伝達マトリックスの導出において運動量の相違は考慮しなかったのでマトリックスは2行2列であるが、運動量の相違を考慮すれば3行3列のマトリックスが得られる。伝達マトリックスを求めたとき、純粋な偏向磁場や純粋な4極磁場を仮定したので、それぞれのマトリックスが適用できるのは電磁石のある領域において理想的な磁場が存在し、その境界で磁場がシャープにゼロになる場合である。このような近似を鋭端近似 (hard-edgeapproximation) という。実際にはこのようなシャープな磁場境界を作るとは困難で、境界付近の有限の範囲でダラダラとゼロに減衰する。このような変化のある

磁場を辺縁磁場 (fringingfield) と呼ぶ。辺縁磁場も荷電粒子の運動に影響を与えるので、その伝達マトリックスを近似的に扱うことができる。

=====ここで、頭の体操 ( 2 )=====

問題 6 運動方程式の導出に多くの紙面を費やしたが、一般的な式として(59)式と(60)式導いてみよう。この節の本文にしたがって丁寧に式を辿ればよい。

問題 7 長さ  $\ell_B$  [m] の偏向電磁石の台数を  $2N$  台として最大磁場の強さを  $B$  [T] とするとき、加速できる陽子の最大エネルギーを求めよ。

$$[\text{答}] T = [E_0^2 + (cp)^2]^{1/2} - E_0 = [0.93826^2 + (N\ell_B B / 3.3356\pi)^2]^{1/2} - 0.93826 [\text{GeV}]$$

問題 8 問題 7 で電子の場合の最大エネルギーを求めよ。

$$[\text{答}] T = [0.000511^2 + (N\ell_B B / 3.3356\pi)^2]^{1/2} - 0.000511 [\text{GeV}]$$

=====頭の体操終わり=====

#### 4 . 運動量の違いを考慮した伝達マトリックス (機能分離型の場合)

機能分離型シンクロトロンとは、ビームの偏向と収束の機能を別々の電磁石に持たせた構造のシンクロトロンである。したがって、偏向電磁石は純粋な偏向磁場を、4極電磁石は純粋な収束磁場を発生するように設計され、それぞれの機能が分離されていることによって強い偏向磁場、強い磁場勾配が得られる。今日の大型シンクロトロンはすべて機能分離型構造になっている。このようにしておけば、偏向磁場と収束磁場が独立に調整できるので、加速器の運転の上で大きな自由度が得られる。

(59)、(60)式から  $x, y,$  の一次の項まで考慮した運動方程式は

$$x' + (k_0 + \kappa_{0x}^2)x = \kappa_{0x}\delta \tag{89}$$

$$y' - k_0 y = 0 \tag{90}$$

である。  $y$  方向の方程式には運動量の影響が現れないので、  $x$  方向についてのみ考慮する。(89)式で  $K = k_0 + \kappa_{0x}^2$  と置いて、

$$x' + Kx = \frac{\delta}{\rho_0} \tag{91}$$

この非同次方程式の一般解を求めるため、まず同次方程式  $x' + Kx = 0$  の2つの独立解を  $x_1, x_2$  とする。

$$x = Fx_1 + Gx_2 \tag{92}$$

において、定数  $F, G$  を  $x$  の関数として扱う定数変化法を用いる。  $x$  の微分

$$x' = F x_1 + Fx_1' + G x_2 + Gx_2' \tag{93}$$

において、

$$F x_1 + G x_2 = 0 \quad (94)$$

という条件を置く。この条件の元に(92)式を再度微分して、

$$x = F x_1' + G x_2' + F x_1'' + G x_2'' \quad (95)$$

$x_1'' + K x_1 = x_2'' + K x_2 = 0$ を考慮して、これらの式を元の非同次方程式(91)に代入すれば、

$$F x_1' + G x_2' = \frac{\delta}{\rho_0} \quad (96)$$

(94)と(96)を連立方程式として扱えば、

$$F = \frac{x_2 \delta}{\rho_0(x_1' x_2 - x_1 x_2')} \quad (97)$$

$$G = \frac{x_1 \delta}{\rho_0(x_1 x_2' - x_1' x_2)} \quad (98)$$

(1)  $K > 0$  のとき、(64)式から

$$x_1 = C(s) = \cos(K^{1/2} s), \quad x_2 = S(s) = \frac{\sin(K^{1/2} s)}{K^{1/2}} \quad (99)$$

であるので、

$$F = \frac{\delta \cos(K^{1/2} s)}{K \rho_0} + A \quad (100)$$

$$G = \frac{\delta \sin(K^{1/2} s)}{K^{1/2} \rho_0} + B \quad (101)$$

A、Bは積分定数である。したがって、

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{\delta \cos(K^{1/2} s)}{K \rho_0} + A \cos(K^{1/2} s) + \frac{\delta \sin(K^{1/2} s)}{K^{1/2} \rho_0} + B \frac{\sin(K^{1/2} s)}{K^{1/2}} \\ &= A \cos(K^{1/2} s) + B \frac{\sin(K^{1/2} s)}{K^{1/2}} + \frac{\delta}{K \rho_0} \end{aligned} \quad (102)$$

$$x'(s) = -A K^{1/2} \sin(K^{1/2} s) + B \cos(K^{1/2} s) \quad (103)$$

$s = 0$  において

$$x(0) = A + \frac{\delta}{K \rho_0} \quad (104)$$

$$x'(0) = B \quad (105)$$

である。このA、Bを(102)に代入して(99)式を考慮して整理すれば、

$$x(s) = C(s)x(0) + S(s)x'(0) + [1 - \cos(K^{1/2} s)] \frac{\delta}{K \rho_0} \quad (106)$$

が成立する。 $x(s)$ の $s$ の関する微分は

$$x(s) = C(s)x(0) + S(s)x'(0) + \sin(K^{1/2} s) \frac{\delta}{K^{1/2} \rho_0} \quad (107)$$

1) 偏向電磁石の場合、 $K = \kappa_{0x}^2$ 、 $\kappa_{0x} s = K^{1/2} s = \theta$ 、 $\kappa_{0x} = 1/\rho_0$ とにおいて、マトリック形式で表せば、

$$\begin{matrix} x(s) & \cos\theta & \rho_0 \sin\theta & \rho_0(1-\cos\theta) & x(0) \\ x(s) & = & -\sin\theta/\rho_0 & \cos\theta & x(0) \\ p/p_0 & & 0 & 0 & p/p_0 \end{matrix} \quad (108)$$

である。ここで、 $\theta$  [rad]は偏向電磁石 1 台の偏向角である。

垂直面内では  $y$  に関する微分方程式は  $p/p_0$  の影響を受けないので、(101)と(102)において  $\delta = 0$ 、 $K = 0$  とおけば、 $C(s) = 1$ 、 $C(s) = 0$ 、 $S(s) = s = \rho_0\theta$ 、 $S(s) = 1$ となるので、

$$y(s) = y(0) + \rho_0\theta y'(0) \quad (109)$$

$$y'(s) = y'(0) \quad (110)$$

すなわち、

$$\begin{matrix} y(s) & 1 & \rho_0\theta & 0 & y(0) \\ y(s) & = & 0 & 1 & y(0) \\ p/p_0 & & 0 & 0 & p/p_0 \end{matrix} \quad (111)$$

となる。この式の導出において、 $x$  方向のマトリックスを  $\theta = 0$  としてもよい。

2) 直線長さ  $s$  [m] のドリフトスペースにおいては、 $\rho_0\theta = s$ 、 $\rho_0 = \dots$ 、 $\theta = 0$  において、

$$\begin{matrix} x(s) & 1 & s & 0 & x(0) & y(s) & 1 & s & 0 & y(0) \\ x'(s) & = & 0 & 1 & 0 & x'(0) & y'(s) & = & 0 & 1 & 0 & y'(0) \\ p/p_0 & & 0 & 0 & 1 & p/p_0 & p/p_0 & & 0 & 0 & 1 & p/p_0 \end{matrix} \quad (112)$$

である。

3) 収束用 4 極電磁石ではどうであろうか。この場合偏向電磁石と同じ取り扱いが可能で、(91)式において  $K = k_0 (>0)$  であるので、 $K^{1/2}s = k_0^{1/2}s = \zeta$ 、 $\rho_0 = \dots$  において、

$$x_1 = C(s) = \cos\zeta, \quad x_2 = S(s) = \frac{\sin\zeta}{k_0^{1/2}} \quad (112)$$

(100)、(101)において  $\rho_0 = \dots$  ( $\kappa_{0x} = 0$ ) と置けば、

$$F = A, \quad G = B$$

したがって、

$$x(s) = Fx_1 + Gx_2 = A\cos\zeta + B\frac{\sin\zeta}{k_0^{1/2}}$$

$$x'(s) = -Ak_0^{1/2}\sin\zeta + B\cos\zeta$$

が得られるので、これより

$$x(0) = A, \quad x'(0) = B$$

となるので、

$$x(s) = C(s)x(0) + S(s)x'(0) \quad (113)$$

$$x'(s) = C'(s)x(0) + S'(s)x'(0) \quad (114)$$

すなわち、

$$\begin{array}{ccccc} x(s) & \cos\zeta & \sin\zeta/\sqrt{k_0} & 0 & x(0) \\ x'(s) & = -\sqrt{k_0}\sin\zeta & \cos\zeta & 0 & x'(0) \\ p/p_0 & 0 & 0 & 1 & p/p_0 \end{array} \quad (115)$$

ここで、 $\ell_Q[m]$  を 4 極電磁石の長さとして置けば、 $\zeta = \ell_Q K^{1/2}$ 、 $K = k_0 = g/B_{0y}\rho_{0x}$  である。  
 $B_{0y}\rho_{0x} [T \cdot m] = 3.3356 p_0 [GeV/c]$  の関係を代入すれば、

$$K [m^{-2}] = k_0 = 0.29979 g/p_0 [T \cdot m^{-1} (GeV/c)^{-1}] = g/B_{0y}\rho_0 [m^{-2}]$$

4 極電磁石の長さおよび磁場勾配およびビームの運動量（またはエネルギー）から伝達マトリックスが決定される。

(2)  $K < 0$  は発散 4 極電磁石の場合に相当し、同次方程式  $x'' + Kx = 0$  の 2 つの独立解は

$$x_1 = C(s) = \cosh(|K|^{1/2} s), \quad x_2 = S(s) = \frac{\sinh(|K|^{1/2} s)}{|K|^{1/2}} \quad (116)$$

である。発散 4 極電磁石においても(97)と(98)の関係が成り立ち、 $\rho_0 =$  であるから、

$$F = \frac{x_2 \delta}{\rho_0(x_1' x_2 - x_1 x_2')} = 0, \quad G = \frac{x_1 \delta}{\rho_0(x_1 x_2' - x_1' x_2)} = 0$$

すなわち、

$$F = A, \quad G = B$$

が得られる。A、Bは積分定数である。したがって、

$$x(s) = Fx_1 + Gx_2 = A \cosh(|K|^{1/2} s) + B \frac{\sinh(|K|^{1/2} s)}{|K|^{1/2}} \quad (117)$$

$$x'(s) = A|K|^{1/2} \sinh(|K|^{1/2} s) + B \cosh(|K|^{1/2} s) \quad (118)$$

である。s=0 において

$$x(0) = A, \quad x'(0) = B$$

より

$$x(s) = C(s)x(0) + S(s)x'(0)$$

$$x'(s) = C'(s)x(0) + S'(s)x'(0)$$

$|K| = k_0$  であるので、 $|K|^{1/2} s = k_0^{1/2} s = \zeta$  と置いて、

$$x(s) = \cosh\zeta x(0) + \frac{\sinh\zeta}{k_0^{1/2}} x'(0) \quad (119)$$

$$x'(s) = k_0^{1/2} \sinh\zeta x(0) + \cosh\zeta x'(0) \quad (120)$$

となつて、伝達マトリックス形式に直せば、

$$\begin{array}{ccccc} x(s) & \cosh\zeta & \sinh\zeta/\sqrt{k_0} & 0 & x(0) \\ x'(s) & = \sqrt{k_0}\sinh\zeta & \cosh\zeta & 0 & x'(0) \\ p/p_0 & 0 & 0 & 1 & p/p_0 \end{array} \quad (121)$$

である。ここでも、 $\ell_Q[m]$  を 4 極電磁石の長さとして置けば、 $\zeta = \ell_Q |K|^{1/2}$ 、 $|K| = k_0 = g/B_{0y}\rho_0$  であつて、

$$K [m^{-2}] = k_0 = 0.29979 g/p_0 [T \cdot m^{-1} (GeV/c)^{-1}] = g/B_{0y}\rho_0 [m^{-2}]$$

となる。

====ここで、頭の体操（ 3 ）=====

問題 9 本文の説明に従い偏向電磁石に対する(108)式を求めよ。

問題 10 偏向電磁石 1 台当たりの偏向角を10 deg、曲率半径を10mとして、この場合の伝達マトリックスを求めよ。

問題 11 本文の説明に従い集束と発散 4 極電磁石に対する(115)式と(121)式を求めよ。

問題 12 4 極電磁石の長さを0.5mとし、磁場勾配10 T/mの場合について、  
( 1 ) 陽子12 GeV、( 2 ) 電子8 GeV  
の場合の集束および発散の伝達マトリックスを求めよ。

====頭の体操終わり=====

## 5 . 運動量の違いを考慮した伝達マトリックス (機能結合型の場合)

機能結合型シンクロトロンとは、偏向と収束の両方の機能を合わせ持つ電磁石を採用するシンクロトロンである。この構造は機能分離型がまだ研究される以前の初期のシンクロトロンに採用されたもので、CERNのCPSやBNLのAGSなどそれである。今日では医療用などの利用範囲のはっきりしたエネルギーの低い比較的小型のシンクロトロンに採用される場合がある。ビームの偏向と収束を 1 種類の電磁石で行うので、安定に運転できるチューンの範囲は狭い。

直線部のドリフトスペースは前節に同じである。前節で導いた次の 2 つの場合を機能結合型として扱うことで伝達マトリックスが得られる。

1 )  $K > 0$  の場合 (  $k_0 > 0$  )

1 - 1 )  $K > 0$ 、 $k_0 > 0$  (  $g > 0$  ) の場合 ( 水平面で収束の場合 )

$$K = k_0 + \kappa_{0x}^2 = \frac{g}{B_{0y}\rho_0} + \frac{1}{\rho_0^2}$$

である。この場合、同次方程式の 2 つの独立解は(99)に同じである。

$$x_1 = C(s) = \cos(K^{1/2}s), \quad x_2 = S(s) = \frac{\sin(K^{1/2}s)}{K^{1/2}}$$

一般解  $x(s)$  も(106)に同じであるので、

$$x(s) = C(s)x(0) + S(s)x'(0) + [1 - \cos(K^{1/2}s)] \frac{\delta}{K\rho_0}$$

$$x(s) = C(s)x(0) + S(s)x'(0) + \sin(K^{1/2}s) \frac{\delta}{K^{1/2}\rho_0}$$

から

$$\begin{array}{ccccc}
x(s) & \cos\zeta & \sin\zeta/\sqrt{K} & (1-\cos\zeta)/\rho_0 K & x(0) \\
x'(s) & = -\sqrt{K}\sin\zeta & \cos\zeta & \sin\zeta/\rho_0\sqrt{K} & x'(0) \\
p/p_0 & 0 & 0 & 1 & p/p_0
\end{array} \quad (122)$$

となる。ここで、

$$K = k_0 + \kappa_{0x}^2 = \frac{g}{B_{0y}\rho_0} + \frac{1}{\rho_0^2} = \frac{(|n|+1)}{\rho_0^2} \quad (123)$$

電磁石の長さを  $\ell$  [m] として、 $\zeta = \ell K^{1/2}$  である。 $n$  は磁場指標と呼ばれ、磁場勾配の大きさを与える無次元量である。

$$n = -\frac{\rho_0}{B_{0y}} \frac{dB_y}{dx} \quad (124)$$

1 - 2 )  $K > 0$ 、 $k_0 > 0$  ( $g > 0$ ) の場合 (垂直面で収束の場合)

垂直面内の運動を  $y$  座標で考え、上の式で  $x \rightarrow y$  の置き換えを行い、 $\kappa_{0x} = 0$  を考慮して、

$$K = k_0 = \frac{g}{B_{0y}\rho_0} = \frac{|n|}{\rho_0^2} \quad (125)$$

$$y_1 = C(s) = \cos(K^{1/2}s), \quad y_2 = S(s) = \frac{\sin(K^{1/2}s)}{K^{1/2}}$$

$$y(s) = C(s)y(0) + S(s)y'(0) + [1 - \cos(K^{1/2}s)] \frac{\delta}{K\rho_0}$$

$$y'(s) = C'(s)y(0) + S'(s)y'(0) + \sin(K^{1/2}s) \frac{\delta}{K^{1/2}\rho_0}$$

から

$$\begin{array}{ccccc}
y(s) & \cos\zeta & \sin\zeta/\sqrt{K} & (1-\cos\zeta)/\rho_0 K & y(0) \\
y'(s) & = -\sqrt{K}\sin\zeta & \cos\zeta & \sin\zeta/\rho_0\sqrt{K} & y'(0) \\
p/p_0 & 0 & 0 & 1 & p/p_0
\end{array} \quad (126)$$

である。ただし、電磁石長を  $\ell$  [m] として、 $\zeta = \ell K^{1/2}$  である。

2 )  $K < 0$  の場合 ( $k_0 < 0$ )

2 - 1 )  $K < 0$ 、 $k_0 < 0$  ( $g < 0$ ) の場合 (水平面で発散の場合)

$$|K| = |k_0 + \kappa_{0x}^2| = \frac{g}{B_{0y}\rho_0} + \frac{1}{\rho_0^2} = \frac{|n|-1}{\rho_0^2} \quad (127)$$

この場合の同次方程式の 2 つの独立解は(65)または(116)から

$$x_1 = C(s) = \cosh(|K|^{1/2}s), \quad x_2 = S(s) = \frac{\sinh(|K|^{1/2}s)}{|K|^{1/2}}$$

である。前と同じく定数変化法を用いて(97)、(98)の式に代入して、

$$F = -\frac{\delta \sinh(|K|^{1/2}s)}{\rho_0 |K|^{1/2}}, \quad G = \frac{\delta \cosh(|K|^{1/2}s)}{\rho_0}$$

すなわち、

$$F = -\frac{\delta \cosh(|K|^{1/2} s)}{\rho_0 |K|} + A, \quad G = \frac{\delta \sinh(|K|^{1/2} s)}{\rho_0 |K|^{1/2}} + B$$

したがって、

$$x(s) = Fx_1 + Gx_2 = A \cosh(|K|^{1/2} s) + B \frac{\sinh(|K|^{1/2} s)}{|K|^{1/2}} - \frac{\delta}{\rho_0 |K|} \quad (128)$$

$$x'(s) = A|K|^{1/2} \sinh(|K|^{1/2} s) + B \cosh(|K|^{1/2} s) \quad (129)$$

これより、

$$x(0) = A - \frac{\delta}{\rho_0 |K|}, \quad x'(0) = B$$

(128)、(129)にA、Bを代入すれば、

$$x(s) = C(s)x(0) + S(s)x'(0) + [\cosh(|K|^{1/2} s) - 1] \frac{\delta}{\rho_0 |K|}$$

$$x(s) = C(s)x(0) + S(s)x'(0) + \sinh(|K|^{1/2} s) \frac{\delta}{\rho_0 |K|^{1/2}}$$

となり、マトリックス形式に直せば、

$$\begin{array}{cccccc} x(s) & \cosh \zeta & \sinh \zeta / \sqrt{|K|} & (\cosh \zeta - 1) / \rho_0 |K| & x(0) \\ x(s) & \sqrt{|K|} \sinh \zeta & \cosh \zeta & \sinh \zeta / \rho_0 \sqrt{|K|} & x'(0) \\ p/p_0 & 0 & 0 & 1 & p/p_0 \end{array} \quad (130)$$

ここで、電磁石長を  $\ell$  [m] とすれば、 $\zeta = \ell |K|^{1/2}$  である。

2 - 2 )  $K < 0$ 、 $k_0 < 0$  ( $g < 0$ ) の場合 ( 垂直面で発散の場合 )

垂直面 ( $y$  方向) では  $\kappa_{0y} = 0$  であるので、

$$|K| = |k_0| = \left| \frac{g}{B_{0y} \rho_0} \right| = \frac{|n|}{\rho_0^2} \quad (131)$$

前項 2 - 1 ) において、座標を  $x \rightarrow y$  に変えて、

$$y_1 = C(s) = \cosh(|K|^{1/2} s), \quad y_2 = S(s) = \frac{\sinh(|K|^{1/2} s)}{|K|^{1/2}}$$

$$y(s) = C(s)y(0) + S(s)y'(0) + [\cosh(|K|^{1/2} s) - 1] \frac{\delta}{\rho_0 |K|}$$

$$y(s) = C(s)y(0) + S(s)y'(0) + \sinh(|K|^{1/2} s) \frac{\delta}{\rho_0 |K|^{1/2}}$$

から

$$\begin{array}{cccccc} y(s) & \cosh \zeta & \sinh \zeta / \sqrt{|K|} & (\cosh \zeta - 1) / \rho_0 |K| & y(0) \\ y(s) & \sqrt{|K|} \sinh \zeta & \cosh \zeta & \sinh \zeta / \rho_0 \sqrt{|K|} & y'(0) \\ p/p_0 & 0 & 0 & 1 & p/p_0 \end{array} \quad (132)$$

ここで、電磁石長を  $\ell$  [m] とすれば、 $\zeta = \ell |K|^{1/2}$  である。

以上のように、機能結合型の電磁石を扱う場合には、同じ水平面でも収束面であるか発散面であるかによって  $K$  の値が異なることに注意する必要がある。勿論、伝達マトリックスも異なる。

機能分離型でも機能結合型でも4極磁場を考えると、「水平方向にビームが集束されれば垂直方向には発散される。逆も成立し、水平方向に発散であれば垂直方向は集束である」。

=====ここで、頭の体操(4)=====

問題13 機能結合型電磁石の磁場分布を考え、この分布から偏向磁場を差し引けば4極磁場分布が水平、垂直方向に現れることを確かめよ。

=====頭の体操終わり=====

## 6. 偏向電磁石の線形変換

電磁石の辺縁磁場を取り扱うために電磁石のギャップの高さに対する幅の比(幅/高さ)が十分大きく、参照軌道近傍で  $B_x = 0$  が成立するものとして磁場を展開する。このとき偏向電磁石の磁場の対称性を次のように考慮する必要がある。C型偏向電磁石ではx-s面に関する対称性から

$$B_x(y) = -B_x(-y)$$

$$B_y(y) = B_y(-y)$$

$$B_s(y) = -B_s(-y)$$

であるが、直方体形状をなすH型偏向電磁石ではさらにy-s面に関する対称性が

$$B_x(x) = -B_x(-x)$$

$$B_y(x) = B_y(-x)$$

$$B_s(x) = B_s(-x)$$

が加わる。ここでは(x, y, s)をカーテシアン座標系で扱うが、後で参照曲線に乗った曲線座標に移ることを考える。磁場の展開はこれらの対称性を考慮して、

x-s面とy-s面の対称性

$$B_x(s) = xy \sum_{i,k=0} b_{i,k}(s) x^{2i} y^{2k}$$

$$B_y(s) = \sum_{i,k=0} a_{i,k}(s) x^{2i} y^{2k}$$

$$B_s(s) = y \sum_{i,k=0} c_{i,k}(s) x^{2i} y^{2k}$$

x-s面の対称性

$$B_x(s) = y \sum_{i,k=0} b_{i,k}(s) x^i y^{2k}$$

$$B_y(s) = \sum_{i,k=0} a_{i,k}(s) x^i y^{2k}$$

$$B_s(s) = y \sum_{i,k=0} c_{i,k}(s) x^i y^{2k}$$

であるが、 $\text{rot}\mathbf{B} = 0$  と  $\text{div}\mathbf{B} = 0$  の関係から、

1) x-s面とy-s面の対称性の場合

$$\text{rot}\bar{\mathbf{B}} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial y}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial B_s}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial s}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\right)\hat{k} = 0 \quad (133)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_s}{\partial s} = 0 \quad (134)$$

2) x-s 面の対称性の場合、簡単のため曲線座標を図 10 のように半径  $\rho$  の円柱座標で近似して、 $s = z$ 、 $r = \rho + x$  の関係を考慮して

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{B} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right) \hat{z} + \left( \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \hat{s} = 0 \quad \rightarrow \\ \operatorname{rot} \bar{B} &= \left( \frac{\rho}{\rho+x} \frac{\partial B_y}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial y} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial B_s}{\partial x} + \frac{1}{\rho+x} B_s - \frac{\rho}{\rho+x} \frac{\partial B_x}{\partial s} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \hat{\varphi} = 0 \end{aligned} \quad (135)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{B} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad \rightarrow \\ \operatorname{div} \bar{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho+x} B_x + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\rho}{\rho+x} \frac{\partial B_s}{\partial s} = 0 \end{aligned} \quad (136)$$

から係数の間には、

3) x-s 面と y-s 面の対称性の場合、(133)と(134)から

$$\begin{aligned} a_{i,k}'(s) &= (2k+1)c_{i,k}(s) \\ b_{i,k}'(s) &= 2(i+1)c_{i+1,k}(s) \\ 2(i+1)a_{i+1,k}(s) &= (2k+1)b_{i,k}(s) \\ 2(k+1)a_{i,k+1}(s) &+ (2k+1)b_{i,k}(s) + c_{i,k}'(s) = 0 \end{aligned} \quad (137)$$

4) x-s 面の対称性の場合、(135)と(136)から

$$\begin{aligned} a_{i,k}' &= (2k+1)(c_{i,k} + c_{i-1,k} / \rho) \\ b_{i,k}' &= (i+1)(c_{i+1,k} + c_{i,k} / \rho) \\ (i+1)a_{i+1,k} &= (2k+1)b_{i,k} \\ 2(k+1)[a_{i,k+1} + a_{i-1,k+1} / \rho] &+ (i+1)[b_{i+1,k} + b_{i,k} / \rho] + c_{i,k}' = 0 \end{aligned} \quad (138)$$

の関係が成立する。これらの関係を利用すれば、

(1) x-s 面と y-s 面の対称性の場合、(137)の関係を適用して、

$$\begin{aligned} B_y(s) &= \sum_{i,k=0} a_{i,k}(s) x^{2i} y^{2k} = a_{0,0} + a_{1,0} x^2 + a_{0,1} y^2 + a_{1,1} x^2 y^2 + a_{2,0}(s) x^4 + a_{0,2}(s) y^4 + O(6) \\ &= a + b x^2 / 2 - (a' + b) y^2 / 2 + c x^4 / 24 - (b' + c) x^2 y^2 / 4 + (a''' + 2b' + c) y^4 / 24 + O(6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_x(s) &= \sum_{i,k=0} b_{i,k}(s) x^{2i} y^{2k} = b_{0,0} x y + b_{1,0} x^3 y + b_{0,1} x y^3 + b_{1,1} x^3 y^3 + O(6) \\ &= b x y + c x^3 y / 6 - (b' + c) x y^3 / 6 + O(6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_s(s) &= \sum_{i,k=0} c_{i,k}(s) x^{2i} y^{2k} = c_{0,0}(s) y + c_{1,0}(s) x^2 y + c_{0,1}(s) y^3 + O(5) \\ &= d' y + b' x^2 y / 2 - (d'' + b') y^3 / 6 + O(5) \end{aligned}$$

ここで、

$$a = a_{0,0} = B_y \Big|_{x=y=0}$$

$$b = \partial^2 B_y / \partial x^2 \Big|_{x=y=0} = 2! a_{1,0}$$

$$c = \partial^4 B_y / \partial x^4 \Big|_{x=y=0} = 4! a_{2,0}$$

(2) x-s 面の対称性の場合、(138)を適用して2次の項まで求めれば

$$B_x(s) = b_{0,0}y + b_{1,0}xy + O(3) = by + cxy + O(3)$$

$$B_y(s) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{2,0}x^2 + a_{0,1}y^2 + O(3) = a + bx + cx^2/2 - (a'' + b/\rho + c)y^2/2 + O(3)$$

$$B_s(s) = c_{0,0}y + c_{1,0}xy + O(3) = a'y + (-a'/\rho + b')xy + O(3)$$

ここで、

$$a = a_{0,0} = B_y \Big|_{x=y=0}$$

$$b = \partial B_y / \partial x \Big|_{x=y=0} = a_{1,0}$$

$$c = \partial^2 B_y / \partial x^2 \Big|_{x=y=0} = 2! a_{2,0}$$

である。x-s面とy-s面の対称性の場合に比べて、 $a, b, c$ の定義が異なるので注意が必要である。

参照軌道近傍で  $B_x = 0$  が成立するとすれば、 $b = c = 0$  であるので、

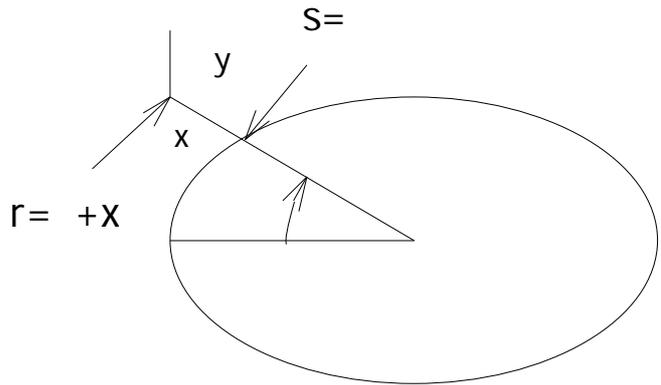


図10 円柱座標系における軌道の表現。

1) x-s 面とy-s 面の対称性の場合、

$$B_y(s) = a - a''y^2/2 + a''''y^4/24 + O(6) = \sum_{n=0} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} a^{(2n)} y^{2n}$$

$$B_s(s) = a'y - a'''y^3/6 + O(5) = \sum_{n=0} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} a^{(2n+1)} y^{2n+1}$$

が成立する。ここで  $a^{(m)} = \partial^m a / \partial s^m$  である。

2) x-s 面の対称性の場合、参照軌道近傍においても一般的には  $B_x = 0$  は成立しない。図10において基準点からみた参照軌道上の点までの位置ベクトルを  $\mathbf{R}$  とすれば、参照軌道から相対的に  $(x, y)$  だけ離れた場所を運動する粒子の位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = y\hat{y} + x\hat{x} + \mathbf{R}$$

である。これから速度ベクトルと加速度ベクトルを求めれば、

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{y}\hat{y} + \dot{x}\hat{x} + x\dot{\hat{x}} + \dot{\mathbf{R}} = \dot{y}\hat{y} + \dot{x}\hat{x} + w(1 + \frac{x}{\rho})\hat{s}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{y}\hat{y} + [\ddot{x} - \frac{w^2}{\rho}(1 + \frac{x}{\rho})]\hat{x} + [2\dot{x}\frac{w}{\rho} + \dot{w}(1 + \frac{x}{\rho})]\hat{s}$$

ここで、 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{s})$  は曲線座標におけるそれぞれの方向の単位ベクトルであり、

$$\dot{\hat{y}} = 0, \quad \dot{\hat{x}} = \frac{w}{\rho}\hat{s}, \quad \dot{\hat{s}} = -\frac{w}{\rho}\hat{x}$$

である。記号  $(\dot{\cdot})$  は時間微分を表し、 $w = \dot{s}$ 、 $\dot{\mathbf{R}} = w\hat{s}$  である。時間微分  $(\dot{\cdot})$  から経

路微分 ( ' ) への変換式

$$\dot{y} = w y', \quad \ddot{y} = w^2 y'' + \dot{w} y', \quad \dot{x} = w x', \quad \ddot{x} = w^2 x'' + \dot{w} x'$$

を考慮して、

$$\ddot{\mathbf{r}} = w^2 \left[ y'' + \frac{\dot{w}}{w^2} x' \right] \hat{y} + w^2 \left[ x'' + \frac{\dot{w}}{w^2} x' - \frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \right] \hat{x} + \left[ 2x' \frac{\dot{w}}{\rho} + \dot{w} \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \right] \hat{s}$$

が得られる。磁場によるローレンツ力が働くときの粒子の運動方程式  $m\ddot{\mathbf{r}} = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$  より、

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{q}{m} [(\dot{x}B_s - \dot{s}B_x)\hat{y} + (\dot{s}B_y - \dot{y}B_s)\hat{x} + (\dot{y}B_x - \dot{x}B_y)\hat{s}] \\ &= \frac{q}{p} v w \left[ \left\{ x' B_s - \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) B_x \right\} \hat{y} + \left\{ \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) B_y - y' B_s \right\} \hat{x} + (y' B_x - x' B_y) \hat{s} \right] \end{aligned}$$

ここで、参照軌道から半径方向へのズレ  $x$  を考慮して  $\dot{s} = \frac{ds + x ds/\rho}{dt} = w \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right)$  である。

以上から、

$$\begin{aligned} &\left[ y'' + \frac{\dot{w}}{w^2} x' \right] \hat{y} + \left[ x'' + \frac{\dot{w}}{w^2} x' - \frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \right] \hat{x} + \left[ 2x' \frac{\dot{w}}{\rho} + \dot{w} \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \right] \hat{s} \\ &= \frac{q}{p} \frac{v}{w} \left[ \left\{ x' B_s - \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) B_x \right\} \hat{y} + \left\{ \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) B_y - y' B_s \right\} \hat{x} + (y' B_x - x' B_y) \hat{s} \right] \end{aligned}$$

さらに、線形近似式として

$$\dot{w} = 0, \quad \frac{v}{w} = 1 + \frac{x}{\rho}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_0 + p} = \frac{1}{p_0} \left( 1 - \frac{p}{p_0} \right), \quad B_s = 0$$

を考慮すれば、

$$\begin{aligned} &y'' \hat{y} + \left[ x'' - \frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \right] \hat{x} + \left[ x' \frac{2}{\rho} \right] \hat{s} \\ &= \frac{q}{p_0} \left( 1 - \frac{p}{p_0} \right) \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \left[ \left\{ x' B_s - \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) B_x \right\} \hat{y} + \left\{ \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) B_y - y' B_s \right\} \hat{x} + (y' B_x - x' B_y) \hat{s} \right] \end{aligned}$$

である。これより、

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{q}{p_0} \left( 1 - \frac{p}{p_0} \right) \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right)^2 b y \\ x'' - \frac{1}{\rho} \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) &= \frac{q}{p_0} \left( 1 - \frac{p}{p_0} \right) \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right)^2 (a + b x) \end{aligned}$$

$k = \frac{q}{p_0} b$ 、 $\frac{q}{p_0} a = -\frac{1}{\rho}$  とおけば、 $x$ - $s$  面に関して対称性のある磁場中における曲線座標で表した 1 次近似の運動方程式

$$\begin{aligned} y'' + k y &= 0 \\ x'' - \left( k - \frac{1}{\rho^2} \right) x &= \frac{1}{\rho} \frac{p}{p_0} \end{aligned}$$

が得られる。 $k = -\frac{q}{p_0} b$  とすれば、

$$\begin{aligned} y'' - k y &= 0 \\ x'' + \left( k + \frac{1}{\rho^2} \right) x &= \frac{1}{\rho} \frac{p}{p_0} \end{aligned}$$

となって(61)と(62)に一致する。

## 第2章 電磁気学からみた電磁石

電磁石は起磁力を与えるコイルの電気回路と磁束を誘導する磁気回路から構成される。加速器に使用される電磁石は空隙、いわゆるギャップを持ち、荷電粒子がこの中を通るとき磁場の作用を受ける。ギャップに発生する磁場はコイルを流れる電流による磁場と鉄心を構成する鉄（強磁性体）の磁化による磁場の和として与えられる。強磁性体については第5章で扱うことにして、ここでは電流による磁場と磁気回路による電磁石の扱いについて述べる。

### 1. 電流による磁場の発生

電線に電流を流すとその周りに磁場が発生する。直線的に長く伸ばされた電線でも、あるいはソレノイド状に巻かれた電線でも同じ原理に基づいて磁場が発生する。z方向に電流（電流密度  $\mathbf{J}$ ）が流れている図1の直線状電線を考え、その周りに発生する磁場を考察しよう。アンペールの法則として知られるMaxwell方程式における電流と磁場の関係は

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1)$$

で与えられる。電流の周りに磁性体は存在しないものとするれば、両辺に真空中の透磁率  $\mu_0$  をかけて、

$$\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} \quad (2)$$

となる。この  $\mathbf{B}$  は磁束密度（または磁気誘導）と呼ばれるもので、荷電粒子の運動方程式に表れる磁場である。電流が流れる全断面について積分すれば、

$$\text{rot}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (3)$$

ここで、 $(\cdot)$  はベクトルの内積を表す。右辺で考えれば電流に垂直な断面について電流を積分することを意味する。  $d\mathbf{S}$  は面積要素を表すベクトルで、その方向は面積要素に垂直である。これだけでは方向が正か負が決まらない。面積要素の周囲に沿って電流の作る磁場の方向に右ネジを回すとき、ネジの進む方向を面積ベクトルの正の方向とする。このように定義すれば、面積要素が電流の垂直面に一致しなくても電流と面積要素のベクトルの内積は必ず電流と垂直断面積の積になる。この様子を図2に示す。

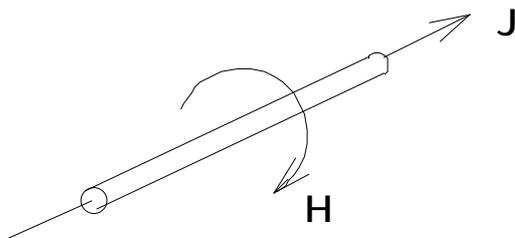


図1 直線状電線を流れる電流による磁場。

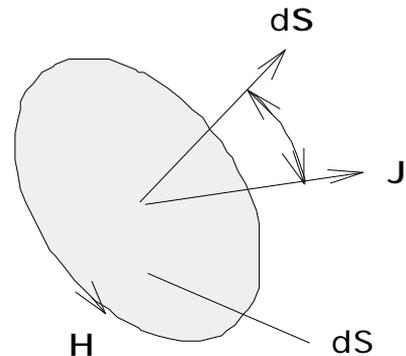


図2 電流と面積要素のベクトル内積。

それでは、左辺の計算はどうなるであろう。面積積分の範囲は右辺と左辺で同じであり、電流全体を取り囲むように積分範囲を定める。  $\text{rot}\mathbf{B}$   $d\mathbf{S}$  のベクトル演算を行うため、 $\mathbf{s}$  の  $(x, y, z)$  方向の正射影を  $(S_{yz}, S_{zx}, S_{xy})$  とする。一般的に積分を行う面は  $z = f(x, y)$  または  $x = g(y, z)$  なる式で記述される曲面を考え、これを取り囲む閉曲線を とする。  $(yz, zx, xy)$  は  $(x, y, z)$  方向の正射影である。磁場成分は、

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) &= B_x(x, y, f(x, y)) = \bar{B}_x(x, y) \\ B_y(x, y, z) &= B_y(x, y, f(x, y)) = \bar{B}_y(x, y) \\ B_z(x, y, z) &= B_z(g(y, z), y, z) = \bar{B}_z(y, z) \end{aligned} \quad (4)$$

であるので、その偏微分は

$$\frac{\partial \bar{B}_x}{\partial y} = \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} \quad (5)$$

で与えられる。これらを

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \left( \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial z} \right) \hat{x} \cdot \hat{n} dS + \int_S \left( \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial x} \right) \hat{y} \cdot \hat{n} dS + \int_S \left( \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial y} \right) \hat{z} \cdot \hat{n} dS \\ &= \int_S \left( \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial z} \hat{y} - \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial y} \hat{z} \right) \cdot \hat{n} dS + \int_S \left( \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial x} \hat{z} - \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial z} \hat{x} \right) \cdot \hat{n} dS + \int_S \left( \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} \hat{x} - \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial x} \hat{y} \right) \cdot \hat{n} dS \end{aligned} \quad (6)$$

に代入すれば、

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \left[ \left( \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{z} \right) \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial y} \hat{z} \right] \cdot \hat{n} dS \\ &\quad + \int_S \left[ \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial x} \hat{z} - \left( \hat{x} + \frac{\partial z}{\partial x} \hat{z} \right) \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial z} \right] \cdot \hat{n} dS + \int_S \left[ \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} \hat{x} - \left( \frac{\partial x}{\partial y} \hat{x} + \hat{y} \right) \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial x} \right] \cdot \hat{n} dS \end{aligned} \quad (7)$$

さらに、曲面上の点を与える位置ベクトル

$$\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = x\hat{x} + y\hat{y} + f(x, y)\hat{z} = g(y, z)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (8)$$

の偏微分

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{z}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \hat{x} + \frac{\partial z}{\partial x} \hat{z}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} \hat{x} + \hat{y} \quad (9)$$

は曲面の法線方向の単位ベクトル  $\hat{n}$  に対して垂直であるので、

$$\left( \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial y} \hat{z} \right) \cdot \hat{n} = \left( \hat{x} + \frac{\partial z}{\partial x} \hat{z} \right) \cdot \hat{n} = \left( \frac{\partial x}{\partial y} \hat{x} + \hat{y} \right) \cdot \hat{n} = 0 \quad (10)$$

が成立する。したがって、図3のように積分方向を考慮して符号に注意すれば

$$\int_S \text{rot}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial y} dx dy + \int_S \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial x} dx dy + \int_S \frac{\partial \bar{B}_z}{\partial y} dy dz = (\bar{B}_x dx + \bar{B}_y dy + \bar{B}_z dz) \quad (11)$$

すなわち、

$$\int_S \text{rot}\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (12)$$

これはベクトル演算におけるストークスの定理と呼ばれる関係である。

以上から得られる次式はアンペールの法則と呼ばれ、電流と磁場の関係を与える。

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (13)$$

電流  $I$  [A] が流れることにより、その周囲に磁場  $B$  [T] が現れることを示している。無限に長い直線状に電流が流れている電線の周りは磁性体が存在しない空間であるとすれば、図4の電線中心から半径  $R$  [m] の位置における磁場は簡単に計算できる。電流密度

を積分した後の全電流を  $I[A]$  として、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} [T] \tag{14}$$

ここで、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [V \cdot s / A \cdot m]$  は真空中の透磁率である。単位の換算は  $[T] = [V \cdot s / m^2]$  である。

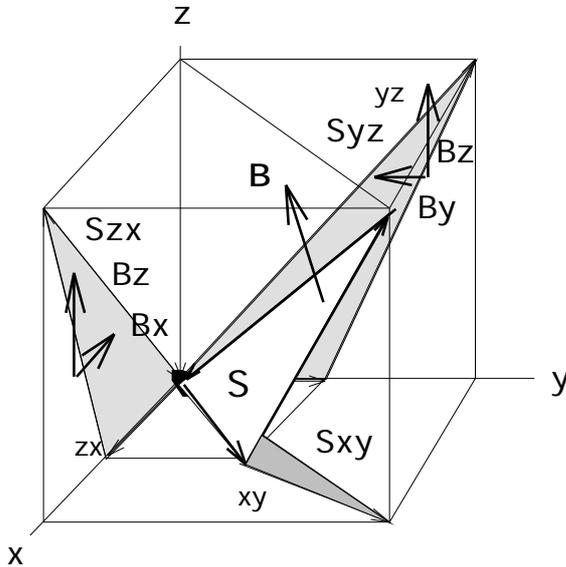


図3 面積積分と積分符号の関係。

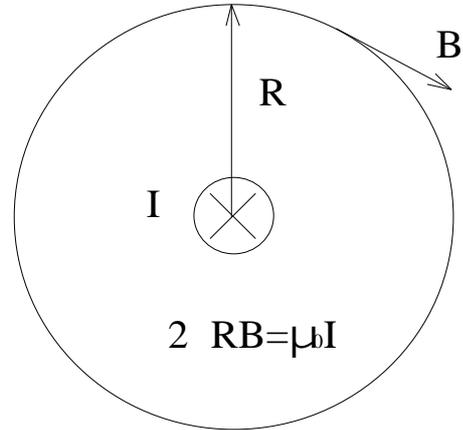


図4 空間における電流と磁場の関係  
(電流は紙面の表から裏に向かう)。

上の計算では無限に長い電線を仮定したので観測点に関して電線の配置が対称であり、磁場の計算は簡単にできた。それでは、幾何学的配置が非対称な有限の長さではどうなるであろうか。勿論、この場合も周りには磁性体は存在しないものとする。上の扱いは次に述べる一般的な場合の極限として与えられる。

電流は電線の中を運動する電子がもつ電荷の移動そのものである。電荷が存在すれば、それによる電場が当然のこととして発生しなければならない。上で仮定した閉曲面を横切る電流が存在しない場合 ( $J=0$ ) のときでも、電子のもつ点電荷から半径  $R$  の位置に発生する電場はガウスの定理により、

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r} \tag{15}$$

ここで、 $\hat{r}$  は半径方向の単位ベクトル、 $\epsilon_0$  は真空中の誘電率である。図5において点電荷  $q$  の進行方向に垂直な点  $P$  を通る円  $PQ$  までの点電荷からの距離を  $R$  とすれば、円  $PQ$

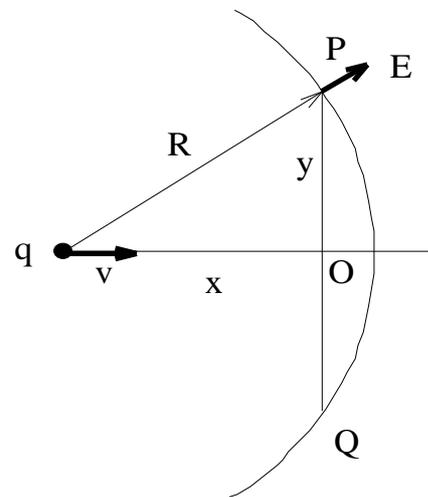


図5 点電荷による電束。

を見込む立体角 は、

$$= 2\pi(1 - \cos\theta) \quad (16)$$

円PQを貫く電気力線の数（電束） は  $q / 4\pi$  であるので、

$$= \frac{q}{2}(1 - \cos\theta) \quad (17)$$

電子は速度  $v$  で移動しているとして、電子の移動に伴い円PQを貫く電束の時間変化は

$$\dot{\cdot} = \frac{q}{2} \sin\theta \dot{\theta} = \frac{q(R^2 - x^2)v}{2R^3} = \frac{qy^2v}{2R^3} = \frac{qv \sin^3\theta}{2y} \quad (18)$$

ここで、 $\cos\theta = x/R$ の時間微分により得られる  $-\sin\theta \dot{\theta} = \frac{\dot{x}R^2}{R^3} - \frac{x^2\dot{x}}{R^3} = \frac{(R^2 - x^2)v}{R^3}$  の関係を

代入した。マクスウェル方程式の  $\dot{\cdot} = \int_S \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$  において  $\mathbf{J} = 0$  と置けば、

$$\dot{\cdot} = \int_{PQ} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi y H \quad (19)$$

の関係が成り立つので、

$$H = \frac{qv \sin^3\theta}{4\pi y^2} = \frac{qv \sin\theta}{4\pi R^2} \quad (20)$$

が得られる。これをベクトル表現に直せば、

$$\mathbf{H} = \frac{q(\mathbf{v} \times \mathbf{R})}{4\pi R^3} \quad (21)$$

または、微小電流要素からの寄与として表した式がビオ・サバールの法則

$$\delta \mathbf{H} = \frac{\delta \mathbf{I} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad \text{または} \quad \delta \mathbf{B} = \mu_0 \frac{\delta \mathbf{I} \times \mathbf{R}}{4\pi R^3} \quad (22)$$

である。これで図6の有限長電線による磁場計算ができる準備が整った。電流の方向を  $x$  軸の向きにとり、観測点  $P$  から  $x$  軸に下ろした交点を座標原点  $O$  とする。 $x$  の位置にある電流要素  $dx$  が作る  $P$  点の磁場  $dB$  は

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin\theta}{4\pi(x^2 + R^2)} dx, \quad \text{ただし} \quad \sin\theta = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \quad (23)$$

である。積分を  $x$  から  $\theta$  に関する積分に変換して実行すれば、

$$B = \int_{\theta_2}^{\pi - \theta_1} \frac{\mu_0 I \sin\theta}{4\pi R} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [-\cos\theta]_{\theta_2}^{\pi - \theta_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2) \quad (24)$$

が得られる。ここで、 $\pi - \theta_1$  と  $\theta_2$  は電線両端の点から観測点に引いた直線が  $x$  軸の正の方向となす角度である。これより無限長の直線状電線の場合は  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  であるので、 $B = \mu_0 I / 2\pi R$  となり、以前の結果と一致する。

この時点で頭の中が「!?!???」になった人の知性は正常である。異なるアプローチで同じ結果が得られる。「アンペールの法則とビオ・サバールの法則はどこに一致点があるのだろうか？」と疑問が湧いてきて至極当然である。一般化したアンペールの法

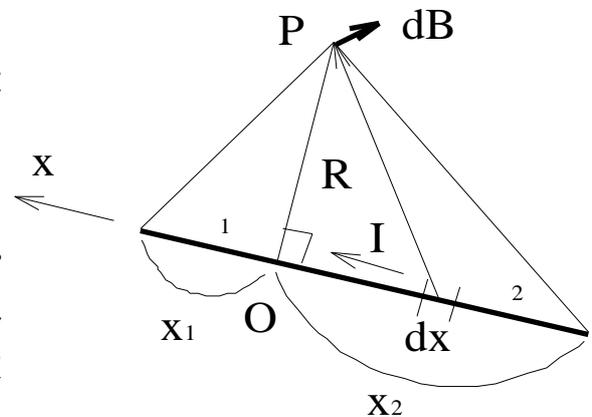


図6 有限長電線による磁場。

則は

$$\frac{\partial}{\partial t} + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (25)$$

である。は閉曲面 $S$ を貫く電束である。定常電流密度 $\mathbf{J}$ をゼロとして、 $\partial / \partial t = \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}$ の関係からビオ・サバルの法則が導かれた。この関係はファラデーの電磁誘導の法則 = 「磁場の変化が電場を誘導する」の逆の現象 = 「電場の変化が磁場を誘導する」を意味するもので、非定常電磁場に対して成立する。閉曲面を連続的に通過する電気量があるとき、図7のように電荷が閉曲面の裏から表へ移動する瞬間に電束が  $q/2$  から  $-q/2$  に  $-q$  だけ変化する。この不連続的变化を補正するものが閉曲面を横切る電流の寄与  $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$  である。定常電流を取り囲むような閉曲面で考えた法則が通常のアムペールの法則に他ならない。ビオ・サバルの法則はこのような閉曲面を考えないで、定常電流の場合にも適用できる一般的な関係を与えるものである。

ビオ・サバルの法則は電流要素ごとに磁場への寄与を計算できるので、周りに磁性体のない超伝導線の複雑な形状のコイルによる磁場を計算する場合に都合がよい。

次に、円筒の周りに電線を図8のように螺旋状に巻き付けた無限長ソレノイドの磁場はどうなるであろうか。単位長さあたりの巻数を  $N$  [turns/m] としよう。電線に流れる定常電流を  $I$  [A] とし、アンペールの法則を図の閉じた点線に沿って適用する。取り囲むソレノイドの長さを  $1$  m とすれば、取り囲まれる電流の積分値は  $NI$  [A] であるので、ソレノイド内の磁場は

$$B = \mu_0 NI \quad (26)$$

である。無限長ソレノイドでは磁束の返りは無視できるのでその外で磁場はゼロである。

ビオ・サバルの法則(21)からベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を導くことを考える。電流要素 $\delta\mathbf{I}$ は電流路の微小長さ $\delta l$ と電流の積であるので、電流を電流密度に置き換えて微小長さを微小体積要素に置き換えれば、

$$\delta\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta\mathbf{I} \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{R}}{R^3} \delta V(\mathbf{r}) \quad (26)$$

となる。さらに、 $(1/R)$ の勾配(grad)は

$$\frac{1}{R} = \frac{(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})}{R^2} = \frac{\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}}{R^2} = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (27)$$

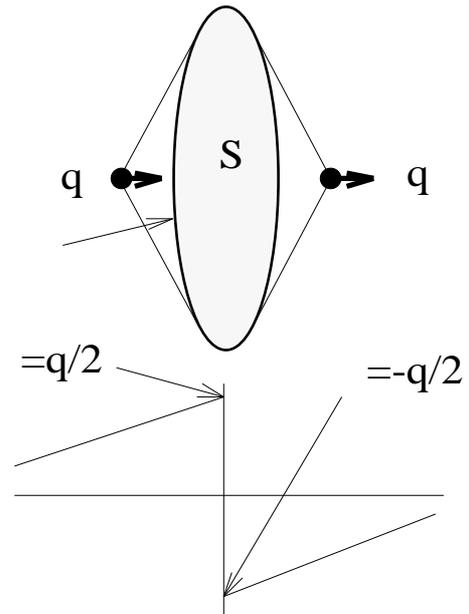


図7 立体角の変化。

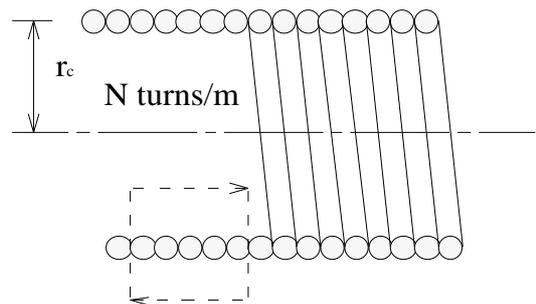


図8 無限長ソレノイド。

で表されるので、これを(26)に代入すれば、

$$\delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \frac{1}{R} \delta V(\mathbf{r}) \quad (28)$$

である。(28)にベクトル積の順序の入れ替え ( $\mathbf{J}(\mathbf{r}) \times = - \times \mathbf{J}(\mathbf{r})$ ) を施せば、

$$\delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})}{R} \delta V(\mathbf{r}) \quad (29)$$

この式を微分して を積分の外に出せば、

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})}{R} \delta V(\mathbf{r}) = \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})}{R} \delta V(\mathbf{r}) \times \mathbf{A} \quad (30)$$

となる。 $\mathbf{B} = \times \mathbf{A}$  であるから、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r})}{R} \delta V(\mathbf{r}) \quad (31)$$

すなわち、電流分布がわかればベクトルポテンシャルが計算できる。

例題として上で求めたベクトルポテンシャルを用いて磁場を求めてみよう。図9にしたがって、円柱座標  $(r, \theta, z) = (q, 0, a)$  の位置における磁場を計算する。電流は半径  $R$  の円筒面の微小要素  $Rd\theta dz$  に  $z$  方向の電流線密度  $I$  [A/m] を掛けたものが電流要素  $IRd\theta dz$  を与える。ソレノイドは  $z = z_1 \sim z_2$  の間にあり、電流線密度は一定とする。

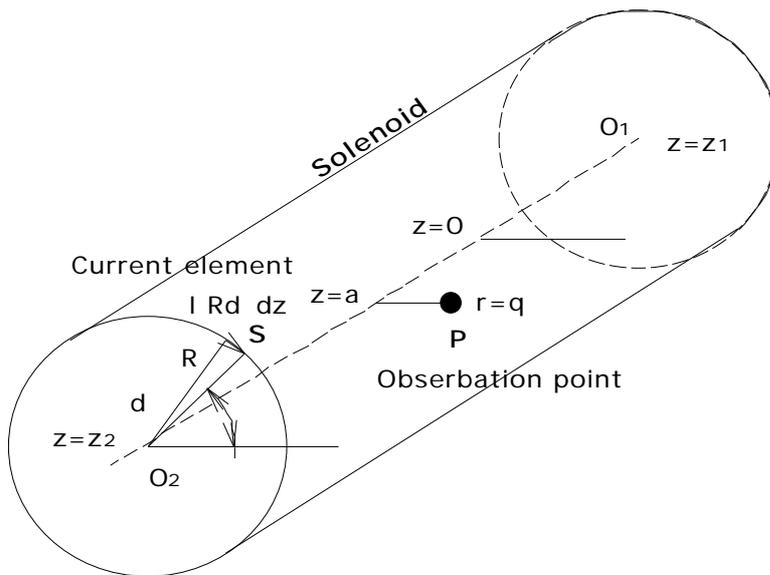


図9 ベクトルポテンシャルによる電流要素からの磁場計算。

電流要素の座標を  $(R, \theta, z)$  とすれば、ベクトルポテンシャルは(31)から、

$$A_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi d\theta \int_{z_1}^{z_2} \frac{R \cos\theta dz}{[(z-a)^2 + R^2 + q^2 - 2Rq \cos\theta]^{1/2}} \quad (32)$$

ここで、電流分布の対称性から  $\theta$  の積分範囲を  $[0, \pi]$  とした。打ち消されないで残る成分の一周に互る寄与は  $2 \cos\theta$  になる。また、電流が  $\theta$  方向の成分しか持たないので、ベクトルポテンシャルも  $\theta$  成分しか持たない。円柱座標系でベクトルポテンシャルから磁束密度を求める式

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}, \quad B_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}$$

から、 $\xi = z - a$  とおいて、

$$B_r(q, \theta, a) = \frac{\partial A_\theta}{\partial z} = \frac{\mu_0 IR}{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^\pi d\theta \int_{z_1}^{z_2} \frac{\cos\theta dz}{[(z-a)^2 + R^2 + q^2 - 2Rq\cos\theta]^{1/2}} \quad (33)$$

$$B_\theta = 0 \quad (34)$$

$$B_z(q, \theta, a) = \frac{\mu_0 IR}{2\pi q} \frac{\partial}{\partial q} \int_0^\pi d\theta \int_{z_1-a}^{z_2-a} \frac{q \cos\theta d\xi}{[\xi^2 + R^2 + q^2 - 2Rq\cos\theta]^{1/2}} \quad (35)$$

を得る。

このソレノイド磁場は放射光によって真空チェンバーから叩き出される光電子を上下方向に蹴とばすので、Bファクトリーで陽電子ビーム強度を妨げている電子雲の除去に利用される。

=====ここで、頭の体操 ( 5 ) =====

問題 1 ソレノイドが  $z = 0 \sim -$  にあるとき、(33) ~ (35)に相当する磁場の式を求めよ。

問題 2 (32)では円筒表面にシート状の一樣電流分布を仮定したが、シートに厚みのある場合のベクトルポテンシャルと磁場の式を考察せよ。

=====頭の体操終わり=====

## 2 . 電磁石を磁気回路として考える

今まで磁性体がない場合を扱ってきたが、磁性体があると非常に複雑になる。強磁性体は透磁率が大きく磁束を通しやすい性質をもつ材料である。このため強磁性体の形状に沿って磁束を誘導することができ、偏向磁場や収束 ( 4 極 ) 磁場を容易に発生できる。鉄は安価で大きな透磁率をもつので、電磁石材料として優れている。大きな透磁率をもつ磁性体を磁気回路に採用する理由は、磁束をその中に閉じ込めてギャップに強い磁場を発生させるためである。

電磁石はコイルからなる電気回路と磁束の通る磁気回路の組合せである。磁気回路は磁束を通しやすい鉄心部分と磁場を利用する空隙から構成され、電気回路の抵抗に相当する磁気抵抗を定義することができる。電気回路の電流路が導体内部に限られるのに対して、磁束の通る磁路は鉄心内部に限定されないで鉄心の外に漏れる。鉄心が飽和して磁気抵抗が増加すればこの漏れは大きくなるが、磁束密度が小さい場合は透磁率は非常に大きく磁束は鉄心内に限定されるものと仮定できる。しかし、空隙部分では透磁率は非常に小さく真空中の透磁率にほぼ等しい。透磁率が大きいところは磁気抵抗は小さく、逆に透磁率が小さければ磁気抵抗は大きい。一般に鉄の透磁率は真空中の透磁率  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [Wb/AT \ m] = 4\pi \times 10^{-7} [H/m]$  に対する比である比透磁率  $\mu_r$  で与えられる。すなわち、

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad \text{または} \quad \mu = \mu_0 \mu_r \quad (36)$$

鉄の透磁率が数1,000～数10,000といわれるのはこの比透磁率 $\mu_r$ である。空气中（真空中）の比透磁率は1である。

コイルに電流を流して起磁力を与えれば、磁束密度は

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H \quad (37)$$

である。すなわち、1 [AT/m] の磁場の強さを与えたとき真空中1 [m<sup>2</sup>] あたり通過する磁束が  $4\pi \times 10^{-7}$  [Wb/m<sup>2</sup> = T] である。

CGS単位系（ $H$ をOe、 $B$ をWb/m<sup>2</sup>）で表した場合、(37)の透磁率 $\mu$ は比透磁率に一致するので、比透磁率のことを単に透磁率ということもある。単位の換算は

$$1 \text{ AT/m} = 4\pi \times 10^{-3} \text{ Oe} \quad (38)$$

である。

まず、図10のような空隙のない磁気回路を考える。鉄心の断面積を $S$  [m<sup>2</sup>]、磁路長を $\ell$  [m]、コイルの巻数を $N$  [Turn]、電流を $I$  [A]とすれば、

$$B = \mu H, \quad H = \frac{NI}{\ell} \quad (39)$$

鉄心中を通る全磁束は

$$= BS [\text{Wb}] \quad (40)$$

である。ここで、

$$P = \frac{\mu S}{\ell} \quad (41)$$

なる量を導入して、これをパーミアンスという。パーミアンスの逆数が磁気抵抗 $Q$ またはリラクタンスである。

$$Q = \frac{\ell}{\mu S} \quad (42)$$

以上から、磁束は

$$= PNI = \frac{NI}{Q} [\text{Wb}] \quad (43)$$

となって、磁気抵抗が小さいほど磁束が大きい。電気回路における類似から

- |            |   |         |
|------------|---|---------|
| 起磁力 $NI$   | = | 起電力     |
| 磁束         | = | 電流      |
| 磁気抵抗 $Q$   | = | 電気抵抗    |
| パーミアンス $P$ | = | コンダクタンス |

と関連づけられる。

次に、図11のように空隙（ギャップ）のある場合、鉄心中の磁路長を $\ell$  [m]、空隙の磁路長を $g$  [m]とすれば、鉄心と空隙が直列をなしているので、鉄心部と空隙部の磁路断面積が同じとすれば、全磁気抵抗は各々の磁気抵抗 $Q_{iron} = \ell / \mu S$ と $Q_{air} = g / \mu_0 S$ の和で

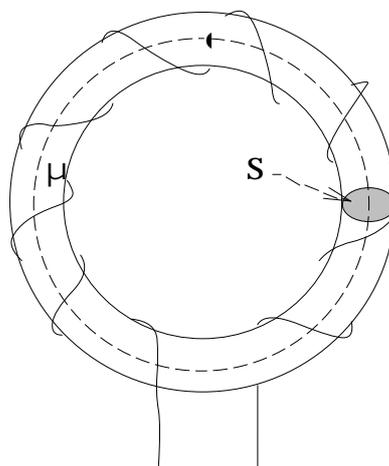


図10 空隙のない磁気回路。

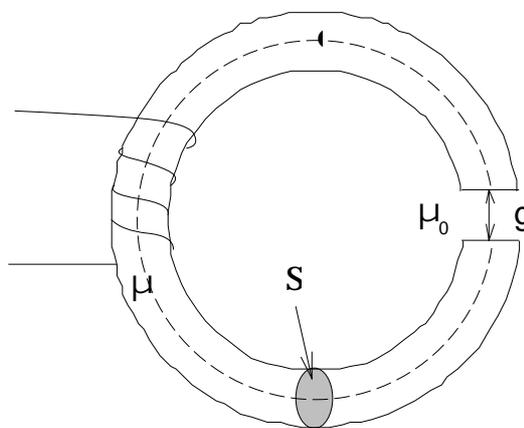


図11 空隙がある磁気回路。

与えられる。

$$Q = \frac{\ell}{\mu S} + \frac{g}{\mu_0 S} = Q_{iron} + Q_{air} \quad (44)$$

したがって、磁束は

$$= \frac{NI}{\ell/\mu S + g/\mu_0 S} = \frac{SNI}{\ell/\mu + g/\mu_0} \quad (45)$$

これより、

$$B = \frac{NI}{\ell/\mu + g/\mu_0} \quad \text{または} \quad H_{iron}\ell + H_{air}g = NI \quad (46)$$

が得られる。(46)の2番目の式はアンペールの法則そのものである。(44)において鉄心の磁気抵抗が小さい場合、

$$Q \approx \frac{g}{\mu_0 S} \quad (47)$$

となるので、(46)は

$$B \approx \frac{\mu_0 NI}{g} \quad (48)$$

のように近似できる。

さらに、図12のように2つの空隙が並列磁気回路をなす場合、左右の磁気回路の磁束を  $\phi_1$ 、 $\phi_2$  として、全磁束は

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (49)$$

左右の磁気回路の起磁力は

$$NI = \phi_1 \frac{g_1}{\mu_0 S_1} + \phi_1 \frac{\ell_1}{\mu_1 S_1} + \phi_3 \frac{\ell_3}{\mu_3 S_3} \quad (50)$$

$$NI = \phi_2 \frac{g_2}{\mu_0 S_2} + \phi_2 \frac{\ell_2}{\mu_2 S_2} + \phi_3 \frac{\ell_3}{\mu_3 S_3} \quad (51)$$

である。各並列磁気回路の磁気抵抗を

$$Q_1 = \frac{g_1}{\mu_0 S_1} + \frac{\ell_1}{\mu_1 S_1}, \quad Q_2 = \frac{g_2}{\mu_0 S_2} + \frac{\ell_2}{\mu_2 S_2}$$

と置けば、(50)、(51)から全磁気抵抗は

$$Q = \frac{1}{1/Q_1 + 1/Q_2} + \frac{\ell_3}{\mu_3 S_3}$$

すなわち、並列磁気回路の合成磁気抵抗  $Q_{1+2}$  は

$$\frac{1}{Q_{1+2}} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} \quad (52)$$

となり、電気回路における並列電気抵抗と同じ扱いができる。左右の磁路を通る磁束の比は(50)、(51)から、

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{g_2/\mu_0 S_2 + \ell_2/\mu_2 S_2}{g_1/\mu_0 S_1 + \ell_1/\mu_1 S_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

である。

飽和が無いとすれば鉄心の磁気抵抗は簡単に表せるが、空隙の磁気抵抗が大きいいためその磁路の断面積は鉄心の断面積とは異なる。空隙を各磁路要素に分解して、各々の要素に対するパーミアンスの計算式から磁気抵抗を求めて合成する方法がある。

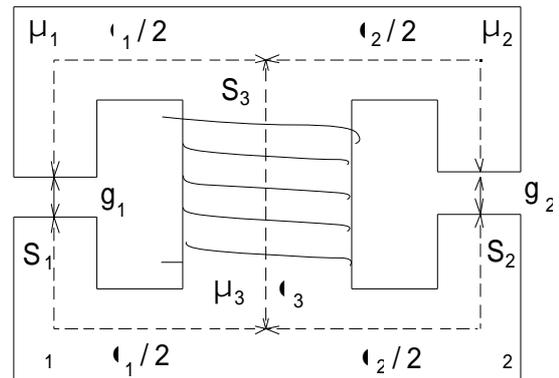


図12 並列磁気回路。

### 3. ソレノイド磁場の計算

#### 3.1 ソレノイドの半径方向磁場成分

この章の第1節に述べた図9のソレノイド磁場を計算して見よう。先ず半径方向を考える。

$$B_r(q, \theta, a) = \frac{\partial A_\theta}{\partial z} = \frac{\mu_0 IR}{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^\pi d\theta \int_{z_1}^{z_2} \frac{\cos\theta dz}{[(z-a)^2 + R^2 + q^2 - 2Rq\cos\theta]^{1/2}} \quad (33)$$

(33)をzに関して積分して、観測点Pにおけるz方向の座標 $a$ で微分する。そうすれば、

$$B_r(q, \theta, a) = \frac{\mu_0 IR}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos\theta d\theta}{[(z_2 - a)^2 + R^2 + q^2 - 2Rq\cos\theta]^{1/2}} - \int_0^\pi \frac{\cos\theta d\theta}{[(z_1 - a)^2 + R^2 + q^2 - 2Rq\cos\theta]^{1/2}}$$

となるので、簡略化するため

$$G(z, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos\theta d\theta}{[(z-a)^2 + R^2 + q^2 - 2Rq\cos\theta]^{1/2}} \quad (53)$$

と置く。さらに、 $y = \cos\frac{\theta}{2}$  置けば、

$$dy = -\frac{1}{2} \sin\frac{\theta}{2} d\theta, \quad d\theta = -2dy / \sqrt{1-y^2}$$

となるので、

$$G(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{(z-a)^2 + (R+q)^2}} \int_0^1 \frac{(2y^2-1)dy}{\sqrt{(1-y^2)[1-k^2y^2]}} \quad (54)$$

ここで、

$$k^2 = \frac{4Rq}{(z-a)^2 + (R+q)^2} \quad (55)$$

である。(54)の積分は第2種楕円積分であるので、

$$\int_0^1 \frac{(2y^2-1)dy}{\sqrt{(1-y^2)[1-k^2y^2]}} = \frac{2}{k^2} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad (56)$$

以上から、(33)は

$$\begin{aligned} \frac{\pi B_r(q, \theta, a)}{\mu_0 IR} &= G(z_2, \theta) - G(z_1, \theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(z_2-a)^2 + (R+q)^2}} \left[ \frac{2}{k_2^2} F\left(\frac{\pi}{2}, k_2\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, k_2\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, k_2\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{(z_1-a)^2 + (R+q)^2}} \left[ \frac{2}{k_1^2} F\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right) \right] \end{aligned} \quad (57)$$

ここで、

$$k_1^2 = \frac{4Rq}{(z_1-a)^2 + (R+q)^2} \quad (58)$$

$$k_2^2 = \frac{4Rq}{(z_2-a)^2 + (R+q)^2} \quad (59)$$

である。

(57)はMathematicaを利用して次のように計算することができる。計算の仮定として、ソレノイドの半径を $R=0.1\text{m}$ 、両端のz座標を $z_1=0.0\text{m}$ 、 $z_2=0.2\text{m}$ とした。Mathematicaの入

力は半径方向の座標を順に $r=0.00001, 0.03, 0.06, 0.09\text{m}$ とした。

```

r = 0.00001;
g1 = Plot[(2.0*(EllipticF[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.0 - z)^2 + (0.1 + r)^2)]
- EllipticE[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.0-z)^2+(0.1+r)^2)])*((0.0-z)^2+(0.1+r)^2)/(4.0*0.1*r)
- EllipticF[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.0-z)^2+(0.1+r)^2)]/((0.0-z)^2+(0.1+r)^2)^0.5
- (2.0*(EllipticF[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.2 - z)^2+(0.1+r)^2)]
- EllipticE[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.2 - z)^2+(0.1+r)^2)])*((0.2-z)^2+(0.1+r)^2)/(4.0*0.1*r)
- EllipticF[Pi/2.0,4.0*0.1*r/((0.2-z)^2+(0.1+r)^2)]/((0.2-z)^2+(0.1+r)^2)^0.5,{z,0.0,0.2}];
r = 0.03;
g2 = 上に同じ式;
r = 0.06;
g3 = 上に同じ式;
r = 0.09;
g4 = 上に同じ式;
Show[g1, g2, g3, g4]

```

縦軸を  $\pi B_r(q, \theta, a) / \mu_0 IR$  として、得られた結果は図 1 3 である。

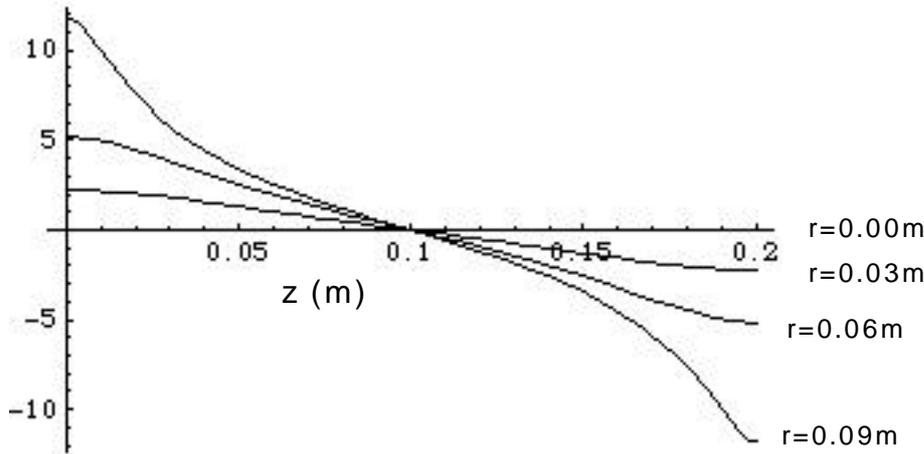


図 1 3 ソレノイドの半径方向磁場成分の z 方向磁場分布。

さらに、 $r$ 方向の分布については $z=0.00, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20\text{m}$ に対して、次のように入力する。

```

z = 0.00;
p1 = Plot[(2.0*(EllipticF[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.0 - z)^2 + (0.1 + r)^2)]
- EllipticE[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.0-z)^2+(0.1+r)^2)])*((0.0-z)^2+(0.1+r)^2)/(4.0*0.1*r)
- EllipticF[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.0-z)^2+(0.1+r)^2)]/((0.0-z)^2+(0.1+r)^2)^0.5
- (2.0*(EllipticF[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.2 - z)^2+(0.1+r)^2)]
- EllipticE[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.2 - z)^2+(0.1+r)^2)])*((0.2-z)^2+(0.1+r)^2)/(4.0*0.1*r)
- EllipticF[Pi/2.0,4.0*0.1*r/((0.2-z)^2+(0.1+r)^2)]/((0.2-z)^2+(0.1+r)^2)^0.5,{r,0.0001,0.1}];
z = 0.05;
p2 = 上に同じ式;
z = 0.10;
p3 = 上に同じ式;
z = 0.15;
p4 = 上に同じ式;
z = 0.20;

```

p5 = 上に同じ式;  
 Show[p1,p2,p3,p4,p5]

または、

```
Do[Plot[(2.0*(EllipticF[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.0 - z)^2 + (0.1 + r)^2)]
- EllipticE[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.0-z)^2+(0.1+r)^2)]*((0.0-z)^2+(0.1+r)^2)/(4.0*0.1*r)
- EllipticF[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.0-z)^2+(0.1+r)^2)]/((0.0-z)^2+(0.1+r)^2)^0.5
- (2.0*(EllipticF[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.2 - z)^2+(0.1+r)^2)]
- EllipticE[Pi/2.0, 4.0*0.1*r/((0.2 - z)^2+(0.1+r)^2)]*((0.2-z)^2+(0.1+r)^2)/(4.0*0.1*r)
- EllipticF[Pi/2.0,4.0*0.1*r/((0.2-z)^2+(0.1+r)^2)]/((0.2-z)^2+(0.1+r)^2)^0.5,{r,0.0001,0.1}],
{z,0.0,0.2,0.05}]
```

としてもよい。縦軸を  $\pi B_r(q, \theta, a) / \mu_0 IR$  として、得られた結果は図 1 4 である。

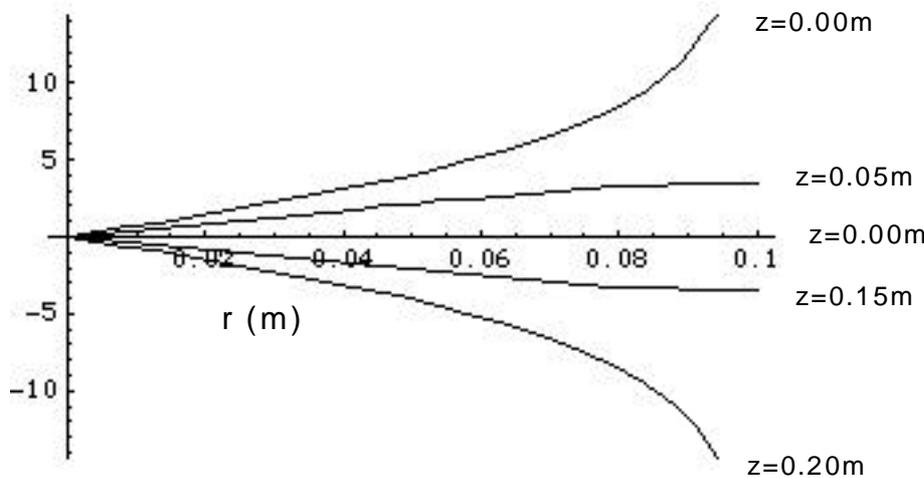


図 1 4 ソレノイドの半径方向磁場成分の r 方向磁場分布。

### 3.2 ソレノイドの軸方向磁場成分

z方向の磁場成分は、

$$B_z(q, \theta, a) = \frac{\mu_0 IR}{2\pi q} \frac{\partial}{\partial q} \int_0^\pi d\theta \int_{z_1-a}^{z_2-a} \frac{q \cos\theta d\xi}{[\xi^2 + R^2 + q^2 - 2Rq \cos\theta]^{1/2}} \quad (35)$$

ここで、 $\xi = z - a$ 、 $a$ と $q$ はそれぞれ磁場観測点のz座標とr座標である。z方向の磁場成分の計算は簡単ではないが、 $q$   $r$ と書き直して、

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\mu_0 IR} B_z &= \frac{1}{r} \int_0^\pi \cos\theta d\theta \int_{z_1-a}^{z_2-a} \frac{\xi^2 + R^2 - Rr \cos\theta}{(\xi^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta)^{3/2}} d\xi \\ &= \int_0^\pi \cos\theta d\theta \frac{(-r + R \cos\theta) \xi}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta)(\xi^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta)^{1/2}} + \frac{1}{q} I_F \Big|_{z_1-a}^{z_2-a} \quad (60) \end{aligned}$$

$$= Q(z_2 - a, r) - Q(z_1 - a, r) + R(z_2 - a, r) - R(z_1 - a, r)$$

ここで、

$$Q(z, r) = \int_0^\pi d\theta \frac{z \cos\theta (-r + R \cos\theta)}{(R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta)(z^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta)^{1/2}} \quad (61)$$

$$R(z,r) = \int_0^\pi d\theta \frac{\cos\theta}{r} \ln[2z + 2\sqrt{z^2 + R^2 + r^2} - 2Rr\cos\theta] \quad (62)$$

ある。

ソレノイド両端の座標を前節と同じく  $z_1 = 0.0 \text{ m}$ 、 $z_2 = 0.2 \text{ m}$  として、磁場観測点をソレノイドの中央 ( $a = 0.1 \text{ m}$ ) とし、ソレノイド半径を  $R = 0.1 \text{ m}$  とする。(60)の数値積分をMathematicaで計算させると非常に時間がかかるので、次のような簡単なFORTRANプログラムで計算する。さらに計算精度を上げるためには、シンプソンの積分公式を利用するとよい。

```

open(6,file='tint.out',status='unknown')
write(6,*)'  r (m)      2Pi*B/mu*I'
pi=3.141593
dpi=pi/1000.
RR=0.1 (solenoid rad.)
zz2=0.2 (solenoid z range)
zz1=0.0 (=zz1 zz2)
z0=0.1 (obs. point=a)
z2=zz2-z0
z1=zz1-z0
do 2 r=0.01,0.1,0.005
s=0.0
do 1 i=1,1000
a=dpi*real(i-1)
cc=cos(a)
ss=z2*cc*(-r+RR*cc)/(RR**2+r**2-2.*RR*r*cc)
> /sqrt(z2**2+RR**2+r**2-2.*RR*r*cc)
> -z1*cc*(-r+RR*cc)/(RR**2+r**2-2.*RR*r*cc)
> /sqrt(z1**2+RR**2+r**2-2.*RR*r*cc)
> +cc*log(2.*z2+2.*sqrt(z2**2+RR**2+r**2-2.*RR*r*cc))/r
> -cc*log(2.*z1+2.*sqrt(z1**2+RR**2+r**2-2.*RR*r*cc))/r
s=s+dpi*ss*0.1
1 continue
write(6,100) r,s
2 continue
100 format(1h ,f10.5,f12.6)
stop
end

```

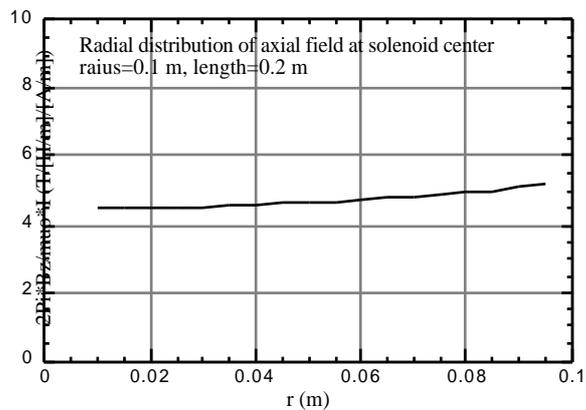


図 1 5 0.2mソレノイドの中心における軸方向磁場成分のr方向分布。

計算結果を図 1 5 (縦軸は  $2\pi B_z / \mu_0 I$ ) に示す。5000A/mの電流線密度で約50G程度の磁場が得られる。z0の値を変えてやればソレノイド内外の磁場分布が計算できる。また、zz1、zz2、RRを変えれば長さや半径の異なるソレノイド磁場が計算できる。

### 第3章 シンクロトロンと電磁石

シンクロトロンの電磁石構造は初期のころの機能結合型から、電磁石の担う偏向作用と収束作用を別々の電磁石で行う機能分離型へ進歩している。このような変化は加速器に要求される高いエネルギーを反映したものであるが、加速器の技術の進歩から可能になった。

#### 1 初期のシンクロトロン電磁石

原子核物理実験手段としての加速器のエネルギーは学問の進展に合わせて絶えず向上してきているが、1940年代の状況では1 GeV を越える加速器を如何に実現するかということが大きな課題であった。この頃の高いエネルギーの加速器といえば巨大な電磁石をもつシンクロサイクロトロン（1946年完成のバークレー910 MeV陽子、ずっと後になって1967年完成のレニングラード1 GeV陽子）である。このような高いエネルギーをサイクロトロンで実現するためには電磁石に使用される鉄の重量は膨大になり、これ以上のエネルギーをサイクロトロンに求めるのは経済的に不可能な状況であった。

1943年英国のバーミンガム大学のOliphantは電子や陽子を1 GeV以上に加速するシンクロトロンのアイデアをもっていたが、実際にシンクロトロンの建設が始まったのは1945年にMcMillanがシンクロトロンの位相安定性の理論を発表した後のことである。Birmingham (1.3 GeV、1953年完成)、BNL (3 GeV "Cosmotron"、1952年完成)、LBL (6 GeV "Bevatron"、1954年完成) において陽子シンクロトロンが相次いで建設された。

バーミンガムの1.3 GeV陽子シンクロトロンは原理を忠実に反映する設計がなされ、直線部の無いリング構造をしたものであった（図1および写真1）。電磁石断面はその後の弱集束シンクロトロンの形状をしているが、ビーム集束の考え方はサイクロトロンそのものであった。この電磁石のパラメータを表1に示す。電磁石は0.5インチ厚の0.1%低炭素鋼板を円周状に並べた構造でリング外側（開口部側）にはくさび状の隙間があり、この隙間を更に

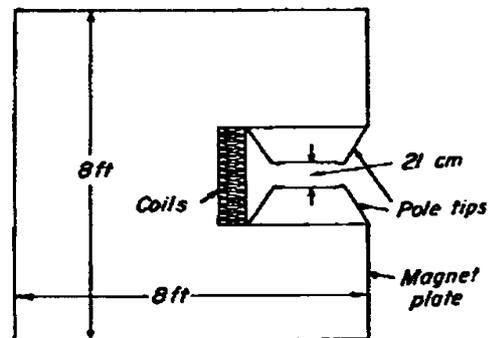
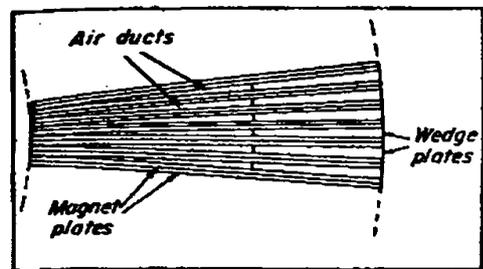


図1 バーミンガム1.3 GeV陽子シンクロトロン電磁石の構造

表1 バーミンガム陽子1.3 GeV 陽子シンクロトロン電磁石パラメータ

最大磁場	1.5 T
ギャップ	21 cm
アパーチャ	35 x 10 cm
電磁石半径	4.8 m
電磁石断面	2.4 x 2.4 m
重量	810 ton
最大電流	12,000 A

別のくさび型低炭素鋼板で埋めたものである。鉄心の上下前後のエッジ部が溶接された。コイルスロットと磁極は磁束変化による渦電流を避けるため溶接されていない。磁極は1/3インチ厚の軟鉄板で作られ、鉄板の間はペイントと紙で絶縁された。磁極間の組立精度は0.1 mmである。リング一周にわたってこの精度を達成するために水のレベルゲージと望遠鏡が使用された（測定精度は0.025 mm）。ヨーク側に残った隙間はコイルを空冷するための空気ダクトとして利用された。この電磁石の磁場指標 $n = -\rho(dB/dr)/B$ は0.7の「弱収束」加速器であった。

岩盤まで届くパイルの上に置かれたコンクリートの基礎の上に橋梁レールを敷き、その上に電磁石が組み立てられた。電磁石は温度変化による伸縮でレールの上をスライドするが、1方向に行き過ぎないように基礎の周りは補強コンクリートによるアンカーリングで取り囲まれた。

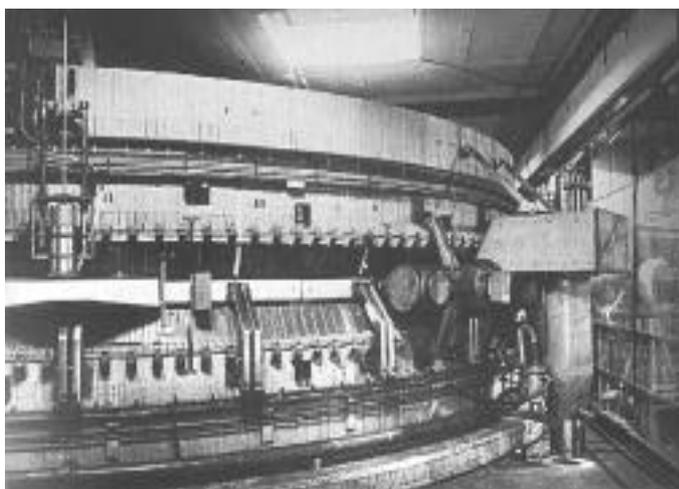


写真1 バーミンガム陽子シンクロトロン（1.3 GeV）。

このような用意周到な配慮がなされていたにも拘らず、コイルが電磁石の外側にリターンを持っていなかったために漏れ磁束が大きく溶接部分を渦電流が流れ、励磁を止めても長時間流れ続けた。このような問題は励磁サイクルを制御（10秒に1回励磁）することによって解決が図られた。

この他、弱収束に基づくシンクロトロンとしてRALのNimrod、ANLのZGSなどが建設された。弱収束シンクロトロンのビームアパーチャは非常に大きく、したがってこれらの加速器で作られた電磁石は巨大である。表2に弱収束電磁石のパラメータを示す。

表2 弱収束シンクロトロンの電磁石パラメータ

加速器	最大陽子 エネルギー (GeV)	軌道 半径 (m)	電磁石 重量 (ton)	最大 磁場 (T)	真空チェンバ 水平 x 垂直 (cm)
Birmingham	1.3	4.5	800	1.26	50 x 21
Cosmotron	3.0	9.14	1,650	1.38	91 x 22
Bevatron	6.2	15.24	9,700	1.54	122 x 30
ZGS	12.5	27.4	4,000	2.15	81 x 15
Nimrod	7.0	23.6	7,000	1.4	91 x 24
Synchro-phasotron	10.0	28.	36,000	1.3	150 x 40

## 2 機能結合型電磁石

弱収束シンクロトロンが建設中であった1949年に、アテネのChristofilosによって「強収束」の方法が考案され、1952年にはCourant, Livingston, Snyderによる論文が発表された。この方法はビームに収束力と発散力を交互に連続して及ぼすことにより全体として強い収束が得られるという原理に基づくものである。シンクロトロンの次のステップは、この強集束の原理の採用である。表2に示すようにこれ以前の弱集束の原理ではやはり電磁石重量が問題で、如何に経済的に高エネルギーシンクロトロンを建設するかに努力が注がれた。この直後に登場した電磁石が機能結合型である。

機能結合型 (combined function type) では偏向磁場と収束磁場を加算した磁場を1台の電磁石で実現しなければならないため、図2に示すように左側の合成磁場を発生させるために電磁石のギャップに変化をつけて、磁場が強い場所ほどギャップを狭くしなければならない。磁極面近傍の鉄心中では最小ギャップのところ磁場が最大になる。鉄心中の磁場が10kGを越えて20kGに近づくにつれて磁気的な飽和が大きくなる。すなわち透磁率が徐々に低下し、20kGを越えれば鉄の透磁率は空気に近い状態になる。鉄心中では透磁率の大きな場所ほど磁束が通りやすいので、鉄心中の部分的な透磁率の低下によってギャップ内の磁場が変化して望ましい磁場分布からズレることになる。このズレが軌道設計から許される値より大きくなれば最早、電磁石としての機能が損なわれる。言い換えれば、これが電磁石の使用限界である。機能結合型の電磁石では、収束磁場の磁場勾配が大きい程、偏向磁場が強い程、加速器の電磁石として使用できる範囲は狭くなる。

強収束に基づく軌道の安定性の研究は主にヨーロッパとアメリカで展開され、非線形磁場の影響、ミスアライメントの影響、製作誤差の影響などの解析や数値シミュレーションが行われた。米国コーネル大学では強収束電子シンクロトロンが建設されてこの原理が実証され、CERNの28 GeV-CPS (1959年完成) とBNLの33 GeV-AGS (1960年完成) が建設された。これらの加速器ではビームの偏向と収束を同じ電磁石で行う機能結合型と呼ばれるラティス構造が採用された。

しかし、この構造では収束のための4極磁場と偏向のための2極磁場を1台の電磁石

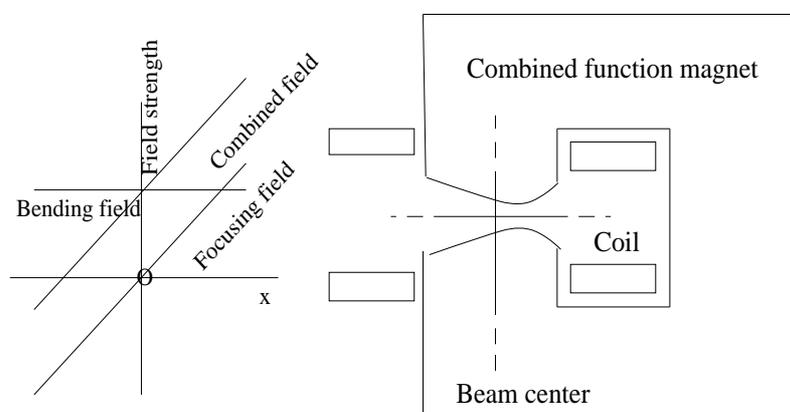


図2 機能結合型電磁石の磁場分布(左図)と形状(右図)。

に重畳させるため、利用できる偏向磁場および4極磁場の最大値が制限される。もし両者の機能が分離できるならば、それぞれ独立の電磁石で発生できるので、電磁石としての最大性能を発揮させることが可能になる。このようなラティス構造が次に述べる機能分離型 (seperated function type) である。

### 3 機能分離型シンクロトロン

BNLとCERNで陽子シンクロトロンがまだ設計段階にあった頃、Whiteの率いるPrinceton大学では機能分離型の設計を進め、その理論的な研究から機能結合型と本質的なオプティクス (軌道光学) の相違が無いことが確認された。この成果は後にWilson指導のもとでFermilabに機能分離型500GeV陽子シンクロトロン (1971年完成) が建設される基になった。機能分離型ラティス構造を採用することにより偏向と収束を別々の電磁石で行うために設置スペースが増えるが、それぞれの電磁石の機能が十分発揮されるので大型の加速器では有利である。Fermilab以来、高エネルギー加速器はKEK-PSも含めて機能分離型構造で設計されるようになった (KEKの前身であった素粒子研究所準備室においては42GeV陽子シンクロトロンを建設すべく機能結合型の電磁石が検討されていた)。

過去に日本で設計された電磁石で、ラティス構造の違いによる電磁石の発生できる磁場強度を表3に示す。機能結合型ではアパーチャ端における許容最大磁場により偏向磁場、磁場勾配ともに制限される。また、表4に代表的な強収束陽子シンクロトロンの電磁石についてパラメータを示す。

機能分離型電磁石では、図3に示すように偏向磁場と収束磁場を異なる電磁石 (偏向電磁石と4極電磁石) で発生させるため、それぞれの電磁石の鉄心に許される最大磁場まで磁場を上げることが可能になる。このため、機能結合型に比べて、偏向磁場はより強く、磁場勾配はより大きくできるので電磁石としての使用範囲が広がる。

表3 ラティス構造の違いによる電磁石の発生できる磁場強度  
(機能結合型は素粒子研究所準備室で検討されていた42 GeV陽子シンクロトロン計画の設計値、機能分離型はKEK-PSの12 GeVにおける設計値である)

ラティス構造	機能結合型 (42 GeV素研計画)	機能分離型 (KEK-PS)	
平均リング半径 (m)	202	54.0	
曲率半径 (m)	120	24.6	
電磁石	C型	C型	4極
アパーチャ 水平 (cm)	±8.0	±7.0	±7.0
アパーチャ 垂直 (cm)	±4.0	±2.5	±2.7 cm
中心軌道の			ポアー直径
ギャップ (cm)	8.5	5.6	10
中心偏向磁場 (T)	1.2	1.75	
と勾配 (T/m)	4.0	18	

表4 強収束陽子シンクロトロンの電磁石

	エネルギー (GeV)	n値	平均 半径 (m)	アパー チャ HxV(cm)	電磁石 全重量 (ton)	機能 結合 /分離
CPS	28	288	100	14.5x7	3,600	結合
AGS	30	357	128.5	15x7	4,000	結合
FNAL	500	10400	748	13x5	10,000	分離
SPS	500	7000	741	12x5	20,000	分離
KEK-PS	12	253	54	14x5	1,000	分離
TRISTAN*	35	8000	480	9x5	5,000	分離

\*) TRISTANは電子・陽電子蓄積衝突型加速器である(参考)。

機能分離型を採用することによって、強い偏向磁場で軌道半径を小さく、大きな磁場勾配でビームサイズを小さくすることができる。これらの利点によって電磁石の小型化と同時に加速器リングの小型化も可能になり、高いエネルギーのビームをより経済的に達成できるので、大型の加速器ではもっぱら機能分離型電磁石が採用される。

図3の上図は偏向電磁石断面とその磁場分布、下図は収束用の4極電磁石断面とその磁場分布である。理想的な偏向電磁石では垂直方向(y軸方向)に磁場は一様で、横方向(x軸方向)の磁場はゼロである。4極電磁石の場合、x軸方向にもy軸方向にも磁場勾配は一定である。偏向磁場または4極磁場が加速器として使用できる領域をuseful regionまたはapertureと言う。電磁石製作の上で軌道設計から要求され、この領域を下回ってはならない。要求より狭ければ、ビーム損失のため十分なビーム強度が得られない。

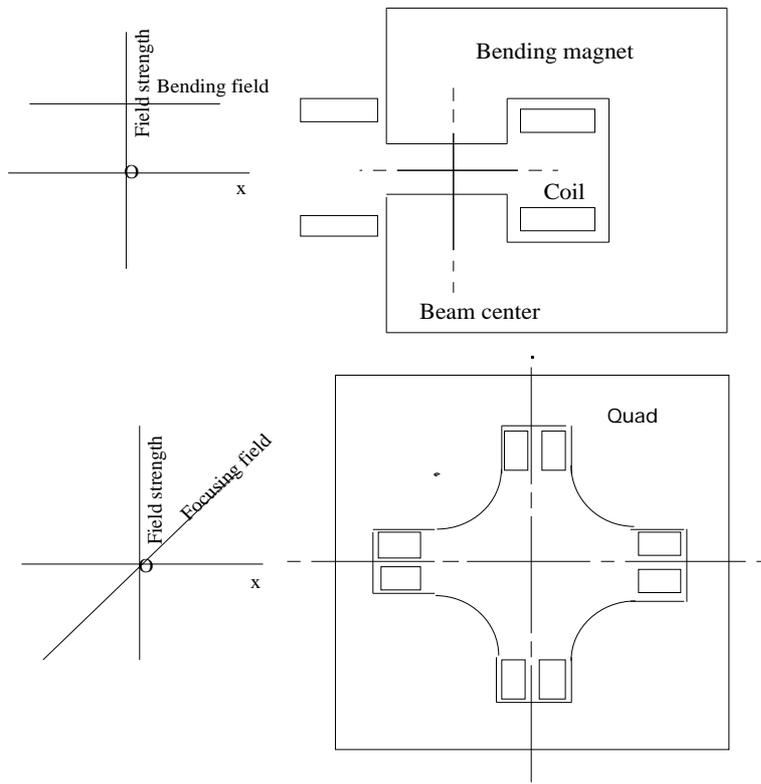


図3 機能分離型電磁石としての偏向電磁石(上図)と4極電磁石(下図)。

表2と表4を比べて見れば電磁石に使用された鉄の重量の著しい違いがわかる。加速エネルギーが飛躍的に増加しているにもかかわらず鉄重量は激減している。強集束の原理により電磁石が非常に小型になったことは、ビームに許される有効磁場領域（アパーチャー）も小さくなったことを意味し、ビームが中心軌道から大きくズレてはいけない。すなわち、有効磁場領域内における磁場精度が厳しく求められ、許容できる不整磁場は極めて小さい。さらに、電磁石のミスアライメントもビームから見れば不整磁場として感じるのので、その設置精度も厳しく求められることになった。

#### 4. リングにおける電磁石の配列

それでは、強集束シンクロトロンリング全体の構造を見てみよう。図4は簡略化されたリングで、ビーム軌道を安定化させる上で同じ電磁石の配列が規則的に繰り返される構成になっている。この周期構造には短い範囲で繰り返されるセル（cell）構造と、複数のセルを一纏めにして繰り返される超周期構造（superperiod）がある。超周期構造の中に含まれるセルには規則性から外れるものを含めてもよい。これはビーム軌道設計の上で、例えばビームの入射や取出のために長い直線部を設けたり、衝突リングのビーム交差点でビームサイズを小さくするための実験直線部を設けるなど、の特殊な要求を満たすためである。

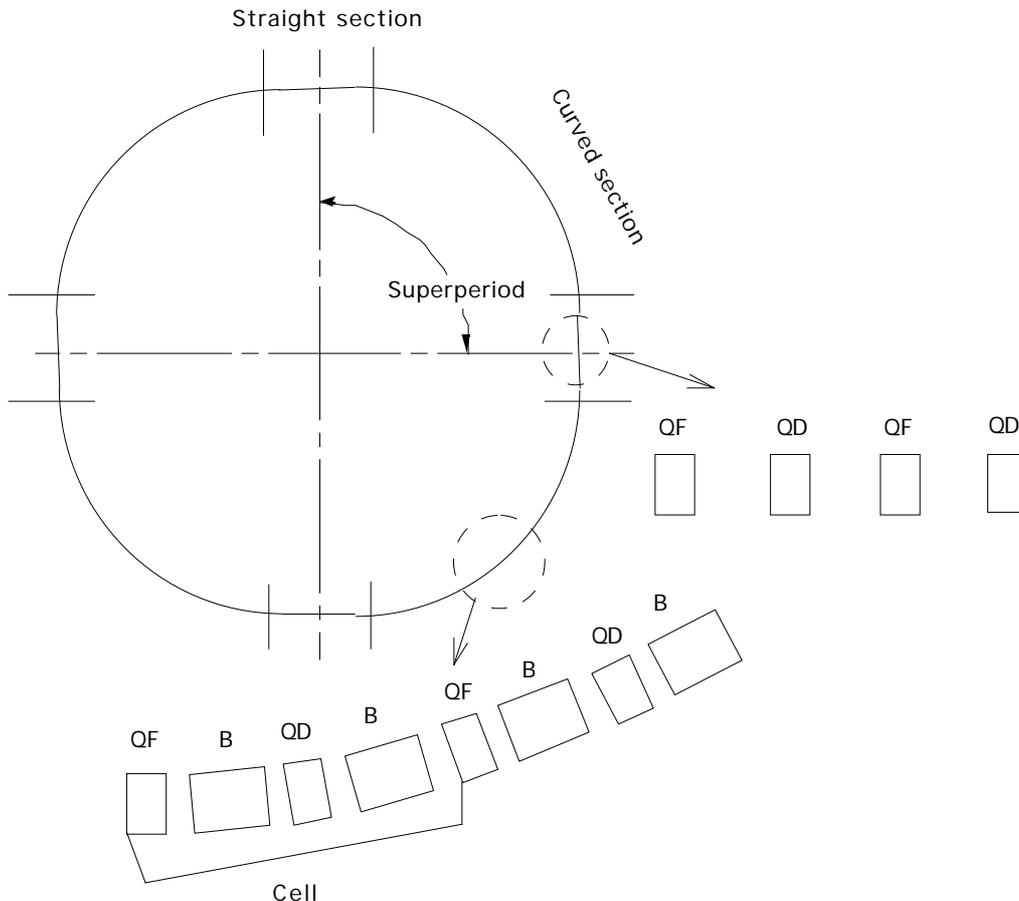


図4 シンクロトロンリング全体の構造。

6 極電磁石やステアリング電磁石はセルの中にある短い直線部に配置される。これら補正電磁石は補正に必要な磁場強度があればよいので比較的小型の電磁石である。図4の4極電磁石(収束用のQF, 発散用のQD)はQFとQDが交互に並んでいるので、偏向電磁石のBと短い直線部を一緒にして直線部"O"と見なしてFODOラティス(FODOをフォドと読む)と呼ばれる。これはビーム光学上、偏向電磁石の収束への寄与が小さいためである。高エネルギー物理実験のシンクロトロンでは一般にFODOラティスが採用される。その理由はビームのエミッタンスが大きくなると、リング上に電磁石を密に並べることができるため高エネルギーの加速器に向いているからである。

ラティスの構成に関して、放射光を利用する立場から、電子ビームまたは陽電子ビームが軌道を曲げられるときに発生する放射光の輝度を強くするためにビームのエミッタンスが小さい特殊なラティスが必要である。話の発端はBNLで放射光リングの設計を行っていたChasmanとGreenがFDBFBDFOラテスで直線部"O"の分散関数がゼロにできることを発見し、Chasman-Greenラティスとして注目されたことにある。分散のない直線部にウイグラ電磁石やアンジュレータなどの挿入光源を入れれば、周回ビームには殆ど影響を与えることなく、小さなスポットの強い光が得られる。光が強いことは非常に短い時間内で試料の解析ができることを意味し、他の実験手段では不可能な時々刻々と変化する試料の動的解析ができることによる大きなメリットが得られる。

Chasman-Greenラティスに刺激されて、種々のチューニングの容易なラティスが考案された。代表的なものにBFDFBOがある。このようなラティスでリングを構成すれば、すべての直線部に挿入光源を入れることが可能になり、高輝度光を必要とする多くの実験を同時に行うことができる。

#### 4.1 電磁石の伝達マトリックス (transfer matrix)

中心ビーム軌道に関する横方向のビームの位置と中心軌道からの傾き角は伝達マトリックスを利用することにより簡単に計算できる。横方向はビームの進行方向に垂直な方向を表し、水平方向と垂直方向の2つの方向に分けられる。すなわち、横方向のビームの運動は4次元ベクトル  $(x, x', y, y')$  で記述される。ここで、 $x$ と $y$ はビーム中心軸からの距離、 $x'$ と $y'$ はビーム中心軸に対するビームの傾き角である。伝達マトリックスを通過することによる4次元ベクトルの変化を計算すれば、リング一周にわたるビームの軌道が得られる。

伝達マトリックスはすでに前の章で導いたので各電磁石の強さ、長さ、ビームのエネルギーを指定すれば簡単に求めることができる。

#### 4.2 磁場とビーム軌道の安定条件

前の章で導いた水平および垂直方向の荷電粒子の運動方程式を思い出して、

$$\text{水平方向} \quad x' = -\frac{1-n}{\rho^2} x \quad (1)$$

$$\text{垂直方向} \quad y' = -\frac{n}{\rho^2} y \quad (2)$$

ここで、 $\rho [m] = 3.3356p [GeV/c] / B [T]$ 、 $n = -\rho (dB/dx) / B_{0y}$ である。シンクロトロンは一周すれば元にもどるので、(1)と(2)に現れる $\rho(s)$ と $n(s)$ は縦方向の座標の関数であり、周期的である。(1)と(2)は数学的に同じ形をしていて、周期的な係数を持ち、 $x$ と $y$ の1次の導関数をもたない2階の線形微分方程式である。このような方程式をHill方程式と呼び、水平、垂直方向の運動方程式を統一的に、

$$z' = -K(s)z \tag{3}$$

と表すことにする。リングの周長を $C$ とするとき、係数の周期性から

$$K(s + C) = K(s) \tag{4}$$

が成立する。2階微分方程式の解として、やはり前の章で説明した方法に従うことにすれば、

$$z(s) = C(s)z(0) + S(s)z'(0) \tag{5}$$

$$z'(s) = C'(s)z(0) + S'(s)z'(0) \tag{6}$$

であった。

(5)、(6)を

$$\begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} \tag{7}$$

のようにまとめて表すことができる。このマトリックス表現をよく眺めてみれば、伝達マトリックスは $C(s), C'(s), S(s), S'(s)$ の係数だけから構成され、 $\rho(s)$ と $n(s)$ が一定とみなせる区間毎にこのマトリックスが計算できる。一つのマトリックスの入口で軌道の初期値 $z(s_0), z'(s_0)$ を与えれば、出口の軌道 $z(s_1), z'(s_1)$ は直ちに計算できる。今度は出口の軌道を初期値にして次のマトリックスの出口の軌道を求めることができる。すなわち、

$$\begin{pmatrix} z(s_1) \\ z'(s_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s_1 | s_0) & S(s_1 | s_0) \\ C'(s_1 | s_0) & S'(s_1 | s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(s_0) \\ z'(s_0) \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} z(s_2) \\ z'(s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s_2 | s_1) & S(s_2 | s_1) \\ C'(s_2 | s_1) & S'(s_2 | s_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(s_1) \\ z'(s_1) \end{pmatrix} \tag{9}$$

.....

のように次々と同じ操作をすべての区間について適用できる。(8)と(9)をまとめて、

$$\begin{pmatrix} z(s_2) \\ z'(s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s_2 | s_0) & S(s_2 | s_0) \\ C'(s_2 | s_0) & S'(s_2 | s_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(s_0) \\ z'(s_0) \end{pmatrix} \tag{10}$$

ただし、

$$\begin{pmatrix} C(s_2 | s_0) & S(s_2 | s_0) \\ C'(s_2 | s_0) & S'(s_2 | s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(s_2 | s_1) & S(s_2 | s_1) & C(s_1 | s_0) & S(s_1 | s_0) \\ C'(s_2 | s_1) & S'(s_2 | s_1) & C'(s_1 | s_0) & S'(s_1 | s_0) \end{pmatrix} \tag{11}$$

(11)のように各区間のマトリックスをリング全周について掛け合わせて、一周の伝達マトリックスを求めることができる。 $j$ 区間 ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) の伝達マトリックスを

$$M_j = \begin{pmatrix} C(s_j | s_{j-1}) & S(s_j | s_{j-1}) \\ C'(s_j | s_{j-1}) & S'(s_j | s_{j-1}) \end{pmatrix} \tag{12}$$

と表せば、一周の伝達マトリックスは

$$M = M_n M_{n-1} \dots M_2 M_1 \quad (13)$$

となつて、ビームがリングを一周した後の軌道は

$$\begin{pmatrix} z(C) \\ z'(C) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} z(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} \quad (14)$$

である。ここで、

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (15)$$

とおく。N周回した後の軌道は、

$$\begin{pmatrix} z(NC) \\ z'(NC) \end{pmatrix} = M^N \begin{pmatrix} z(0) \\ z'(0) \end{pmatrix} \quad (16)$$

で与えられる。すなわち、N のようにリングを無限回転した後も軌道が安定であるためには

$$M^N \text{ 有限} \quad (17)$$

になる必要がある。(12)の伝達マトリックスの性質として

$$C(s)S'(s) - C'(s)S(s) = 1 \quad (18)$$

となることは、(3)式に減衰項がないことから分かるが、前の章にもどつてマトリックス要素を代入して確かめてもよい。(Mとしてリング一周の伝達マトリックスを仮定しているが、N個の超周期構造がある場合には1つの超周期構造の伝達マトリックスをMとしてもよい。この場合の一周の伝達マトリックスはM<sup>N</sup>である)。

一周の伝達マトリックスMの性質を調べるため、その固有値λを求めてみよう。固有ベクトルをZとすれば、

$$MZ = \lambda Z \quad (19)$$

から、特性方程式

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

が得られるので、(18)を考慮して

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + 1 = 0 \quad (21)$$

を解けばよい。素直に解を求めると

$$\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2} \quad (22)$$

である。もし、|a+d| > 2であれば、n周回後にはλ<sup>n</sup> となつてビームが発散してしまうので、軌道が安定であるためには|a+d| ≤ 2でなければならない。ここで、

$$a+d = 2\cos\mu \quad (23)$$

なる置き換えを行えば、固有値は複素数で表され

$$\lambda = \cos\mu \pm i\sin\mu = e^{\pm i\mu} \quad (24)$$

となつて見通しがよくなる。(23)は伝達マトリックスMの跡(trace、トレース)を表し、

$$Tr(M) = a+d = 2\cos\mu \quad (25)$$

である。この関係はビームのベータトロン運動における位相の進みμを表す。この式から直接μを求めても2πの整数倍の不確定があるためベータトロン振動数は得られない。

前の章で求めた機能結合型電磁石の伝達マトリックスは

$$\text{集束 } M_F = \begin{pmatrix} \cos \zeta & \frac{\sin \zeta}{K^{1/2}} \\ -K^{1/2} \sin \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\text{発散 } M_D = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & \frac{\sinh \zeta}{K^{1/2}} \\ K^{1/2} \sinh \zeta & \cosh \zeta \end{pmatrix} \quad (27)$$

ただし、

$$\text{水平面で集束 } K = \frac{|n|+1}{\rho^2}, \quad \text{水平面で発散 } K = \frac{|n|-1}{\rho^2}$$

$$\text{垂直面で集束 } K = \frac{|n|}{\rho^2}, \quad \text{垂直面で発散 } K = \frac{|n|}{\rho^2}$$

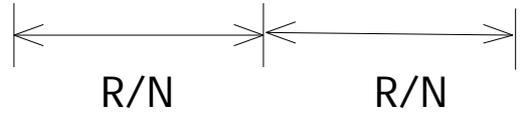
$$\zeta = \ell \sqrt{K}, \quad \ell = \text{電磁石長}$$

である。最も簡単な  $N$  個のセルからなる半径  $R = \rho$  の仮想リングを仮定して、1つのセルが図5のように直線部ない集束と発散の機能結合型電磁石から構成されているとしよう。

各電磁石の磁場指標を

$$n = -n_1, \quad 0 \leq s \leq \frac{\pi R}{N}$$

$$n = n_2, \quad \frac{\pi R}{N} \leq s \leq \frac{2\pi R}{N}$$



とする。QF、QDの中での水平方向の位相の進みをそれぞれ  $\zeta_F$ 、 $\zeta_D$  とすれば、

$$\zeta_F = \frac{\pi \sqrt{n_1+1}}{N}, \quad \zeta_D = \frac{\pi \sqrt{n_2-1}}{N} \quad (28)$$

図5 仮想リングの1セル構成。

である。ただし、 $2N\ell = 2\pi R = 2\pi\rho$  である。1セルの水平方向の伝達マトリックスは

$$M_{hor} = M_{horD} M_{horF} = \begin{pmatrix} \cosh \zeta_D & \frac{\rho \sinh \zeta_D}{\sqrt{n_2-1}} & \cos \zeta_F & \frac{\rho \sin \zeta_F}{\sqrt{n_1+1}} \\ \frac{\sqrt{n_2-1}}{\rho} \sinh \zeta_D & \cosh \zeta_D & -\frac{\sqrt{n_1+1}}{\rho} \sin \zeta_F & \cos \zeta_F \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$M_{hor} = \begin{pmatrix} \cos \zeta_F \cosh \zeta_D - \sqrt{\frac{n_1+1}{n_2-1}} \sin \zeta_F \sinh \zeta_D & \frac{\rho}{\sqrt{n_1+1}} \sin \zeta_F \cosh \zeta_D + \frac{\rho}{\sqrt{n_2-1}} \cos \zeta_F \sinh \zeta_D \\ \frac{\sqrt{n_2-1}}{\rho} \cos \zeta_F \sinh \zeta_D - \frac{\sqrt{n_1+1}}{\rho} \sin \zeta_F \cosh \zeta_D & \cos \zeta_F \cosh \zeta_D + \sqrt{\frac{n_2-1}{n_1+1}} \sin \zeta_F \sinh \zeta_D \end{pmatrix} \quad (29)$$

これより1セルあたりの水平方向の位相の進みを  $\mu_x$  とすれば、

$$\cos \mu_x = \cos \zeta_F \cosh \zeta_D - \frac{2 + n_1 - n_2}{2\sqrt{(n_1+1)(n_2-1)}} \sin \zeta_F \sinh \zeta_D \quad (30)$$

となる。

1セルの垂直方向の伝達マトリックスは

$$M_{ver} = M_{verF} M_{verD} = \begin{pmatrix} \cos \zeta_F & \frac{\rho \sin \zeta_F}{\sqrt{n_1}} & \cosh \zeta_D & \frac{\rho \sinh \zeta_D}{\sqrt{n_2}} \\ -\frac{\sqrt{n_1}}{\rho} \sin \zeta_F & \cos \zeta_F & \frac{\sqrt{n_2}}{\rho} \sinh \zeta_D & \cosh \zeta_D \end{pmatrix}$$

すなわち、

$$M_{ver} = \begin{pmatrix} \cos \zeta_F \cosh \zeta_D + \sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \sin \zeta_F \sinh \zeta_D & \frac{\rho}{\sqrt{n_1}} \sin \zeta_F \cosh \zeta_D + \frac{\rho}{\sqrt{n_2}} \cos \zeta_F \sinh \zeta_D \\ \frac{\sqrt{n_2}}{\rho} \cos \zeta_F \sinh \zeta_D - \frac{\sqrt{n_1}}{\rho} \sin \zeta_F \cosh \zeta_D & \cos \zeta_F \cosh \zeta_D - \sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \sin \zeta_F \sinh \zeta_D \end{pmatrix} \quad (31)$$

ただし、

$$\zeta_F = \frac{\pi \sqrt{n_1}}{N}, \quad \zeta_D = \frac{\pi \sqrt{n_2}}{N} \quad (32)$$

である。これより 1 セルあたりの垂直方向の位相の進みを  $\mu_y$  とすれば、

$$\cos \mu_y = \cos \zeta_F \cosh \zeta_D - \frac{n_1 - n_2}{2\sqrt{n_1 n_2}} \sin \zeta_F \sinh \zeta_D \quad (33)$$

である。

強集束のシンクロトロンでは  $n_1, n_2 \gg 1$  が成立するので、(30)は(33)と同じ形の式で近似できる。ここで、"Mathematica"に登場願おう。"Mathematica"を起動して次のように入力すれば、 $\cos \mu_x = \pm 1$  と  $\cos \mu_y = \pm 1$  の 4 本の曲線が立ち所にプロットされる (図 6)。

```
<< Graphics`ImplicitPlot`
g1 = ImplicitPlot[
  Cos[Pi*Sqrt[x]]*Cosh[Pi*Sqrt[y]] - (x - y)/2./Sqrt[x*y]*Sin[Pi*Sqrt[x]]*
  Sinh[Pi*Sqrt[y]] == 1.0, {x, 0.01, 0.4}, {y, 0.01, 0.4}];
g2 = ImplicitPlot[
  Cos[Pi*Sqrt[x]]*Cosh[Pi*Sqrt[y]] - (x - y)/2./Sqrt[x*y]*Sin[Pi*Sqrt[x]]*
  Sinh[Pi*Sqrt[y]] == -1.0, {x, 0.01, 0.4}, {y, 0.01, 0.4}];
g3 = ImplicitPlot[
  Cos[Pi*Sqrt[y]]*Cosh[Pi*Sqrt[x]] - (y - x)/2./Sqrt[x*y]*Sin[Pi*Sqrt[y]]*
  Sinh[Pi*Sqrt[x]] == 1.0, {x, 0.01, 0.4}, {y, 0.01, 0.4}];
g4 = ImplicitPlot[
  Cos[Pi*Sqrt[y]]*Cosh[Pi*Sqrt[x]] - (y - x)/2./Sqrt[x*y]*Sin[Pi*Sqrt[y]]*
  Sinh[Pi*Sqrt[x]] == -1.0, {x, 0.01, 0.4}, {y, 0.01, 0.4}];
Show[g1, g2, g3, g4]
```

"Mathematica"のすごいところは、指定した  $x$ 、 $y$  の範囲 (ここでは、 $0.01 < x < 0.4$ 、 $0.01 < y < 0.4$ ) で  $\cos \mu_x = \pm 1$  と  $\cos \mu_y = \pm 1$  が成立する  $(x, y)$  の組を短時間 (1 分以内) に探してプロットしてくれる点にある。図 6 のように 4 本の曲線で囲まれた領域が

$$-1 < \cos \mu_x < 1 \quad \text{および} \quad -1 < \cos \mu_y < 1$$

がともに成立する領域である。すなわち、ビームがリング内に安定に留まる領域である。この安定領域の形状がネクタイに似ているところから、ネクタイダイヤグラムと呼ばれる。縦軸と横軸は  $n_1/N^2$  と  $n_2/N^2$  である。これらの値は磁場勾配から決まるので、図6に当てはめてみれば安定であるかどうか分かる。しかし、図6の領域の中にビームのベータatron運動の共鳴線（水平および垂直方向のベータatron振動数が、整数、半整数、 $1/3$ 整数、 $1/4$ 整数になる線）が縦横に現れるので、実際の安定領域はさらにこれらの共鳴線に囲まれた非常に狭い領域に限定される。

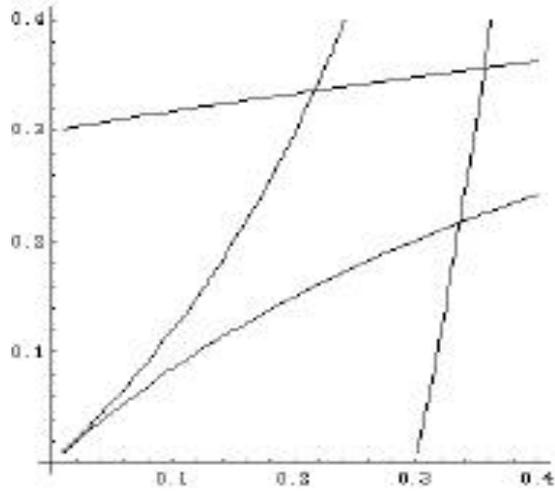
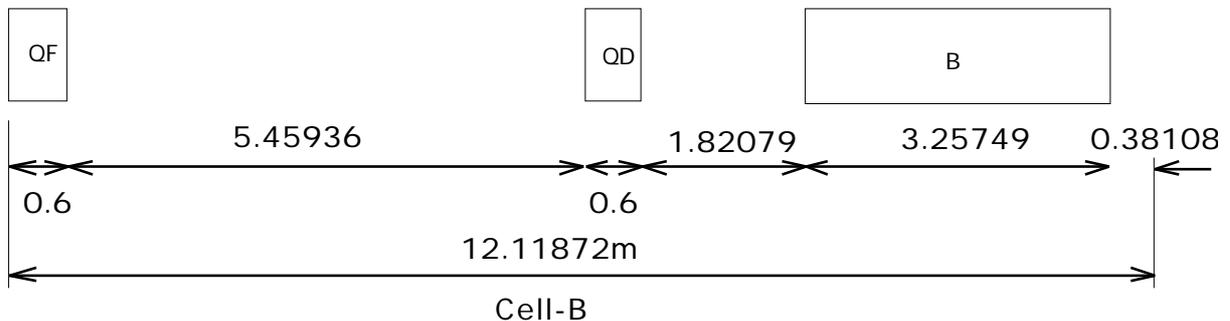
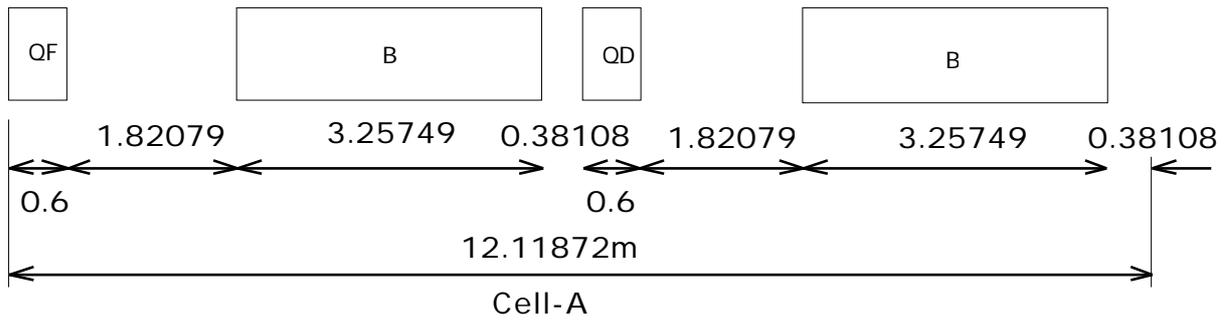


図6 ビームの安定領域（横軸と縦軸はそれぞれ  $n_1/N^2$  と  $n_2/N^2$  である）。

====ここで、頭の体操（6）====

問題1 KEK-PSは機能分離型のシンクロトロンで、図に示す2種類のFODOラティス（Cell-AとCell-B）を順にAAAAABBと並べて1つの超周期を構成する。全体で4超周期からなるが、簡単のため偏向電磁石を直線部と見なして1つのセルだけを考えて図6に相当する安定領域を求めよ。機能分離型は第1章の(85)、(88)を利用すること。



参考のため、偏向電磁石の台数は48、曲率半径は24.8854 m、1台あたりのビーム偏向角は  $\pi/24$  rad、12 GeVにおける磁束密度は1.72966 Tである。また、設計上のベータトロン振動数は水平、垂直方向ともに7.25である。したがって、1セルあたりのベータトロン振動の位相の進みは  $7.25 \times 360 / 28 \text{ cell} = 93.2 \text{ deg} = 1.6269 \text{ rad}$ である。12 GeV陽子の磁気剛性は43.044 [T・m]である。

=====頭の体操終わり=====

この問題で、もしセルが直線部を持たなければ、Mathematicaで

```
<< Graphics`ImplicitPlot`
g1 = ImplicitPlot[Cos[x]*Cosh[y] == 1.0, {x, 0.01, 2.5}, {y, 0.01, 2.5}];
g2 = ImplicitPlot[Cos[x]*Cosh[y] == -1.0, {x, 0.01, 2.5}, {y, 0.01, 2.5}];
g3 = ImplicitPlot[Cos[y]*Cosh[x] == 1.0, {x, 0.01, 2.5}, {y, 0.01, 2.5}];
g4 = ImplicitPlot[Cos[y]*Cosh[x] == -1.0, {x, 0.01, 2.5}, {y, 0.01, 2.5}];
Show[g1, g2, g3, g4]
```

と入力すれば、図7の結果が得られる。横軸と縦軸は  $l_{QF\text{eff}}\sqrt{g_{QF}/B\rho}$  と  $l_{QD\text{eff}}\sqrt{g_{QD}/B\rho}$  である。ここで、 $l_{QF\text{eff}}$  と  $l_{QD\text{eff}}$  はQFとQDの実効長[m]、 $g_{QF}$  と  $g_{QD}$  はQFとQDの磁場勾配 [T/m]、 $B\rho$  は磁気剛性[T・m]である。

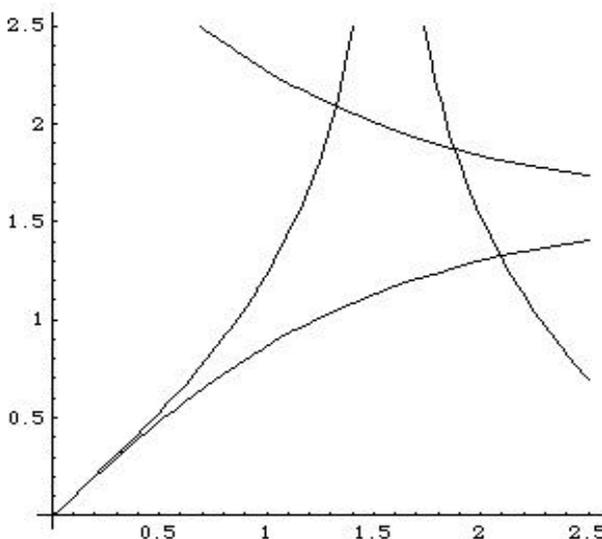


図7 直線部のない機能分離型セルの安定領域。

実用的な最大磁場勾配として20 T/m、 $l_{\text{eff}}=0.6 \text{ m}$ 、 $B\rho=43.0 \text{ Tm}$ を代入すれば、図7で実現できる縦・横軸の最大値は0.41である。

## 第4章 常伝導電磁石

電磁石の発生する磁場によって荷電粒子はローレンツ力を受ける。この力は

$$\mathbf{F} = e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad [N]$$

と表される。 $\mathbf{v}$  [m/s]は粒子の進行方向の速度、 $\mathbf{B}$  [T]は磁束密度（または磁気誘導ともいう）、 $e$  [C]は粒子のもつ電荷である。速度と磁束密度はベクトル、すなわち大きさと方向を持つ量、である。速度と磁束密度のベクトル積で与えられるローレンツ力はベクトル量であって、その方向は速度と磁束密度の両者に直交する。これら3者の方向はフレミングの左手の法則に従う。

粒子が運動する平面を軌道面と呼び、通常は水平面が選ばれる。例外は、LEPやPEPのように地形や地下の地質構造に依存しなければならない場合である。加速器は一度建設されると少なくとも10年間程度は実験に使用されるので、この間に局所的な地盤の沈下や傾斜が起こった場合には電磁石の位置のズレや傾きとして影響が及び、粒子に対する磁場の関係が狂うことになる。

この章では、電磁石として独自の発展を遂げたシンクロトロンの電磁石について、設計面を中心に述べる。強収束の原理と機能分離により、シンクロトロンの電磁石はそれぞれの機能別に、ビームの偏向、収束、補正を行う電磁石が個別に設計されるようになった。これらの電磁石はビームオプティクスからの要請に応じて設計され、加速器全体として協調的に励磁される。

### 1. 種々のシンクロトロン電磁石とビームの運動

#### 1.1 偏向電磁石 (dipole magnet)

偏向電磁石は荷電粒子の偏向 (deflection) に使用される。光学システムに例えれば、光の方向を変えるプリズムの働きをする。このプリズム作用の他に、磁場の組み合わせにより半径方向と垂直方向にも収束作用を持たせることができる。また、粒子の運動量の相違によりビームを分離することができる。この性質は分散 (dispersion) と呼ばれる。円形加速器においてビームの軌道を決定する要素は偏向電磁石の磁場強度である。リング一周にわたる偏向電磁石の全長  $L$  [m]は

$$L = \ell_B N \quad (1)$$

ここで、 $\ell_B$  は1台の偏向電磁石の実効長[m]、 $N$ は偏向電磁石の台数である。偏向電磁石以外のリング長を  $L'$  [m]とすれば、リングの平均半径[m]は

$$R = \frac{L + L'}{2\pi} \quad (2)$$

である。 $L'$  は4極電磁石や補正電磁石、ストレートセクションの占める長さである。

ビームに要求される軌道と磁場の関係は

$$B\rho [T \cdot m] = 3.3356 p [GeV/c] \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 $B$ は磁場[TeslaまたはT]、 $\rho$ は軌道の曲率半径[m]、 $p$ はビームの運動量[GeV/c]である。 $\rho$ は偏向電磁石だけに関係するビームの軌道半径であるので

$$L = 2\pi\rho \quad (4)$$

が成立する。

偏向電磁石の磁場は、水平な軌道面を保証するため、アライメントを考慮して垂直な方向を向いている。この偏向磁場により水平面内で円形軌道を描くようにローレンツ力を受ける。偏向電磁石の磁場が設計値通りで正しくアライメントされていれば、粒子はリング一周で正確に360度回転して元に戻るが、1台でも磁場が狂っていれば軌道に影響が現れる。偏向電磁石1台あたりの実効長 $\ell_B$  [m] は、

$$\ell_B = \int_0^{2\pi} \frac{B(s)}{B(0)} ds$$

で定義される。もし、誤差がなければ

$$\frac{NB\ell_B}{B\rho} = 2\pi$$

にしたがって偏向電磁石全体による回転角は $2\pi$  である。ここで、分母にある $B\rho$  [T・m] は磁気剛性と呼ばれる量で、粒子の運動エネルギーに相当する。偏向電磁石の内 $n$  台だけ磁場の値が $B$ だけ強い(弱い)とすれば、一周 $2\pi$  の回転角を保証するために次式のように平均軌道半径を $\rho$ だけ大きく(小さく)しなければならない。正確には、磁場の強さによって $\ell_B$ が変化することを考慮しなければならないが、ここでは簡単のため変化しないとして、

$$\frac{(NB + nB)\ell_B}{B(\rho + \rho)} = 2\pi$$

$B/B < \ll 1$  として1次で近似すれば、平均的な軌道半径の変化は

$$\rho = \frac{n}{N} \frac{B}{B} \rho$$

である。すなわち、磁場の誤差に相当する軌道の変化を受ける。磁場誤差は電磁石の製作誤差は勿論のこと、傾きによっても現れる。ビーム軸周りに $\theta$  ( $\ll 1$ ) だけ回転すれば垂直方向の磁場は

$$B + B_V = B \cos \theta \approx B \left[ 1 - \frac{1}{2} (\theta)^2 \right]$$

すなわち、

$$B_V \approx -\frac{1}{2} (\theta)^2 B$$

だけ磁場が減少する。この傾きによって水平方向にも

$$B_H = B \sin \theta \approx B \theta$$

なる誤差磁場が発生する。一般に、製作誤差もアライメント誤差もランダムに現れるので、このような誤差は統計的に扱うことができる。

### [1] 磁場中の半径方向の運動

2次元磁場中における荷電粒子の運動を扱い、図1に示す中心軌道半径 $\rho_0$ と、この点より $x$ だけ離れた軌道半径 $\rho_0 + x$ における運動を考える。それぞれの位置における磁場を $B_y(\rho_0)$ 、 $B_y(\rho_0 + x)$ とする。

$$\rho_0 = \frac{mv}{eB_y(\rho_0)} \quad (5)$$

$\rho_0 + x$ における磁場は

$$B_y(\rho_0 + x) = B_y(\rho_0) + x \frac{dB_y}{dx} \quad (6)$$

または磁場指標 (field index)

$$n = -\frac{\rho_0}{B_y} \left( \frac{dB_y}{dx} \right) \quad (7)$$

を用いて、

$$B_y(\rho_0 + x) = B_y(\rho_0) \left( 1 - n \frac{x}{\rho_0} \right) \quad (8)$$

と表すことができる。 $\rho_0 + x$ における粒子の運動方程式は

$$m\ddot{x} = \frac{mv^2}{\rho_0 + x} - evB_y(\rho_0 + x) \quad (9)$$

ここで  $evB_y(\rho_0 + x)$  と  $mv^2/(\rho_0 + x)$  はそれぞれ粒子に働くローレンツ力と遠心力である。 $x \ll \rho_0$  と仮定すれば、 $1/(\rho_0 + x) \approx (1 - x/\rho_0)/\rho_0$  と近似できるので、(9)は

$$\ddot{x} = -v^2 \frac{1-n}{\rho_0^2} x \quad (10)$$

となる。時間微分をビーム進行方向の位置座標  $s$  による微分に置き換える。

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = v^2 \frac{d^2x}{ds^2} = v^2 x'' \quad (11)$$

を考慮して、

$$x'' = -\frac{1-n}{\rho_0^2} x \quad (12)$$

もし、 $n < 1$  であれば軌道 GEF は ABC 側へ収束力を受けて安定であるが、 $n > 1$  であれば軌道は外側へ向かい不安定である。 $n = 1$  の場合は中心軌道を外れた粒子は自由空間の運動を行う。(12)の安定軌道の一般解は

$$x = A \cos \frac{s\sqrt{1-n}}{\rho_0} + B \sin \frac{s\sqrt{1-n}}{\rho_0} \quad (13)$$

ここで A, B は初期条件から決まる定数である。

## [2] 磁場中の垂直方向の運動

水平対称面に垂直な方向の運動は、対称面から  $y$  だけズレた軌道を考える。図2において運動方程式は

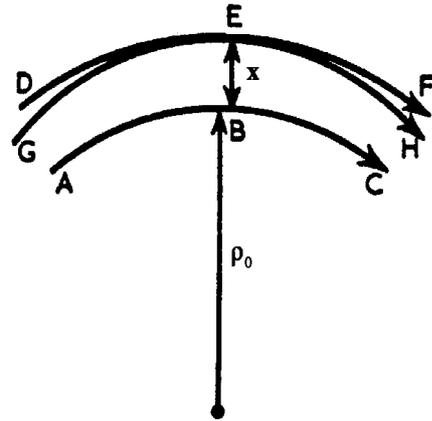


図1 偏向電磁石の対称中心面における粒子の軌道、ABCは中心軌道、GEFはABCに戻る軌道。

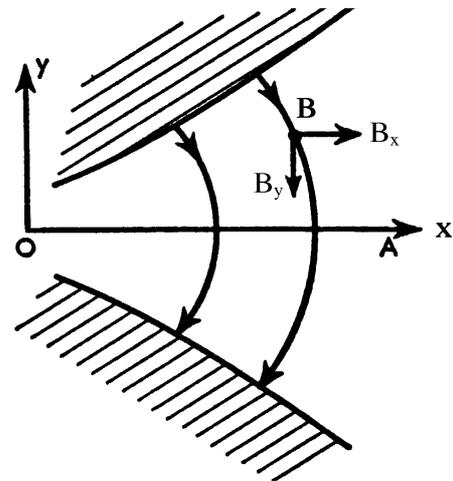


図2  $n > 0$  の場合の磁力線、OAは対称水平面。

$$m\ddot{y} = evB_x(y) \quad (14)$$

ここで  $B_x(y)$  は磁場の水平成分である。1次近似で  $B_x(y) = (dB_x/dy)y$ 、および  $\text{rot}\mathbf{B} = 0$  による  $dB_x/dy = dB_y/dx$  の関係を利用して、(12)と同じく位置座標  $s$  による微分で表せば、

$$y'' = -\frac{n}{\rho_0^2} y \quad (15)$$

前と同じく  $n > 0$  であれば粒子は収束力を受け安定軌道を描く。 $n < 0$  で発散、 $n = 0$  では自由運動である。したがって、偏向磁場による水平、垂直の両方向に収束を得るための条件は、

$$0 < n < 1 \quad (16)$$

である。これが弱収束サイクロトロンや弱収束シンクロトロンの安定条件である。

### [3] フリンジ磁場における水平運動

磁場の端は電磁石の端部に平行で、その外側に実効的な端 (hard edge) を持つものとしてフリンジ磁場 (fringing field) を近似的に扱うことができる。端部がビーム方向に垂直であれば端部を通ることによって影響は受けない。しかし、図3に示すように端部が角度  $\beta$  をもっていれば、Bの粒子は中心軌道A (点線は軌道に垂直) より余分に磁場の中を進むので、それだけAの軌道に近づくように偏向を受ける。Cの軌道は逆に磁場の中にいる長さが短くなるため、曲げられる角度が小さくなり、やはりAに近づく。すなわち、収束作用を受ける。

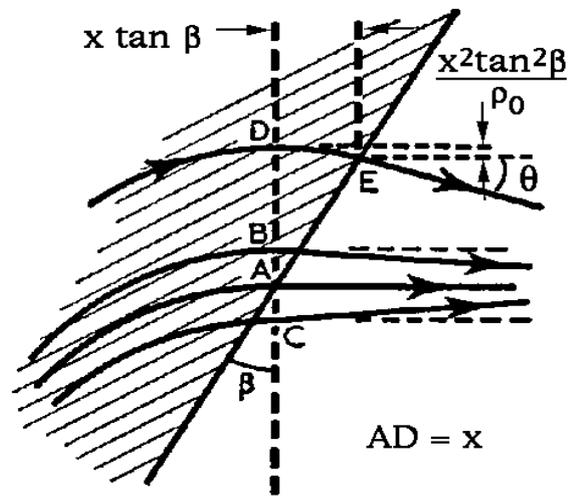


図3 電磁石の端部をある角度をもって出る粒子。

端部の角度が反対の傾きを持てば、逆の結果が得られ、ビームは発散する。

中心軌道から  $x$  だけ離れた軌道Dを通過する粒子は、中心軌道の粒子よりDEだけ長い距離 ( $x \tan \beta$ ) 磁場の中にいる。Dを通る軌道の曲率半径を  $\rho_D$  は、中心軌道の曲率半径を  $\rho_0$  として、

$$B_y \left(1 - n \frac{x}{\rho_0}\right) \rho_D = B_y \rho_0 \quad (17)$$

の関係から

$$\rho_D = \frac{\rho_0}{1 - nx/\rho_0} \quad (18)$$

で与えられる。 $x \tan \beta$  により曲げられる角度は

$$\theta = \frac{x \tan \beta}{\rho_D} = \frac{x(1 - nx/\rho_0)}{\rho_0} \tan \beta \quad (19)$$

である。 $x \ll \rho_0$  であるので、

$$\theta = \frac{x}{\rho_0} \tan \beta \quad (20)$$

したがって、軌道Dは端部の出口で  $x^2 \tan^2 \beta / \rho_0$  だけ中心軌道Aに近づく。

#### [4] フリンジ磁場における垂直運動

図4(b)に示すようにビームの運動に垂直な磁場成分を  $B_z \sin \beta$  とする。A点における粒子に働く垂直力は

$$F_y = evB_z \sin \beta \quad (21)$$

であるので、垂直方向の運動量の変化を求めするためBCに沿って積分する。

$$p_y = \int_B^C F_y dt = e \sin \beta \int_B^C v B_z dt = e \sin \beta \int_B^C B_z ds \quad (22)$$

この積分を評価するため、電磁石のギャップ内の閉じた積分路BCDEBで磁場の線積分を行えば、このループには電流が存在しないのでゼロである。積分路CDは電磁石の十分内部を、EBは磁場の無い十分外側に選べば、

$$\int_C^D \frac{B_z}{\mu_0} \cos \beta ds - \int_B^E \frac{B_y y}{\mu_0} = 0 \quad (23)$$

である。したがって、軌道の勾配の変化  $y'$  は

$$y' = \frac{p_y}{mv} = \frac{y}{\rho_0} \tan \beta \quad (24)$$

である。

フリッジ磁場による影響は形の上では(20)と同じであるが、フリッジ磁場により半径方向には収束作用を受け、垂直方向には発散作用を受ける。偏向電磁石の端部がビームに垂直でなくて傾斜している場合、端部を薄いレンズ (thin quadrupole, thin lens) と見なすことができる。上では  $\beta > 0$  の場合を扱ったが、 $\beta < 0$  ならば水平方向に発散作用、垂直方向に収束作用を受ける。

#### [5] 偏向電磁石のフリッジ磁場

水平対称面における電磁石端部の磁場分布を図5に示す。鉄の飽和がなければ、鉄の表面が等ポテンシャル面であるとして、等角写像により解析的に表現できる。

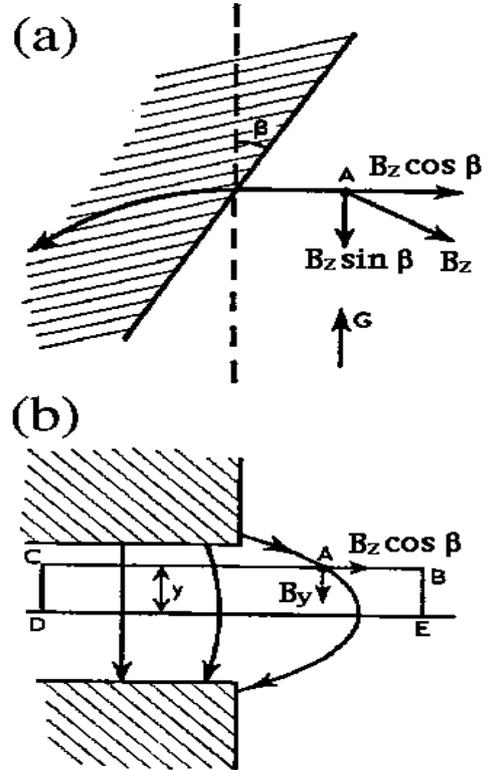


図4 (a) 端部平面図 (実効磁場端部の角度を  $\beta$ )、(b) 立面図。

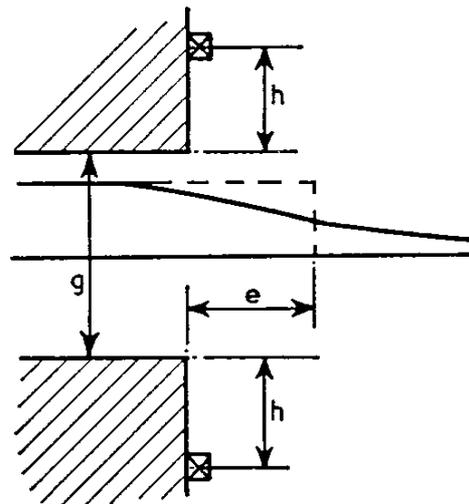


図5 水平対称面における電磁石端部の磁場分布、実線は実際の磁場分布、点線は等価実効長磁場 (hard edge field)。

$$\frac{2\pi z}{g} = \frac{2}{B} - \ln \frac{1+B}{1-B} \quad (25)$$

ここで  $B$  はギャップ内で 1 に規格化した磁場、 $z$  は磁極端から測った距離である。励磁コイルの影響により磁場実効長に相当する端 (hard edge) の磁極端からの距離  $e$  は

$$e = \frac{g}{2\pi} \left( 2 - \ln \frac{4}{q} \right) \quad (26)$$

ここで  $q$  はコイルの位置に関するパラメータで、次式で与えられる。

$$\frac{\pi h}{g} = \sqrt{q-1} - \tan^{-1} \sqrt{q-1} \quad (27)$$

$h$   $g$  ならば、 $q \geq 2$ 、 $e \leq 0.6g$  である。鉄の飽和のある場合や、コイルの構造が複雑な場合は実験的に決めなければならない。

#### [6] 偏向電磁石 (bending magnet, dipole magnet)

偏向電磁石には 3 種類の基本型 ; C 型、H 型、窓枠型がある(図 6)。C 型はギャップへのアクセスが容易であるが、漏洩磁束が大きく、高磁場では磁極に働く磁気力のためギャップが変形する。H 型はこのような心配はないが、ギャップへのアクセスが困難である。窓枠型 (window frame type) は漏洩磁束が無いいため効率がよく、高磁場の発生が可能であるが、コイルスペースが狭い。

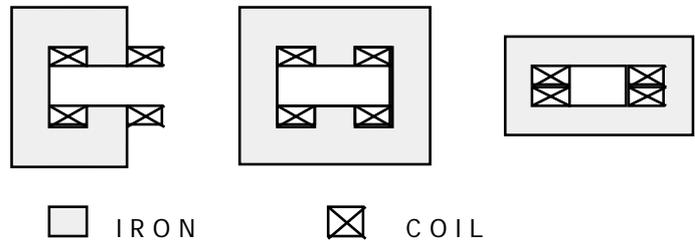


図 6 偏向電磁石、左から C 型、H 型、窓枠型。

高さ  $g$  [m] のギャップに磁場  $B$  [T] を発生させるために必要はアンペアターン  $NI$  [AT] は

$$NI = \frac{Bg}{\mu_0} + \frac{B_{iron}\ell}{\mu_0\mu_r} \quad (28)$$

ここで  $B_{iron}$ 、 $\ell$ 、 $\mu_r$  はそれぞれ鉄の中の磁束密度、磁路長、比透磁率である。鉄の飽和が殆どない 1 T 以下では鉄の比透磁率が大きく、(28) の右辺第 2 項は無視できる。しかし、磁場が高くなって飽和の影響が表れるとこの項は無視できなくなる。

磁極の側面から漏れる漏洩磁束が多くなれば磁極中の磁束密度がギャップの磁束密度より大きくなり、磁極が飽和しやすくなる。このため磁極幅の選択や磁極形状の最適化によって漏洩磁束を減らす工夫が必要である。

#### [1-6-1] 偏向電磁石 (H 型)

磁極の幅方向への広がり有限であるため、磁極の両側で磁場が低下する。ビーム方向に長い電磁石を考えれば、2 次元問題として扱うことができる。図 7(a) の磁極コーナー部が直角の場合、磁場有効領域の端で所定の  $B/B$  を得るために必要なオーバーハング  $a$  は経験式から求めることができる。

$$X = \frac{a}{h} = 0.75 - 0.36 \ln 100 \left| \frac{B}{B_0} \right| \quad (29)$$

$B/B_0=0.01\%$ に対して、 $a/h=2.4$ が得られ、 $a$ はギャップ寸法より大きくなる。この場合、磁極中心から離れるにしたがって磁場は減少する。これは当然のことで、無限の磁極幅に対して磁場一定であるところを、磁極幅を有限にしたためである。ギャップ両側に鉄を追加してこの鉄不足を補う。これがシムと呼ばれるものであるが、外側に広がっていた磁束がこの部分に集まり磁場が上昇し、その外側で急激に低下する。

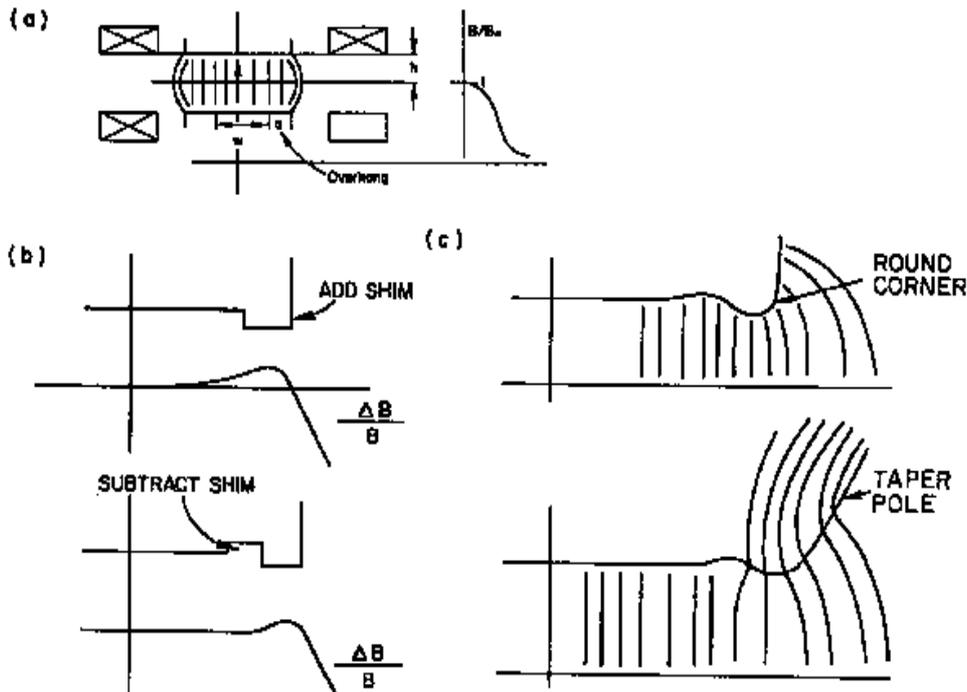


図7 H型偏向電磁石の磁極フリッジ部の磁場変化、(a) 2次元断面のフリッジ磁場、(b)磁極コーナー部のシム、(c)高磁場における磁極コーナー部。

しかし、コーナー部分の鉄が飽和するため磁束の分布が変化する。シムの飽和を避けるため、磁束が集中しやすい角型シムの代わりに滑らかな曲線形状のシムを採用する。磁極の基部（根元）は全磁束が通過するため飽和しやすい。高磁場電磁石ではこの部分の飽和を避けるように磁極基部の幅を広げるために磁極をテーパ状にする。テーパ状にすれば、コイルスロットでの漏れ磁場が増えるためヨーク（継鉄）幅を増やす必要がある。磁場分布が励磁によって変化しない場合は磁極面が等磁気スカラーポテンシャル面になっている。このような磁極面をRogowsky形状と呼ぶ。

#### [6-1] 偏向電磁石（C型）

H型偏向電磁石が水平面と垂直面の2重の対称性をもっているのに対し、C型電磁石は水平面だけの対称性しか持っていない。しかし、真空チェンバーの挿入や保守のための接近性（accessibility）がよいためしばしば採用される。C型偏向電磁石の特徴は、図8に示すようにギャップの開口部に近い側を通る磁束は鉄の中で長い磁路を通る。した

がって、鉄が有限の透磁率をもつ場合には開口部に近づくにつれてギャップの磁場が低下し、磁場勾配が現れる。磁場が低い場合は逆の傾向を示す。その理由は透磁率がある比較的低い磁束密度で最大値をもち、その両側でなだらかに減少するためである。そのため、最大透磁率より低い磁束密度の磁場では透磁率を局所的に増やすように磁束が集まる。同じことは、最大透磁率より高い磁束密度の磁場でも起こり、この場合は最大透磁率に近づくように鉄の中の磁束が分散する。図9に示す磁力線と透磁率の逆数の分布図はこの様子を表している。すなわち、磁場が弱いとき(図9(a), (b))にはコイルに近い鉄心部の透磁率が大きくなるようにこの辺りに磁束が集まっている。磁場が強くなれば(図9(c), (d))コイルに近い鉄心部の透磁率の低下を避けるように磁束はコイルを大きく迂回する。

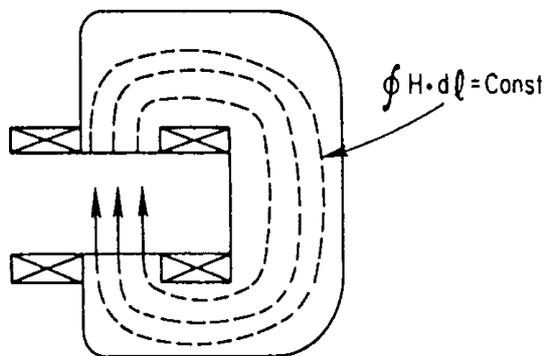


図8 C型偏向電磁石に磁場勾配が現れる理由。

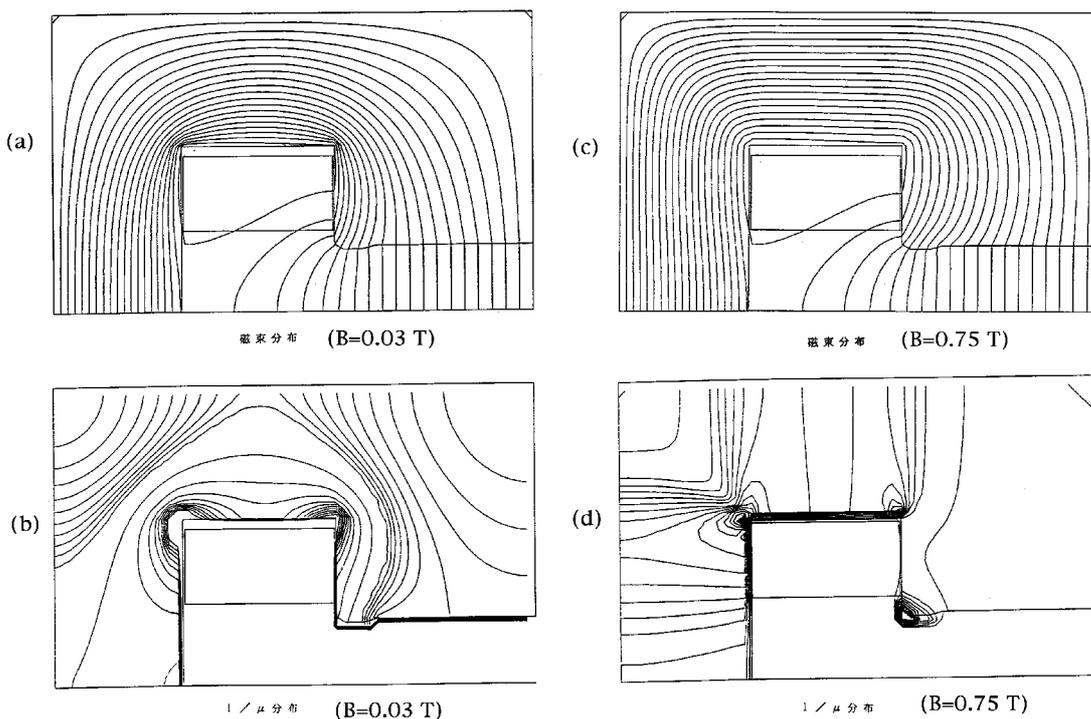


図9 磁束密度の大きさにより磁力線の通路が影響を受ける様子。H型電磁石についての計算結果による。(a, b)  $B=0.03$  T、(c, d)  $B=0.75$  Tの場合。

### [6-2] C型のスチール・セメント電磁石

電子シンクロトロンの場合、シンクロトロン放射を減らすため、できる限り大きな径になるようにリングの設計がなされる。LEP電磁石は周長約27 kmの巨大な電子・陽電

子衝突型の加速器であるが、入射磁場が0.017Tと低いため、残留磁場が一様にならないことが問題になった。この問題はラミネーションのスタッキングファクターを27%に減らすことで解決された。すなわち、ラミネーションの間に4mmの空間を設け、粒度の小さな砂とセメントのモルタルで埋めた構造である。機械的にはプレストレスのコンクリート棒として働き、スチールの中の磁気誘導は強くなる(図10)。セメントは鋼材より安価であるため、電磁石の製作コストの削減にも寄与した。

130GeVの最大磁場でも0.1231Tであるため、高磁場における飽和は問題ではなく、むしろ低磁場における保持力と透磁率の低いことによる磁場性能への影響が問題である。ヨークは鉄の飽和よりは機械的強度に重点が置かれ、最大磁束密度は130GeVで1.6 T以下である。鉄中の磁束密度は残留磁場の寄与も考慮して、

$$B_{iron} = \mu_0 \mu_r (H + H_c) \quad (30)$$

で与えられる。図11の磁束チューブについて磁束の連続性から

$$BA = B_{iron} a \quad (31)$$

ここで $B$ と $A$ はギャップの磁束密度と磁束チューブの断面積、 $B_{iron}$ と $a$ は鉄中の磁束密度と磁束チューブの断面積である。アンペールの法則

$$\frac{B}{\mu_0} g + \int_{iron} H ds = Ni \quad (32)$$

に(30)(31)の関係を代入すれば、

$$B = \frac{\mu_0}{g} (Ni + \int_{iron} H_c ds) \frac{1}{(1 + \frac{A}{g} \int_{iron} \frac{ds}{\mu_r a})} \quad (33)$$

(33)において $Ni = 0$ とおけば、残留磁場 $B_{rem}$ は近似的に

$$B_{rem} \approx \frac{\mu_0}{g} \int_{iron} H_c ds \approx \frac{\ell}{g} \mu_0 H_c \quad (34)$$

である。ここで $H_c$ は保持力、 $\ell/g$ は鉄中の磁路長とギャップの比である。この比は通常10~15程度であるので、保持力の大きさから直ちに残留磁場が推定できる。残留磁場を低く抑えるため、LEPでは保持力の小さな低炭素鋼が選択された。表1にCERNとPETRAで使用された鋼鉄の保持力を示す。(33)を半径方向( $x$ 方向)に微分すれば磁場勾配が得られる。

$$\frac{1}{B} \frac{dB}{dx} = \left( \frac{H_c}{Ni} - \frac{1}{g \mu_r a / A} \right) \frac{d\ell}{dx} \quad (35)$$

ここで $a/A$ は鋼鉄の占積率を与える。低磁場では $Ni$ と $\mu_r$ が小さくなるが、お互いにキャンセルし合うので磁場勾配は小さくなる。高磁場では両者ともに増加するので磁場勾配は小さい。占積率を小さくすれば、鉄中の磁束密

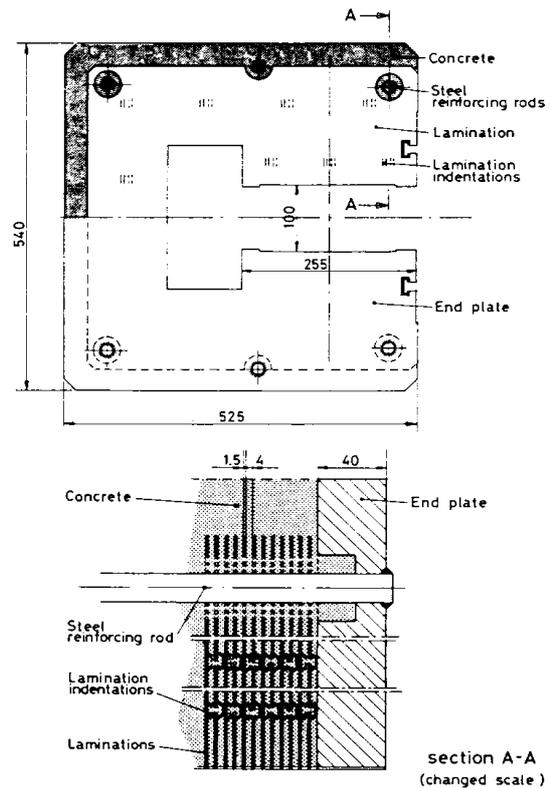


図10 CERN-LEPの鋼・セメント電磁石の構造。

度は増加し、表 1 に示すように保持力も増加するが、透磁率も増加するのでお互いに相殺し合う。

表 1 保持力の測定データ (単位はA/m)

	低炭素鋼板		ケイ素鋼板	
	SPS	ISR	PETRA	
$H_c^{sat}$	39.0	50.2	61.8	
0 $B_{max}$ 0 の励磁サイクル後の $H_c$				
$B_{max} = 0.7$ T	31.2	40.7	50.7	
$B_{max} = 0.4$ T	24.4	32.0	40.2	
$B_{max} = 0.25$ T	19.4	26.1	33.6	
$B_{max} = 0.1$ T	13.6	17.8	22.2	

$H_c^{sat}$  は鋼鉄を完全に飽和させた後での測定値

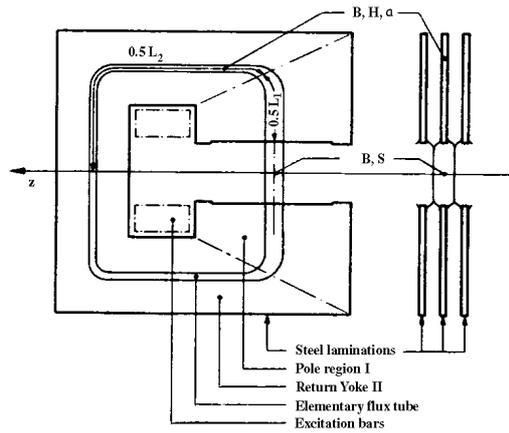


図 1 1 鋼・セメント電磁石断面の磁路。

[6-3] H型偏向電磁石とC型偏向電磁石の比較

図 1 2 はH型とC型の偏向電磁石の磁場を比較したものである。形状から現れる特徴的な相違はC型電磁石にはB' (4極成分)、B''' (8極成分) などの垂直軸に関する非対称性による不整磁場成分が現れることである。図 1 2 (a) に示した形状に対する2次元磁場計算から、図 1 2 (b) の磁場分布が得られた。縦軸は  $k = -(dB/dr)/B_0$  [m<sup>-1</sup>] である。図 1 2 (c) において励磁レベルが同じであれば偏向電磁石に現れる6極成分B''は同じであるが、C型には鉄の飽和によるB'成分が現れる。6極成分は磁極両側の飽和の影響を受けるためH型もC型も同じ程度になるが、4極成分は鉄中の磁路の非対称性によるものである。

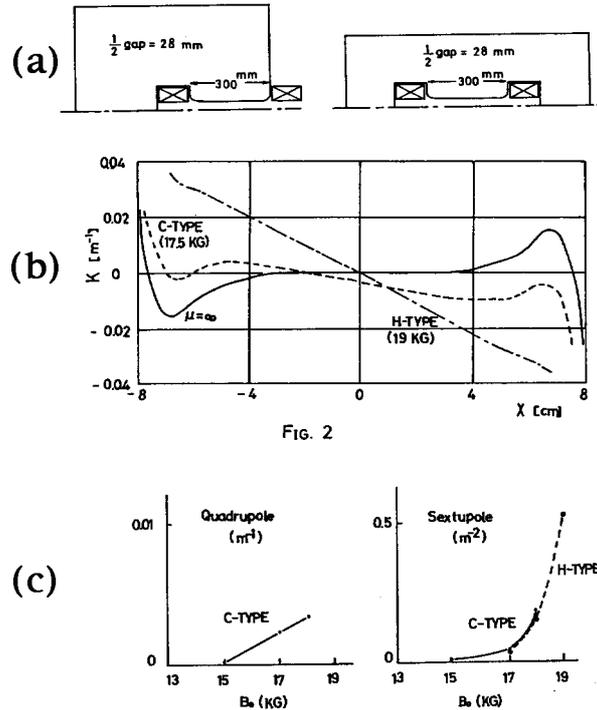


図 1 2 H型とC型の偏向電磁石の磁場成分 (KEK-PS主リング偏向電磁石における検討)。

[6-4] 窓枠型+H型偏向電磁石 (window-frame + H-type)

窓枠型は、2 T以上の磁場が要求される偏向電磁石に採用される。この構造ではC型や

H型と異なり、コイルがアパーチャに近いギャップ内に置かれるため、コイルを流れる電流による磁場が直接ギャップ磁場に寄与する。このため、コイルの位置精度が要求される。

この種の偏向電磁石は発生する磁場のわりにコイルスペースが小さいため、FNALやCERN-SPSでは図13に示すようにH型磁極構造を持ちながら、ギャップ内に更にコイル (inner coil) を配置する構造を採用している。基本的にはH型であるが、ギャップ間にコイルを置くことにより、低磁場における磁場一様性が悪くなる (コイルに近づくにつれて磁場が低下する)。これはこのコイルのターン間隔および磁極・コイル間隔を適当に選ぶことによって解決できる。

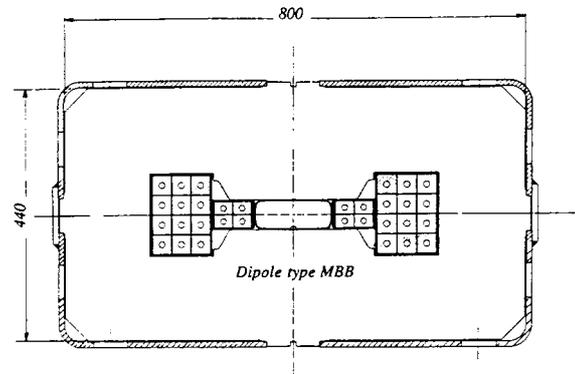


図13 SPSの窓枠型+H型偏向電磁石。

高磁場では、鉄の飽和によりコイルウインドウの電流による磁場はコイルに近づくにつれて低下し、ギャップ間のコイルの寄与はコイルに近づくにつれて増加する。コイルウインドウとギャップ間コイルの電流比を最適化することにより広い磁場範囲で一様な磁場分布が得られる。このよな設計上の配慮と、複雑なシムを設けることによって使用最大磁場は2.25 T、必要なコイルの位置精度は上下方向に厳しく±0.1 mm以下である。また、このコイル導体の冷却水チャンネルの孔の位置による影響も受ける。

#### 1.2 4極電磁石 (quadrupole magnet, quad)

弱収束の加速器では半径方向と垂直方向の収束を同時に行うため磁場指標は  $0 < n < 1$  (通常は0.6付近) であった。しかし、強収束の原理により非常に大きな  $n$  値により強いビーム収束が可能になり、4極電磁石は機能分離型シンクロトロンにとって重要な構成要素になった。

4極電磁石の理想的な磁極形状は図14に示すように双曲線  $xy = R^2/2$  (Rはボア半径) で与えられる。この双曲線に直交する磁力線は  $y^2 - x^2 = const$  である。水平軸 (x軸) の座標  $x$  [m]における垂直方向の磁場成分  $B_y$  [T]と垂直軸 (y軸) の座標  $y$  [m]における磁場成分  $B_x$  [T]は

$$B_y = gx, \quad B_x = gy \tag{36}$$

である。ここで、 $g$  [T/m]は磁場勾配である4極電磁石の概略設計において有用な式は、鉄中の寄与を無視して、

$$\frac{1}{2} gR^2 [T/m \cdot m^2] = \mu_0 NI [A \text{ turns} / \text{pole}] \tag{37}$$

である。NIは磁極当たりのアンペアターンである。

4極電磁石における磁場と荷電粒子に働く力の方向を図15に示す。この図で「電磁

石の中心軸に向かう力を受ければ、収束 (Focus)、外側に向かう力を受ければ、発散 (Defocus) である。4 極電磁石の励磁の向き (コイルを流れる電流の方向) によって、収束作用と発散作用の 2 通りの使い方がある。4 極電磁石に付けられた収束、発散は水平面におけるビームの運動に対する 4 極電磁石の作用から区別される。図 1 5 から分かるように、水平面内で収束作用を受ければ、垂直面内では発散作用を受ける。この逆も成立するので、両方の面内で同時に収束作用を持たせるため、収束用 4 極電磁石 (F-quad) と発散用 4 極電磁石 (D-quad) を交互に並べる必要がある。

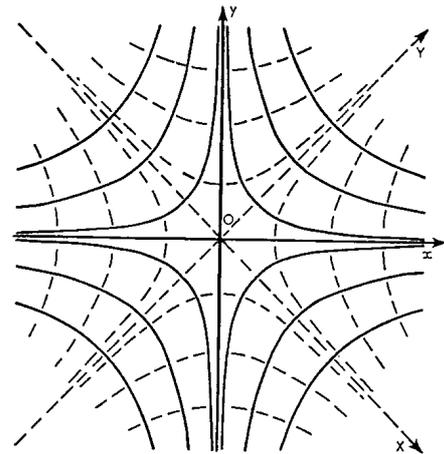


図 1 4 4 極電磁石の等ポテンシャル線と磁力線 (共に双曲線)。

[1] 収束面内における運動

4 極電磁石の断面構造を示す図 1 5 において、ビームが通過する空隙領域を取り囲むように 4 つの磁極がある。対向する磁極は同じ極性を持ち、磁力線は N 極から出て、S 極に入る。磁場は磁力線の接線方向に向かうので、水平および垂直の対称面以外では両方の磁場成分をもつが、ビームの水平運動に対して水平磁場は作用を及ぼさない。同様に、

垂直運動に対して垂直磁場は作用を及ぼさない。水平および垂直方向のビームの運動は独立に扱うことができる。

粒子の運動方程式は第 1 章で導いたように

$$m\ddot{x} = -evB_y = -evgx \quad (38)$$

時間微分をビーム進行方向の座標  $s$  による微分に置き換え、磁気剛性 ( $B_y\rho_0$ ) を導入すれば、

$$x'' = -\frac{g}{B_y\rho_0} x \quad (39)$$

この式は調和振動の方程式である。

$\omega^2 = g/B_y\rho_0$  とおけば、(39) の一般解は

$$x = A \cos \omega s + B \sin \omega s \quad (40)$$

である。ここで  $A, B$  は初期条件から決まる定数である。

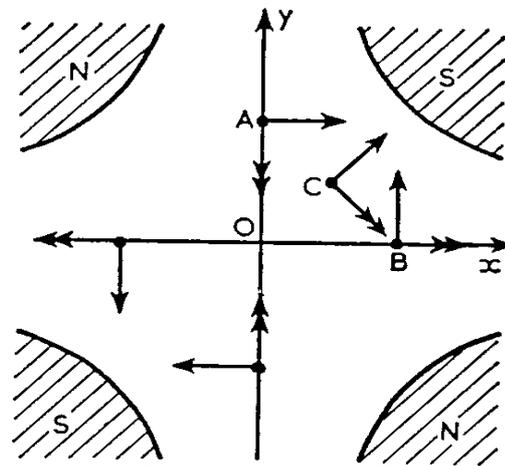


図 1 5 4 極電磁石における磁場と荷電粒子に働く力の方向 (正の荷電粒子を仮定し、紙面の表から垂直に裏に向かう場合)。

[2] 発散面内における運動

粒子の運動方程式は符号に注意して、

$$m\ddot{y} = +evB_x = +evgy \quad (41)$$

時間微分をビーム進行方向の座標  $s$  による微分に置き換え、磁気剛性を導入すれば、

$$y'' = +\left\{\frac{g}{B_y \rho_0}\right\}y \quad (42)$$

(39)と同じく  $\omega^2 = g/B_y \rho_0$  とおけば、(42)の一般解は

$$y = C \cosh \omega s + D \sinh \omega s \quad (43)$$

である。収束面内の運動は三角関数で記述されたが、発散面内では双曲線関数で記述される。

### [3] 4極電磁石の磁極設計

無限に続く双曲線の磁極形状により理想的な4極磁場が発生できるが、コイルスロットを設けるために双曲線の裾を有限幅で切断 (truncation) しなければならない (図16)。このために4極磁場が歪むので、双曲線形状を修正して4極磁場の歪みを最小限に抑える。修正方法には双曲線を円弧で近似する方法と、双曲線の端にシムを付ける方法がある。

4極電磁石の磁極先端に内接する円の半径をボア半径 (bore radius)  $R_0$  と呼び、この半径と磁極幅  $P$  の比 ( $P/R_0$ ) で磁場有効領域 (good field region) が決まる。例えば、 $g/g_{0.1\%}$  を基準として、 $P/R_0 = 1.5$  であれば磁場有効領域は  $0.7 R_0$  である。 $P/R_0 = 1.76$  とすれば  $0.9 R_0$  である。

機械加工の上で磁極を円弧で近似することは容易であり、安価であるため、それほど磁場性能が要求されない場合にしばしば採用される。磁極対称性から発生する高次の多極磁場成分は12極であるが、円弧の半径をボア半径の1.15倍に選ぶことによってボア半径の0.9倍のアーチャが確保できる。このときの円弧は1/4円で、磁極幅はボア半径の約1.6倍である。図17に双曲線を円弧で近似する様子を示す。

水平方向と垂直方向に全く同じ磁場有効領域を持たせる対称4極電磁石 (Symmetric quadrupole、図18) では、磁極中心線に関して磁極は対称である。蓄積衝突型シンクロトロンではビームパラメータを自在に変えてルミノシティを最大にする必要性から垂直方向

にも有効領域が確保できる対称4極電磁石が選択される。特に衝突点近くに配置される多くの4極電磁石は単独に、あるいは衝突点を挟んで対称配置された4極電磁石 (local quadrupole) は対にして独立に励磁される。

通常のシンクロトロンではビーム領域は垂直方向に狭いので、非対称4極電磁石 (Asymmetric quadrupole、図19) が使用される場合が多い。この場合、垂直面に面する

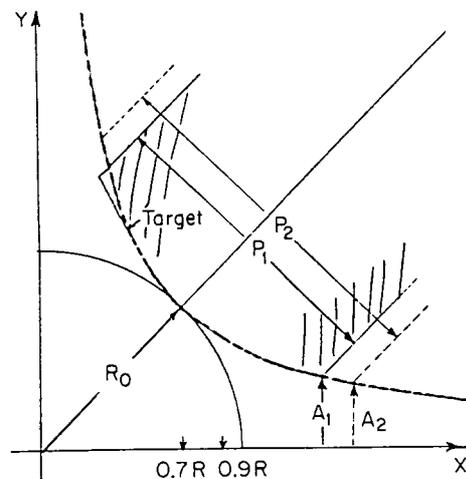


図16 4極電磁石の双曲線形状の磁極裾野を有限幅で切断。

シムと水平面に面するシム形状は異なる。

ソリッドの鉄から磁極を機械加工する場合の磁極シムは図20に示すように、磁極面の1点から接線で伸ばす形状が一般的である。シンクロトロンでは加速のために電磁石はパルス励磁されるので、鉄中の渦電流による磁場への影響を避けるため、積層型の電磁石が採用される。この場合、薄い鋼板 (laminated steel) が採用され、複雑な磁極形状でも抜型の構造で精度よく加工することが可能である。加速器の電磁石製作に採用される精密抜型は一般にミクロン程度の精度で作られ、生産性の上で雌雄の抜型の隙間 (clearance) として通常  $\sim 20 \mu\text{m}$  に選ばれる。このため打抜かれた鋼板の寸法誤差もこの程度である。

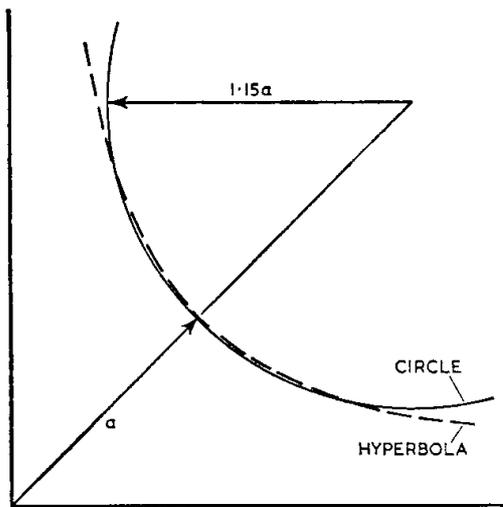


図17 双極線を1/4円で近似する磁極。

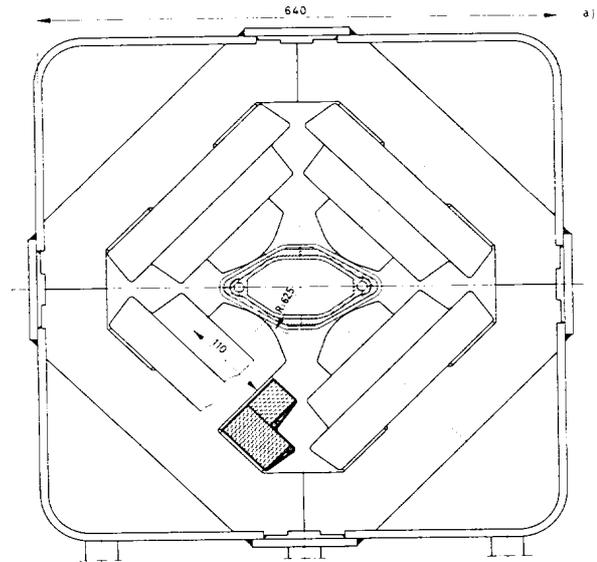


図18 対称4極電磁石。

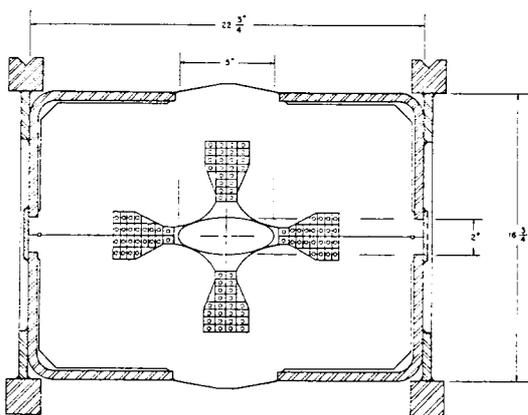


図19 非対称4極電磁石。

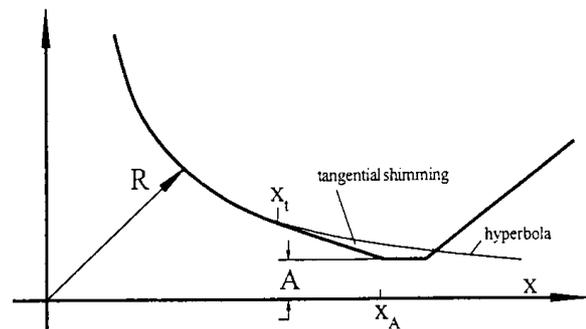


図20 積層基準面のある磁極設計例。

積層型電磁石の設計で考慮しなければならない点は、打抜かれた鋼板の精度を積層段階でも維持することである。図20のように積層基準面を磁極シム形状の中に持たせ、

組み立て誤差を最小限に留める工夫が必要である。このことは積層型の偏向電磁石についても言える。この基準面は対向する磁極と間のギャップが最も狭くなる部分 (minimum gap) に設けられる。

次にコイルは磁極との相対的な位置関係によって磁場有効領域に於ける磁場分布に影響が現れる。コイルがminimum gapの影に隠れる様な位置にあれば、ギャップ内の磁場分布は主に磁極形状から決まる。しかし、minimum gap付近にコイルのエッジがあれば、磁場分布への影響が現れる。図2 1 は後者の場合で磁場有効領域に面するコイルの配置を変えた時の磁場分布の変化を示している。

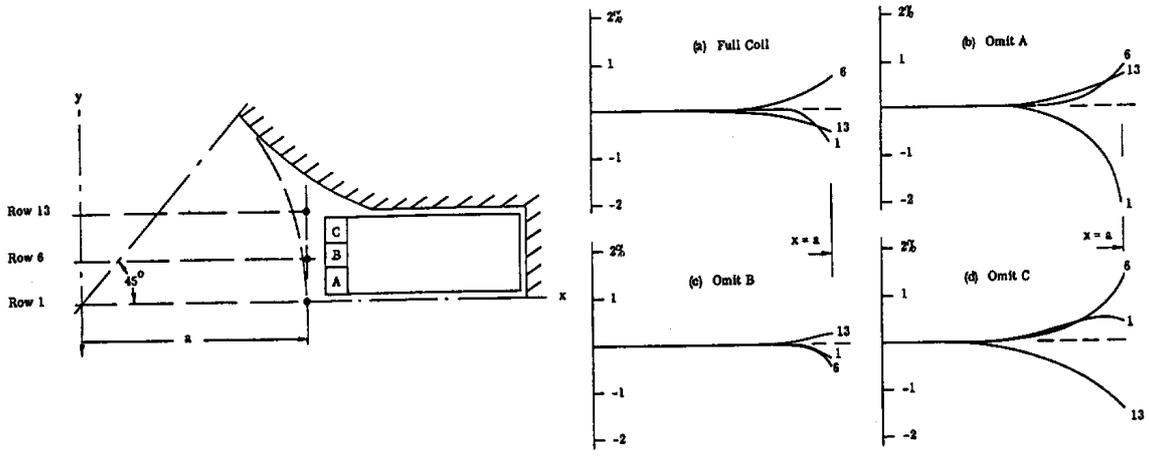


図 2 1 4 極電磁石のコイル導体の配置による磁場分布への影響 (SLACスペクトロメータ4 極電磁石)。

[4] 4 極電磁石の実効長

磁極端部内側から外側に向かって距離とともに4 極磁場は徐々に減少する (図 2 2)。このように変化する磁場分布を次のように電磁石中心の磁場勾配  $g(0)$  を一様にもつ実効的な長さで表すことができる。

$$l_G = \int_{-g(0)}^{+g(s)} ds \quad (44)$$

ここで、 $l_G$  は4 極電磁石の実効長である。一般に実効長は電磁石の物理的長さより長く、

$$l_G = l + kR_0 \quad (45)$$

で与えられる。 $l$  と  $R_0$  はそれぞれ電磁石の物理的長さとボア半径、 $k$  は磁極形状にもよるが0.9~1.1程度である。磁場勾配が一定な領域は  $l$  より狭いので、ボア半径より短い電磁石は一様な磁場勾配の領域がなくて非効率である。

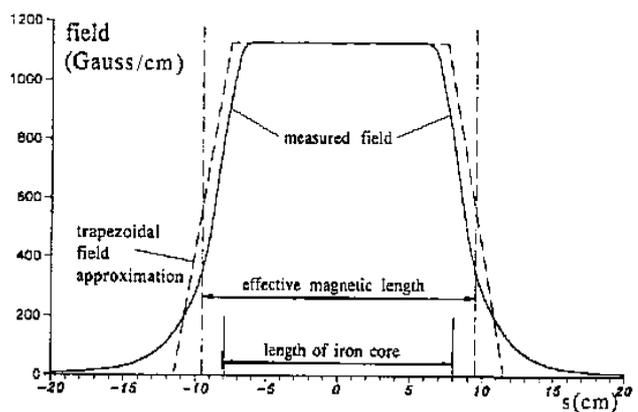


図 2 2 4 極電磁石の軸方向の磁場勾配分布。

### [5] 色収差 (chromatic aberration)

粒子の運動量の相違による4極電磁石の焦点距離の変化から色収差が発生する。このために起こる運動量の違いによるチューンの変化をクロマチシティ (chromaticity) と呼ぶ。理想的な4極電磁石のアップーチャ内はどこでも磁場勾配が一定であるので、正しい運動量 (公称運動量) の粒子に対して4極電磁石の強さが指定される。一般にビームは運動量の拡がりを持ち、中心運動量のまわりにガウス分布している。運動量の小さな粒子はチューン (ベータトロン振動数) が大きく、逆に運動量の大きな粒子はチューンが小さい。言い換えれば、運動量の拡がりにより、チューンに拡がり (tune spread) ができる。この現象は水平、垂直の両方向に同じように現れる。チューンの拡がりが大きくなれば、すなわちクロマチシティが大きくなれば共鳴線による制約のため、チューンダイヤグラム上の安定なビーム領域が狭くなる。

### [6] 特殊な構造の4極電磁石

通常の4極電磁石は左右に開口部を持たないため、ビームハンドリングの上で制約を受ける場合がある。例えば、放射光リングでは取出されるシンクロトロン光が4極電磁石に邪魔されることがしばしば起こる。LBLの放射光リングでは図23に示すように、片側に開口部をもつ左右非対称な4極電磁石が採用されている。

また、図24に示すように両側にヨークのないCollins型4極電磁石 (または八の字型4極電磁石) と呼ばれるものもある。

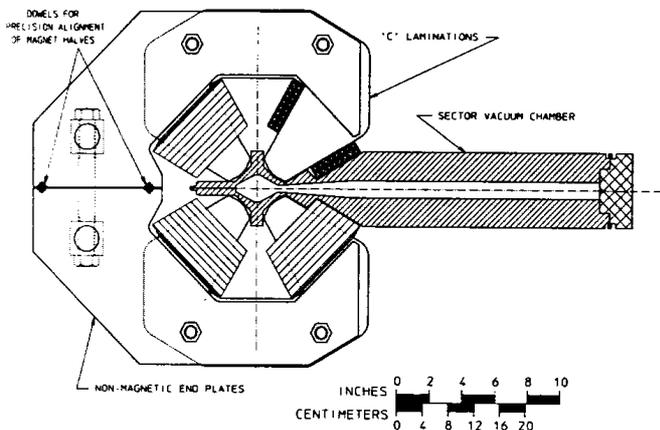


図23 開口部のある4極電磁石 (LBL放射光リング)。

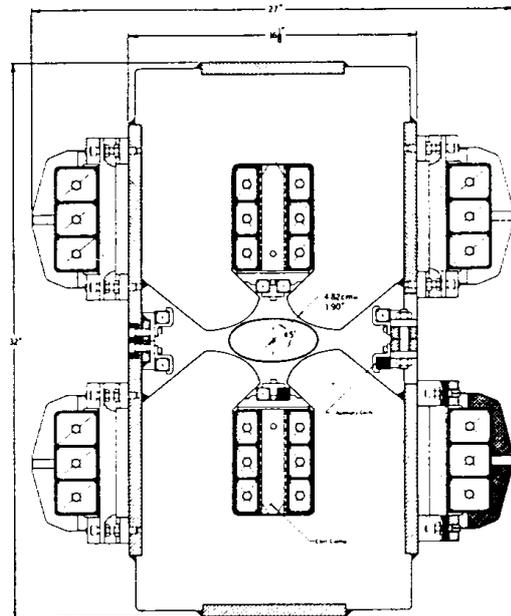


図24 Collins型4極電磁石 (または八の字型4極電磁石)。

### 1.3 機能結合型電磁石

同じ電磁石にビームの偏向と収束の機能を持たせる設計はC型(図25)やH型で実現できる。理想的な磁極形状は中性極(neutral pole)をもつ双曲線で表わされる。

磁極中央部で磁場指標

$$n = \frac{\rho_0}{B_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (46)$$

をできるだけ広い範囲で一定に保つようにアパーチャ両側の領域のシム形状を決定する。磁場指標はx座標によらないので、この関係から

$$B_y = B_0 \left(1 - n \frac{x}{\rho_0}\right) \quad (47)$$

ここでxは中心軌道 $\rho_0$ (磁極中心)から測った半径方向の距離、 $B_0$ は中心軌道の磁場である。

半ギャップ(half gap)を $x=0$ において $y_0$ 、 $x=x$ においてyとすれば、アンペールの法則から

$$B_0 y_0 = B_0 \left(1 - n \frac{x}{\rho_0}\right) y = \mu_0 n i \quad (48)$$

すなわち、磁極の曲線は

$$\left(\frac{\rho_0}{n} - x\right) y = \frac{\rho_0}{n} y_0 \quad (49)$$

で与えられる。

クロマティシティ補正のため、さらに6極成分を付け加える設計もある。磁場勾配を $b_2$ 、6極成分を $b_3$ として、対称中心面の磁場を

$$B_y = B_0(1 + b_2 x + b_3 x^2) \quad (50)$$

とすれば、通常

$$\begin{aligned} b_2 & 4[m^{-1}] \\ b_3 & 0.5[m^{-2}] \end{aligned}$$

である。機能結合型の電磁石の例を表2に示す。

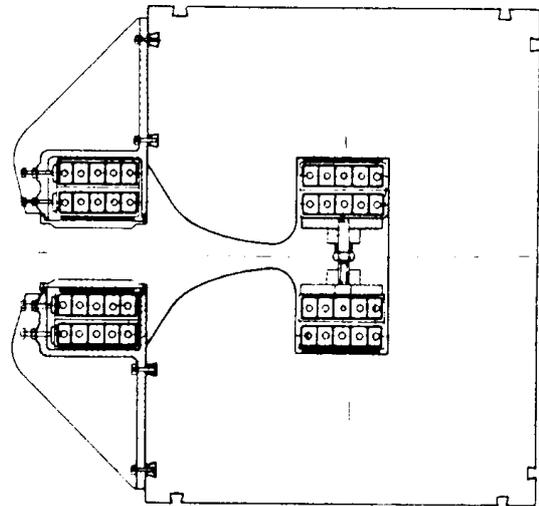


図25 機能結合型電磁石。

表2 機能結合型の電磁石

加速器	KEK-booster	CPS	AGS	FNAL-booster
最大エネルギー(GeV)	0.5	28	30	10
$b_1(m^{-1})$	3.66	4.12	4.25	2.5
$b_2(m^{-2})$	-0.31	0	0	-1.28
ギャップ(cm)	7.6	7	7	6
中心軌道磁場 最大(T)	1.1	1.2	1.3	0.8

入射(T)	0.2	0.0147	0.0121	0.05
曲率半径(m)	3.3	70	80	45

このような機能結合型電磁石はSLACのリニアコライダ- SLCにも採用されている(図26)。この電磁石は中性極をもつ構造で、中性極から中心軌道までの距離は8 mm、ギャップが6.4 mmである。また、クロマティシティ補正のための6極成分も含めてある。図から分かるように電磁石断面は非常に小さく、ブックサイズである。主要パラメータを表3に示す。アパーチャが小さいため非常に大きな磁場勾配の発生が可能である。

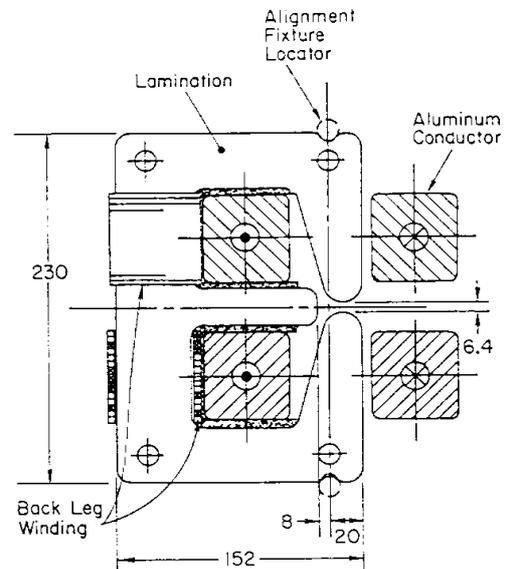


表3 SLACリニアコライダ-の電磁石

ギャップ	6.4 mm
アパーチャ	10 mm
最大磁場	0.8 T
磁場勾配	100 T/m
断面寸法、幅x高	152 x 230 mm <sup>2</sup>
電磁石長	2.4 m

図26 SLAC-SLCの機能結合型電磁石。

#### 1.4 6極電磁石 (sextupole magnet)

6極電磁石は図27に示すようにS, N極が交互に等間隔に並んだ構造をしている。6極電磁石の設計の上で有用な関係は、

$$\frac{1}{6}b_3R^3[T/m^2 \cdot m^3] = \mu_0NI[AT/pole] \quad (51)$$

で与えられる。

6極電磁石の理想的磁極形状は $3x^2y - y^3 = R^3$  ( $R$ はボア-半径)の曲線(等ポテンシャル線)である。6極電磁石の断面で水平方向を $x$ 座標、垂直方向を $y$ 座標で表せば、この曲線は $y = 0$ と $y = \pm\sqrt{3}x$ を漸近線とする曲線である。それぞれの方向の磁場成分は

$$B_x = b_3xy \quad (52)$$

$$B_y = b_3(x^2 - y^2)/2 \quad (53)$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = b_3(x^2 + y^2)/2 \quad (54)$$

である。この式から6極磁場の強さは中心からの距離の2乗に比例する。

6極磁場の中における粒子の運動方程式は

$$\ddot{x} = (b_3/B\rho_0)(x^2 - y^2)/2 \quad (55)$$

$$\ddot{y} = -(b_3/B\rho_0)xy \quad (56)$$

である。

図 2 7 において正電荷の粒子が紙面の表から裏に向かうものとして、x方向の運動を考えると、

- (i)  $b_3 < 0$ 、 $y = 0$ で、軌道が  $x > 0$ にある場合はx方向に収束力が働く。
- (ii)  $b_3 < 0$ 、 $y = 0$ で、軌道が  $x < 0$ にある場合はx方向に発散力が働く。

次に、y方向の運動を考えると、

- (iii)  $b_3 > 0$ で、軌道が  $x > 0$ にある場合はy方向に収束力が働く。
- (iv)  $b_3 > 0$ で、軌道が  $x < 0$ にある場合はy方向に発散力が働く。

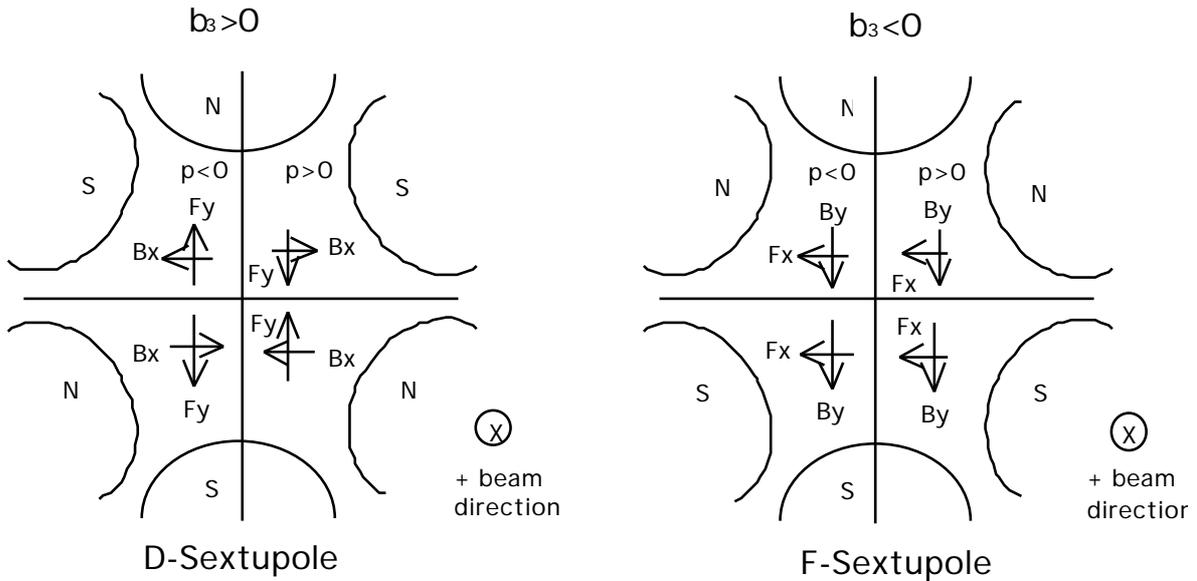


図 2 7 6 極磁極による収束、発散作用。

F- 6 極 ( $b_3 < 0$ ) と D- 6 極 ( $b_3 > 0$ ) で、 $x > 0$  であれば収束力、 $x < 0$  であれば発散力を受けるので、6 極磁場はクロマティシティの補正に利用される。ただし、運動量の大きな粒子が  $x > 0$  側に、運動量の小さな粒子が  $x < 0$  側に来ていなければならないので、分散関数がゼロにならない場所では有効でない。図 2 8 に 6 極電磁石によるクロマティシティ補正の様子を示す。

6 極電磁石の場合もコイルスロットを設けるため、理想的磁極線の裾を切断する。4 極電磁石と同じく、磁極シムを設けることによって 6 極磁場の一様性が改善できる。

6 極電磁石でも楕円形のビームアパーチャに合わせた非対称な設計もなされている。図 2 9 は対称な構造をもち、各磁極のアンペアターンは同じである。しかし、非対称になれば図

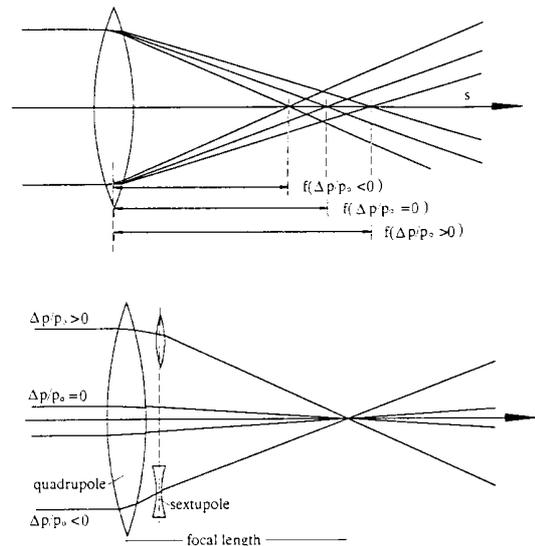


図 2 8 6 極電磁石によるクロマティシティ補正、上 = 補正前、下 = 補正後。

30のように中心軸から各磁極までの距離が異なるため、各磁極のアンペアターンは同じではない。90度と270度磁極までの距離を $a_1$ 、 $\pm 30$ 度と $\pm 150$ 度の磁極までの距離を $a_2$ とすれば、これら2種類の磁極のアンペアターン比は

$$\frac{(Ni)_1}{(Ni)_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \quad (57)$$

で与えられる。非対称な設計の長所は全体のアンペアターンが減少し、したがって電力が低減できる。さらに、コイルを挿入するために上下の2分割ですむことである。アンペアターンは $a_1$ 、 $a_2$ の3乗に比例するため、90度と270度磁極のアンペアターンは極めて少ない。

対称な設計では鉄心は少なくとも3分割にしなければならない。表4はこれら2種類のパラメータを比較したものである。

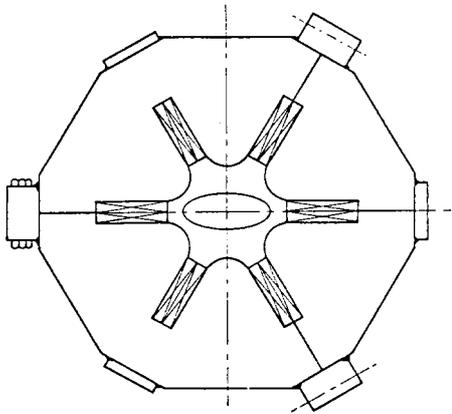


図29 対称6極電磁石。

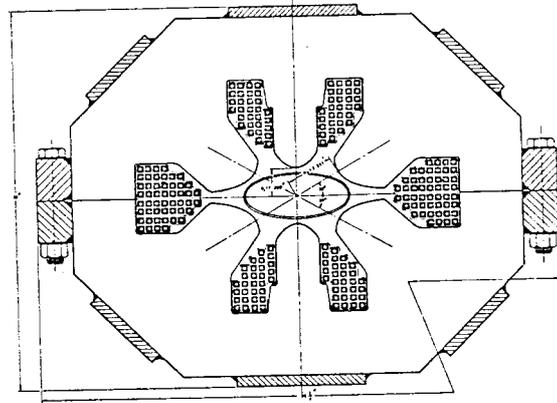


図30 非対称6極電磁石。

表4 対称、非対称6極電磁石のパラメータ比較

	対称	非対称	
6極磁場強さ	394	394	T/m <sup>2</sup>
$a_1$	-	33.3	mm
$a_2$	65.5	56.6	mm
$a_1$ 磁極最大AT	-	1,910	AT
$a_2$ 磁極最大AT	14,600	9,520	AT
全アンペアターン	87,600	41,900	AT
デューティファクター		0.5	0.5
rms電流密度	7.6	3.0	A/mm <sup>2</sup>
電力	7.5	1.4	kW

## 2. 特殊な電磁石

特殊な電磁石として、入出射用電磁石や補正電磁石がある。前者はリングへビームを入射、またはリングからビームを取り出すとき必要になる。補正電磁石には軌道補正のステアリング電磁石、収束磁場補正のトリム4極電磁石、クロマティシティ補正の6極電磁石があるが、取り扱いはいずれも2極、4極、6極の各電磁石に同じである。ここでは1台の電磁石に複数の磁場成分を重畳できる特殊な構造の電磁石を扱う。

### 2.1 セプタム電磁石 (septum magnet)

ゼロ磁場が要求される直線部に強い電磁石を置く場合を考える。例えばビームを2方向に分けるため、2つの領域を電流シートまたは鉄シートで分離する。

#### [1] 電流シート型セプタム

この設計の原理を図3-1に示す。リングの中を周回するビームとリングからセプタム電磁石内に取り出されたビームを分離するコイルがセプタム(コイル)である。このセプタムに許される厚さは取出ビームがリング内の周回ビームから離れている空間的な距離である。この距離は取出直後で非常に短い。周回ビームに磁場を及ぼさないため、セプタムの外側で磁場をゼロにしなければならない。断面積の小さな導体に大電流を流すため、コイルの冷却と電磁力に対する支持方法が重要になる。セプタムを流れる電流密度は近似的に

$$J [A/mm^2] = \frac{1000B [T]}{4\pi t [mm]} \quad (58)$$

で与えられる。 $B=1T, t=1mm$ とすれば、 $J=800 A/mm^2$ である。これはリングの電磁石の約100倍に相当する。電流密度が大きいためセプタムの冷却に注意が必要で、一般にパルス励磁される。またコイルはビームの直撃を受けるため耐放射線性が要求されるので、セラミックスなどの無機質の絶縁が施される。

リングへのビーム入射においても入射用セプタム電磁石が使用され同じような状況が発生する。セプタムの外で磁場を完全にゼロにすることは困難で、セプタムの位置の調整やセプタムの外側にミュメタルのような透磁率の大きな磁気シールド板を設けて漏れ磁場を小さくする。

電磁石をトランスとして使用し、短絡した2次回路を構成するセプタムに電流を誘導させ

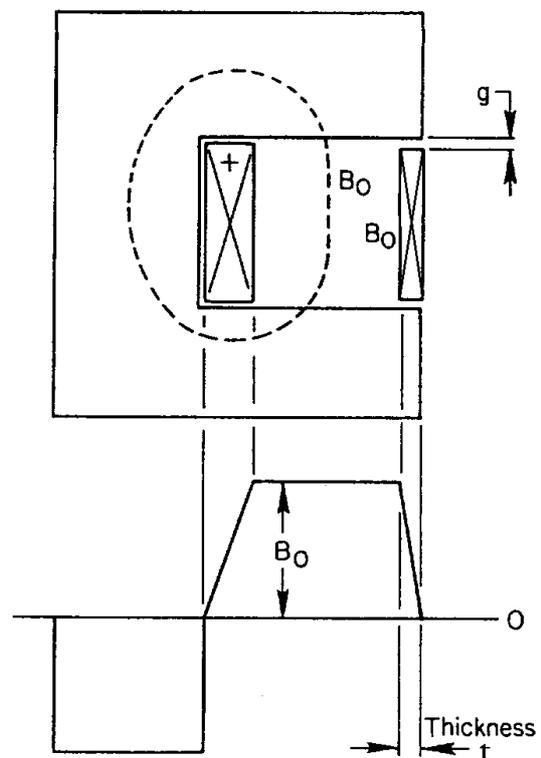
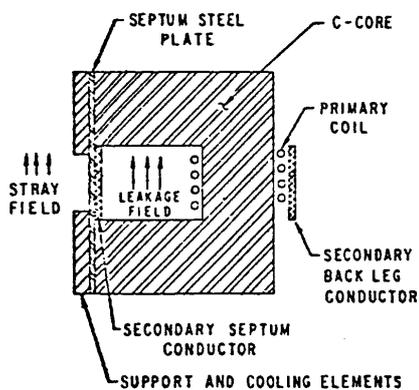


図3-1 電流シート型セプタムの原理図。

る設計もある (図 3 2 (a))。これはANLの大強度パルス中性子源用に開発された速い繰返しのビーム取出用セプタム電磁石である。セプタムは2次コイルの銅板に鋼板を張り合わせたもので、この鋼板を通る磁束に相当して2次コイル(銅セプタム)に電流が流れ漏れ磁場を打ち消す。磁場は1次コイルの電流(10.4 kA、9.5 kG)で決まるためセプタムの冷却が楽になる。図 3 2 (b)は同軸導体を採用する電流シート型セプタムで、Fermilabのブースターと主リングの間の8 GeV陽子のビーム輸送ラインに使用されている。薄いセプタムと一体になっている断面積の大きな外部導体により大電流励磁(20 kA、8.8 kG)が容易である。

(a) transformer coupling



(b) coaxial conductor

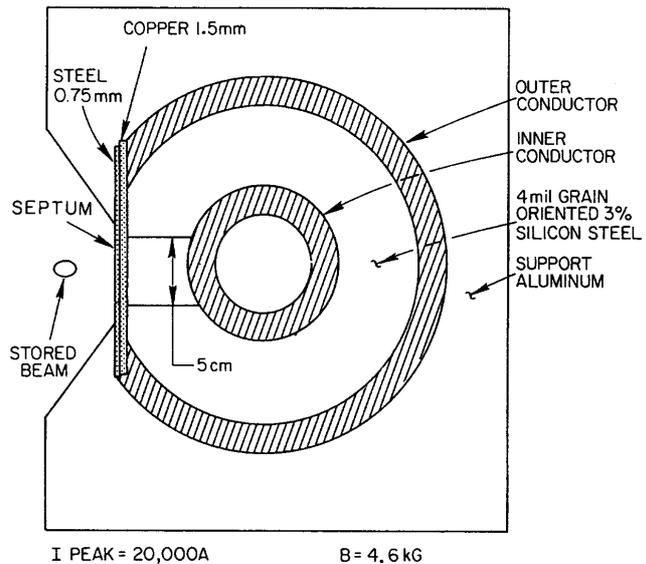


図 3 2 (a) トランス結合のあるセプタム (10.4 kA、9.5 kG)、(b) 同軸導体によるセプタム (20 kA、8.8 kG)。

[2] 鉄シート型セプタム電磁石

図 3 3 はLambertsonセプタム電磁石である。コイルによって発生する磁場はセプタムに垂直であるが、周回ビームが通るスロットは薄い鉄セプタムを介して鉄心で囲まれ、磁束は鉄心の中を通り周回ビームの受ける磁場は実質的にゼロである。コイルの電流密度を制限する問題はないが、実用的には磁場は飽和の起こらない10kG程度に制限する。鉄セプタムには多くの変形がある。例えば、図 3 4 に示す2重セプタムは縦長の断面をもつビームを3つに分けて実

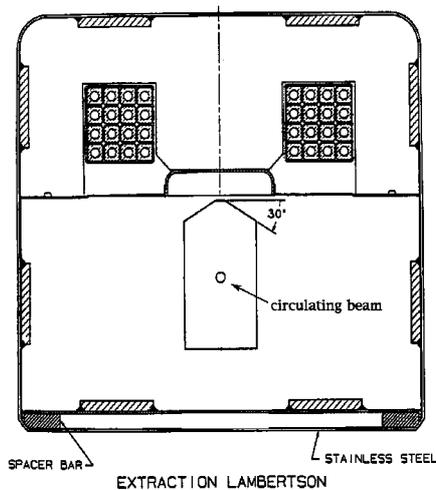


図 3 3 ビーム取出用 Lambertson セプタム電磁石。

験エリアに同時に供給するためにCERNで使用されているものである。

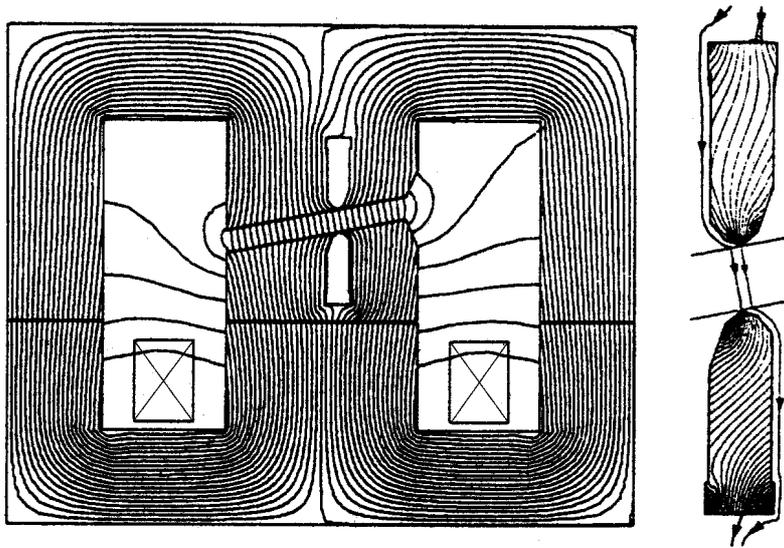


図34 2重鉄セプタム電磁石(CERNSPS)、  
取出ビームを3方向に  
振り分ける。

## 2.2 多極電磁石

加速器や蓄積リングでは主電磁石から発生する高次の多極成分を補正するための補正電磁石が必要になる。この補正には水平垂直運動の線形結合を補正するスクュー4極、クロマティシティ補正用の6極電磁石、Landauダンピングを与える8極電磁石が含まれる。

クロマティシティ補正の6極磁場が主であるが、各コイルの電流分布を制御することによって1台の電磁石で任意の強さ、回転角をもつ10極までの多極成分を重畳させて発生できるようにした電磁石を図35に示す。これは12個

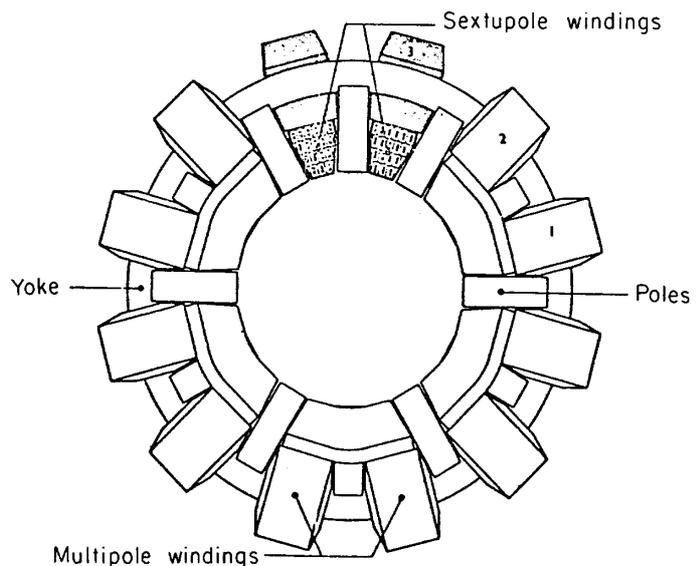


図35 6極+多極補正電磁石。

の磁極を有し、比較的大きな口径をもつ。この理由は磁極近傍では磁場の歪みがひどいためである。このため利用できる磁場は弱く、加速器での補正量も小さい。

## 3. ラップッドサイクルシンクロトロン電磁石

上で扱ったシンクロトロン電磁石はスローサイクル、すなわち繰返しの遅いシンクロトロン用のものであったが、繰返しが数10サイクルの所謂ラップッドサイクルシンクロトロンでは電磁石に特別の考慮が必要である。繰返しを速くする理由は単位時間あたり

のビーム強度を大きくするためである。繰返しは商用周波数に合わせたものが多い。

図3 6はプリンストン大学で建設された繰返し60サイクルの10 GeV電子シンクロトロン機能結合型電磁石の断面である。電磁石の鉄心外側を覆っているSUSが真空チェンバーの役目を果たしている。すなわち、真空チェンバーの中に電磁石全体が入っている構造になっている。鉄心はラミネーションをエポキシ樹脂で接着した非溶接構造である。もし溶接すれば、溶接部が鉄心中に発生した渦電流の通路になって、磁場が渦電流の影響を受ける。コイルは水冷却用の銅パイプの周りに銅細線を撚った導体を使用されている。これも60Hzで励磁することによる導体中の渦電流損失を低減するためである。冷却水の銅パイプにも渦電流が流れるので、これを低減するために図3 7に示すような電気抵抗の大きなSUSパイプの使用が望ましい。

また、電磁石の端部においてラミネーションを貫くように磁束が通る。このため端部の鉄心中に渦電流が発生する。これを押さえるため、電磁石端部を図3 8に示すように近似的にロゴスキー (Logowski) 曲線

$$\frac{z}{d} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \exp\left(\pi \frac{x}{d}\right) \right) \quad (59)$$

になるようにカットする。ここで、 $d$ はギャップの全高である。ロゴスキー曲線にした場合鉄心コーナー部の局所的な飽和がなくなって磁束分布が一様になり、磁場の強さによらずフリンジング磁場分布の形がほぼ同じになる。図3 9にロゴスキーカットした場合としない場合(角型エッジ)の場合の磁場の分布を比較する。

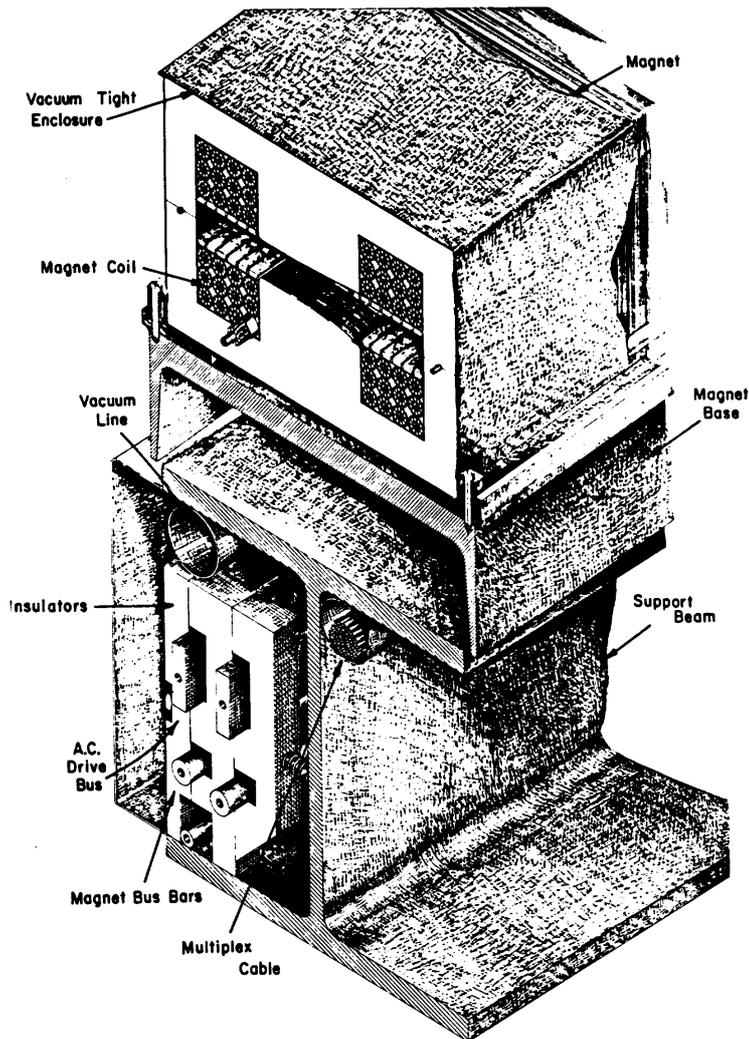


図3 6 コーネル大学  
60サイクル10 GeV  
電子シンクロトロン電  
磁石断面。

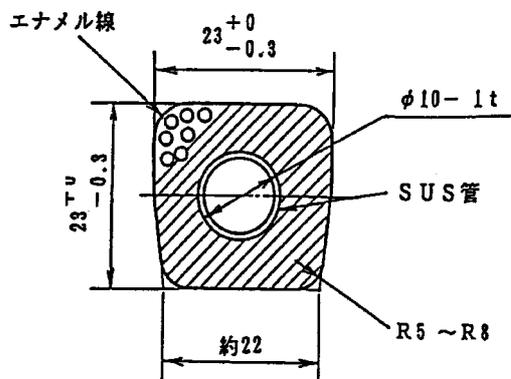


図37 KEKのラピッドサイクルのモデル電磁石用に開発したコイル導体。フィラメントは直径2.2mmのエナメル絶縁線、72本撚り。冷却水SUSパイプは内径10mm、肉厚1mm。断面が台形状になっているのはコイルに巻いたとき内側が膨らむことを考慮したためである。

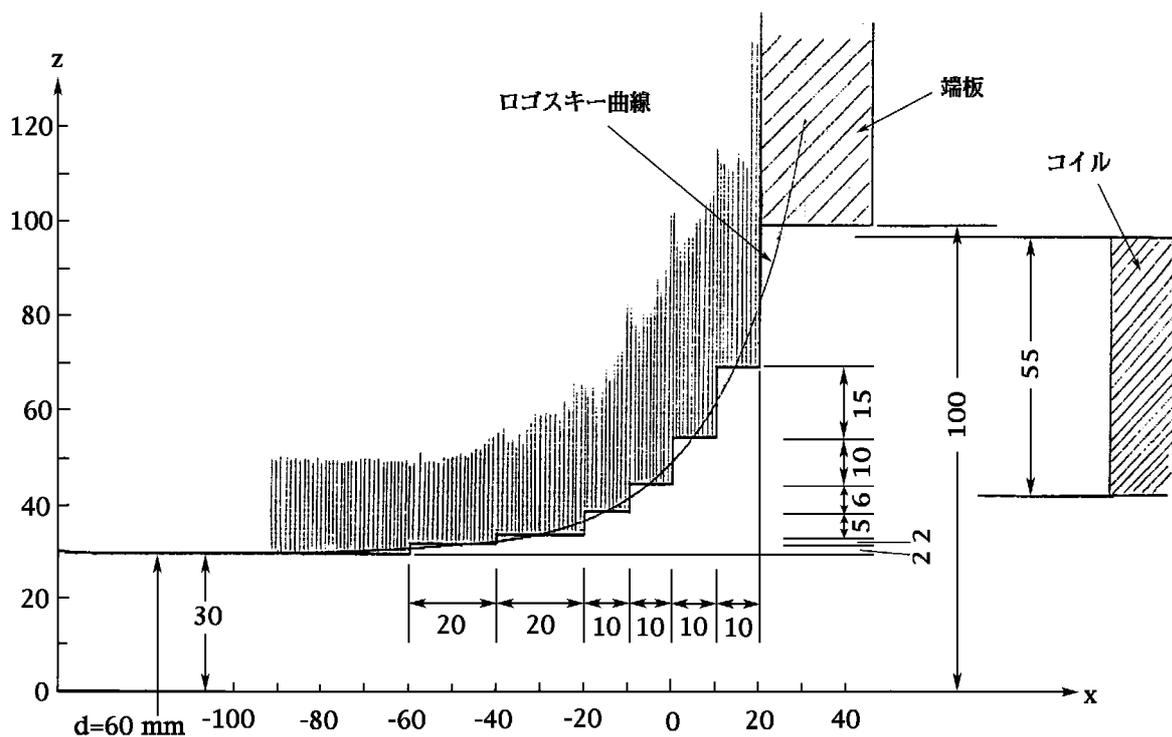


図38 KEKラピッドサイクル用モデル電磁石の端部のログスキーカット。ギャップは60mm。

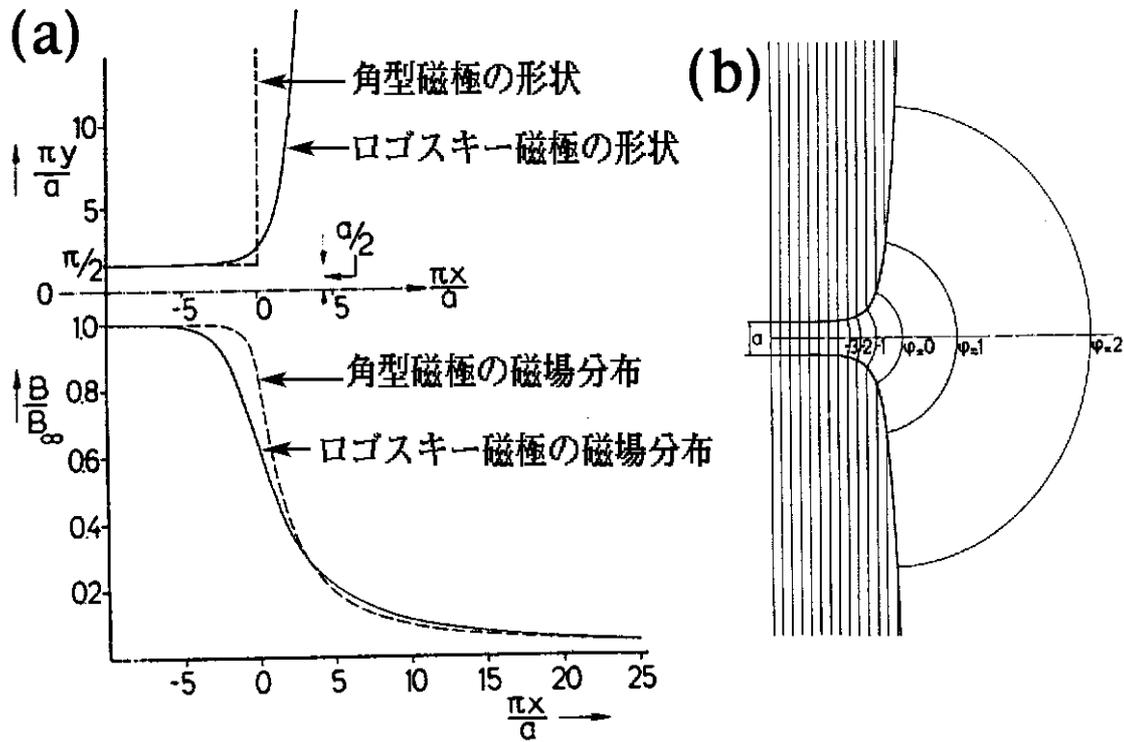


図39 (a) 磁極コーナー部の形状による磁場分布、  
 (b) ロゴスキー形状による磁力線の分布。

-----ここでちょっとコーヒータイト-----

「電磁石を支える地盤の安定度」

加速器建設の最初の段階で建設場所の選択は重要である。局所的沈下は不等沈下と呼ばれ、事前の地質調査で将来どの程度の沈下が起こるか予測できる。TRISTAN-MR（現KEKB）トンネルやAR（現PF-AR）トンネルはそれぞれ地下11m、4mの砂礫層に乗っていて比較的沈下が起こりにくいと考えられる。地盤が弱い場合にはコンクリート杭を打ち込んでトンネルを支えなければならないが、実験室を除きこれらのトンネルにはコンクリート杭を使用していない。事前調査で10cm程度の一様な沈下があると推測されている。筑波地区は関東ローム層（火山灰土）が厚く安定な岩盤まで深さ200mもあり、この深さまでコンクリート杭を打ち込むことはとても不経済である。PSトンネルについても事前調査が行われている。この場合、放射線がトンネル上方に漏れて、上層大気で散乱されて地表に降り注ぐスカイシャイン放射線を防ぐための土盛り重量が電磁石重量より圧倒的に重く、この重量を支えるため地下40mまでコンクリート杭を密に打ち込んである。参考までに、杭1本が約10万円もするので、一ヶ所あたり40万円で支えている勘定になる。大型加速器になればなるほどトンネルを支えるコンクリート杭の数は増加する。加速器の設置場所の選択でこのような投資を避けることができれば、大幅な建設費用の

節約になる。

現在は地下に加速器のトンネルを作ることが一般的になってきたが、シールドマシンによるトンネルの掘削費用も馬鹿にならない。TRISTAN建設時の掘削コストの比較からオープンカット方式が選択された。これによる節約は数億円である。費用とは直接の関係はないが、地下深くに建設するメリットは、加速器運転中でも地上が自由に使用できることと、トンネルで除去される土の重量とトンネル建屋を含む加速器の重量がほぼ同じになるので地盤の変動が少ないことである。

話は飛ぶが、CERNのLEPは一周27kmにも及び、東京の山の手線に匹敵する規模の巨大加速器で、地下60mに建設されている。スイスとフランスの国境を跨ぎ、トンネル内に国境が現れる。このような広大な土地を研究所として確保することは困難で、地下に土地所有権が及ばない条件で地表では農耕が行われている。DESYのHERAは市街地の地下に建設されていて、地上では加速器とは無関係に市民生活が営まれている。加速器が巨大化すれば必然的にこのような設置形態が必要になるが、日本の場合には地下の所有権の制限について明確な定義がなされていない。昨今ジオフロントととして深部地下の積極的活用が促されているが、地下鉄トンネルや大量の雨水を放流する暗渠の建設で蓄積されたシールド工法の技術は加速器のトンネルに直ちに適用できる。

CERNでは地下深くに建設された一周6kmのSPS（現Sp̄pS）トンネルの掘削のためにシールドマシンを誘導するジャイロスコープが開発され威力を発揮した。この技術は自動車のナビゲーション装置にも応用されているものであるが、人工衛星からの電波が届かないトンネル内走行に利用される。アメリカではSSCがシールド工法の加速器への適用の最初の候補であったが、残念ながら加速器そのものの計画が取りやめになった。

-----コーヒータイム、終わり-----

## 第5章 常伝導電磁石の鉄心材料

加速器に要求される電磁石の磁場性能には非常に厳しい精度が要求される。鉄は鉄心の優れた磁性材料であるが、電磁石の性能は工作精度は勿論のこと、使用される磁性体の性質に大きく依存する。加速器の電磁石としての性能を発揮させるためには、磁氣的性質の他に、品質の一様性も要求される。加速器が大型になれば、使用される鋼板の量も多くなり、数力月から1年以上にわたって徐々に納入されるため、その期間の製鉄の状況により鉄の磁氣的性質が変化する可能性がある。このような事態を避けるため一度に購入しようとするれば、その保管場所に困る。長期にわたって品質を一定に保つ努力は加速器の電磁石にとって重要である。強磁性体としての鉄の性質を理解することは、電磁石の性能を保証する上で重要である。

### 1. 強磁性体の性質と種類

物質中の磁界の強さと磁化の強さの関係は物質によって異り、つぎの3種類に分類される。

- 1) 反磁性体：磁場と反対の方向に僅かに磁化される物質 (Cu, Pb, Au, 水など)
- 2) 常磁性体：磁場の方向に僅かに磁化される物質 (Mn, Al, Na, 空気など)
- 3) 強磁性体：磁場の方向に強く磁化される物質 (Fe, Ni, Coなど)

強磁性体にくらべ反磁性体と常磁性体は殆ど磁化されないので非磁性体とも呼ばれる。強磁性体は用途により軟磁性材料と硬磁性材料に区別される。軟磁性材料は磁化が大きく、ヒステリシス損の小さい材料、硬磁性材料は保磁力の大きな材料である。電磁石に使用される鉄は軟磁性材料 (soft magnetic material) に属する。

#### 1.1 強磁性体の磁化特性

鉄のような強磁性体は多くの結晶粒から構成され、各結晶粒の中には勝手な方向を向いた沢山の磁区が存在している。磁区の境界を磁壁と呼び、一つの磁区の中では磁化しやすい方向（容易磁化方向）に磁化されている。磁化していない状態ではめ

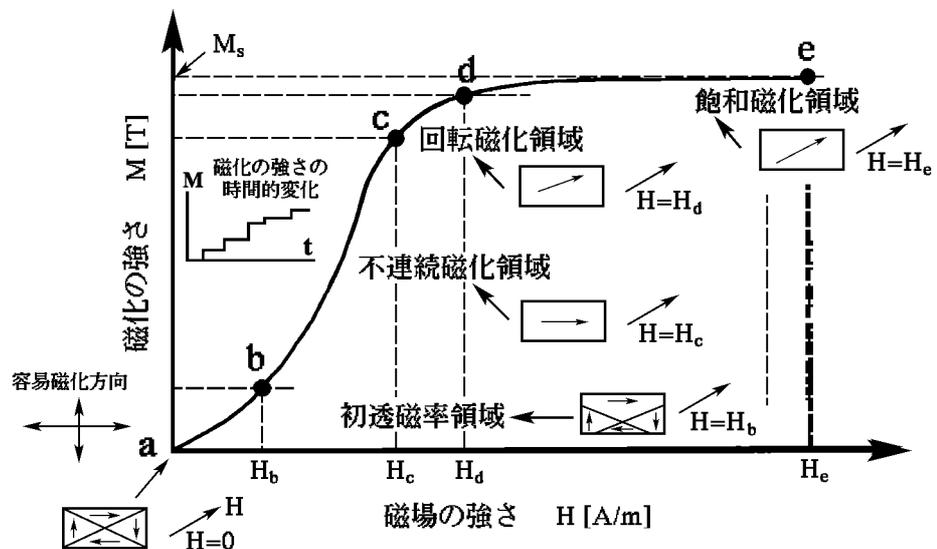


図1 強磁性体の磁化曲線。

いめいの磁区による磁場がお互いに打ち消しあって強磁性体の外部に磁場を示さない（消磁状態）が、外部磁場をかければその強さに応じて図1のように磁化される。磁化曲線は実用的な理由から磁化  $M = M(H)$  の代わりに図2に示すように磁束密度  $B = B(H)$  でも示される。電磁石の設計に使用される透磁率  $\mu$  は

$$\mu = B / H \quad (1)$$

で定義される。ただし、 $B$ は磁束密度[T]、 $H$ は磁化力（外部磁界の強さ）[A/m]である。透磁率は真空の透磁率  $\mu_0 (= 4\pi \times 10^{-7} [T \cdot m / A])$  を用いて、

$$\mu = \mu_r \mu_0 \quad (2)$$

と表わされ、 $\mu_r$ は比透磁率と呼ばれる無次元量である。図3に透磁率による磁性体の分類を示す。

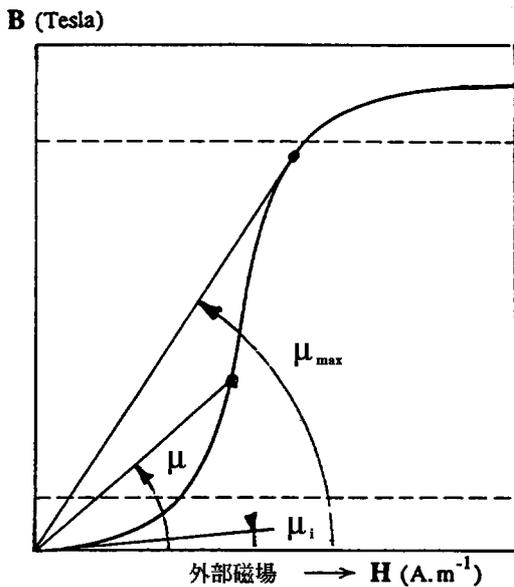


図2 初期磁化曲線と透磁率の定義。

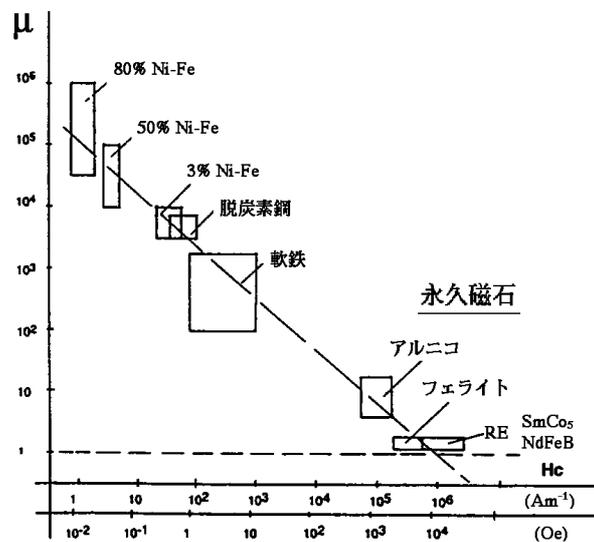


図3 磁性材料の透磁率による分類。

図1では容易磁化方向を上下方向と左右方向に選んでいる。図示したように斜めの方向に外部磁場を与え、徐々にその強さを強くしていく。最初、強磁性体は完全な消磁状態にあり、磁力線は強磁性体内部を巡り外部に対して磁化を示さない。

外部磁場をa-->bの間で強くしていけば、磁壁の移動によって外部磁界の方向に近い磁化方向をもつ磁区が成長して大きくなる。この区間は初透磁率領域と呼ばれる。この領域では磁束密度が有限の傾きで磁界Hとともに上昇する。すなわち、

$$B = \mu_i H + v H^2 \quad (3)$$

ここで  $v = d\mu / dH$  は定数である。この領域は可逆的でHをゼロに戻せば、近似的に同じ曲線に戻る（厳密には可逆的でない）。 $dB / dH = \mu_i$  を初透磁率と呼ぶ。

さらに外部磁場を強くして図1のb-->cの領域に至れば非可逆磁壁移動が起こる。この領域では磁壁の位置によるエネルギーの変化があるため、外部磁界を取り去っても磁壁が移動した近傍にある極小点に磁壁がひかかり、元に戻らないことによる。磁壁を束縛する原因として、内部応力、非磁性夾雑物、格子欠陥などが考えられる。この領域は比透磁率  $dB / dH$  が大きなところである。ここでは最早可逆的でなく、Hを減少させれば全

く異なる曲線をたどる。比透磁率の最大値は $10^6$ にもなるものがある。図1の中に描いた磁化の強さの時間的変化において磁化が不連続に変化する。このような変化はバルクハウゼン ( Barkhausen ) 効果と呼ばれ、磁区が存在することを示唆している。

磁壁の移動が完了した状態では強磁性体全体が一つの磁区になり磁壁は存在しない。これ以上に外部磁場を強くすれば磁化方向が磁化容易軸から回転して外部磁場の方向に向きを変えるc->dの可逆回転磁化領域になり、ついには最大限まで磁化された飽和状態に達する。この領域では $dB/dH$ は小さくなり、比透磁率は

$$\frac{1}{\mu} = a + bH \tag{4}$$

で近似される。ここで曲線は広い範囲で可逆的になり、 $dB/dH = const$ の関係がある。

非可逆回転磁化は一般に非常に強い磁界を必要とする。通常の磁性体ではこのような磁界に達する前に非可逆磁壁移動が起こるので、非可逆磁化は殆どすべて磁壁移動で行われる。

### 1.2 ヒステリシス・ループ

図1の飽和状態から磁場を下げていけば、図4のようにCDと減少し、 $H = 0$ でもODに相当する磁化が残る。これを残留磁束密度 (residual flux density) または残留磁化 (residual magnetization) と呼ぶ。磁場を負の方向に増やせば、E点で磁化はゼロになる。このOEの値を保磁力 (coercive force) と呼ぶ。磁場をさらに負の方向に増加させれば、F点で負の方向に飽和する。ここで、今度は正の方向に磁場を増やせばFGCの経路を通して正に飽和する。このように磁場を正->ゼロ->負->ゼロ->正と一巡させることによって描かれる曲線をヒステリシスループ (hysteresis loop) と呼ぶ。OBCは初期磁化曲線と呼ばれ、消磁状態から出発した場合にのみ得られる。不連続磁化または回転磁化の領域に達したあと磁場を一順させればヒステリシスループが現れる。ヒステリシスループを一順する間になされる仕事は、ヒステリシスループの囲む面積に相当し、すべて熱エネルギーとして失われる (ヒステリシス損)。

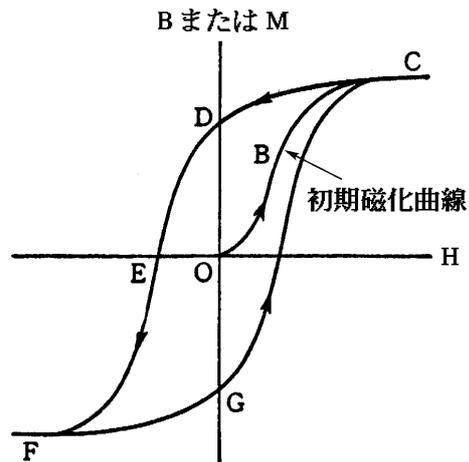


図4 ヒステリシス曲線。

### 1.3 比透磁率

外部磁場の強さが  $H$  のときの強磁性体の磁束密度を  $B$  とすれば、

$$B = \mu H = \mu_r \mu_0 H \tag{5}$$

の関係が成立する。強磁性体の磁化の強さを  $M$  とするとき磁束密度は

$$B = \mu_0 H + M \quad (6)$$

で与えられる。これより、

$$M = B - \mu_0 H = \mu_0 (\mu_r - 1) H \quad (7)$$

磁化の強さは磁化率  $\chi$  (magnetic susceptibility) を用いて

$$M = \chi H \quad (8)$$

で定義されるので、比透磁率は磁化率と

$$\mu_r = \frac{\chi}{\mu_0} + 1 \quad (9)$$

の関係にある。

シンクロトロンでは電磁石はパルス励磁されるが通常は片極性で使用されるので、磁場計算に使用される強磁性体の磁

気特性は図5に  $B-H$  で示す初期磁化曲線である。さらに、加速器の磁場計算コードで一般的に使用される透磁率は、磁束密度の単位を[Gauss]、磁場の強さの単位を[Oe]で表したときの  $B$  と  $H$  の比 (比透磁率  $\mu_r = B/H$ ) である。すなわち、

$$\text{比透磁率} \quad \mu_r = \frac{B[T]}{\mu_0 [H/m] H[A/m]} = \frac{B[G]}{H[Oe]} \quad (10)$$

である。図5において透磁率の定義として

$$\text{初透磁率} \quad \mu_i = \lim_{H \rightarrow 0} \frac{B}{\mu_0 H} = \tan \alpha$$

$$\text{最大透磁率} \quad \mu_m = \tan \beta$$

$$\text{微分透磁率} \quad \mu_d = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}$$

$$\text{増分透磁率} \quad \mu = \frac{1}{\mu_0} \frac{B}{H}$$

の区別がある。

図6のようにヒステリシスループの途中で磁場の強さを少し下げて元に戻せばマイナーループと呼ばれるヒステリシスを示す。これは初期磁化曲線においても現れる。電磁石の磁場を微調整するときこのようなループを描くので同じ励磁電流でも電流を下げる方向で調整するときと、電流を上げる方向で調整するときで磁場が異なる。

#### 1.4 強磁性の発生

原子核のまわりを周回する電子の軌道運動を考える。図7のように半径  $r$  の軌道を円運動する質量  $m$  の電子の角運動量を  $P$ 、磁気モーメントを  $M$  とすれば、

$$P = mvr = m\omega r^2 [kg \cdot m^2 / s] \quad (11)$$

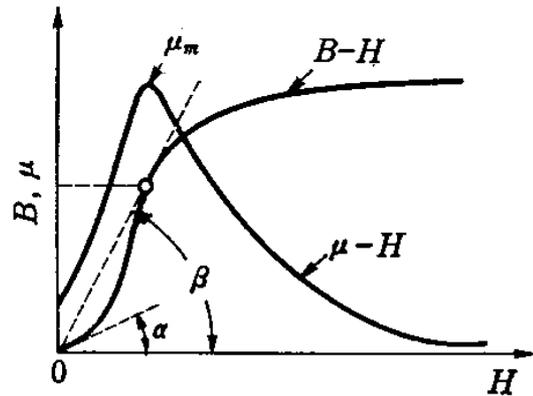


図5 B-H特性と透磁率。

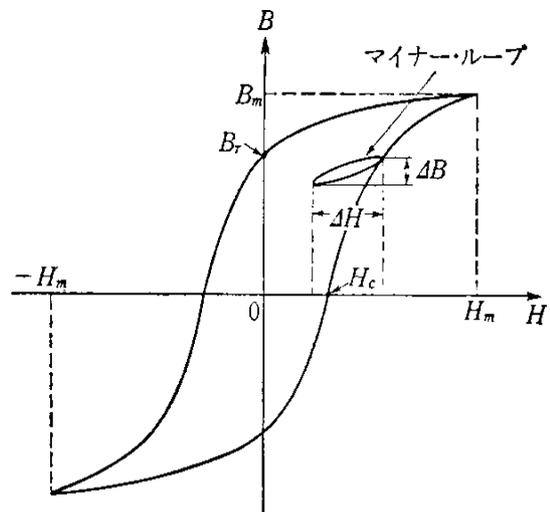


図6 マイナーループ。

$$M = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2m} P \text{ [Wb m]} \quad (12)$$

である。ここで、角運動量は

$$P = (\text{orbit radius}) \times (\text{momentum}) = mvr \text{ [kg m}^2 \text{/s]}$$

磁気モーメントは

$$M = (\text{current}) \times (\text{area}) = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 \text{ [Wb m]}$$

で与えられる。(12)は円軌道上を回転する電子軌道の磁気モーメントであるが、電子自身の軸にまわりに自転（スピン回転）もしている。このため電子は軌道運動の他に、スピンによる角運動量と磁気モーメントも合わせ持っている。(12)において磁気モーメントと角運動量の比 ( $M/P$ ) を求めれば、軌道運動の場合、

$$\frac{M}{P} = \frac{e}{2m} \text{ (軌道運動)}$$

であるが、スピン運動の場合には量子力学から

$$\frac{M}{P} = \frac{e}{m} \text{ (スピン運動)}$$

で与えられ、粒子の自転による固有の角運動量をスピンと呼ぶ。電子スピンによる磁気モーメントは球形に電荷を帯びた電子の自転によるものである。

電子の軌道運動と自転運動の合計として全角運動量（または全磁気モーメント）が存在する。 $M$ と $P$ の方向を考慮してベクトルとして扱えば電子の場合、

$$\mathbf{M} = g \frac{e}{2m} \mathbf{P} \quad (13)$$

と表わされる。軌道運動に対して $g=1$ 、スピン運動に対して $g=2$ とする。この $g$ はランダウの $g$ 因子またはジャイロ磁気係数 (gyromagneticratio) と呼ばれる。電子の場合電荷は負であるので、(13)式では $M$ と $P$ がお互いに逆方向を向くことを考慮している。

陽子や中性子の場合

$$\mathbf{M} = g \frac{e}{2m_n} \mathbf{P}$$

で与えられる。陽子に対して $g=2.7$ 、中性子に対して $g=-1.9$ である。 $m_n$ は陽子または中性子の質量である。 $m_n$ は電子の質量に比べて非常に大きい（約2000倍）ので、全磁気モーメントに対する寄与は電子に比べてはるかに小さい。

物質を構成する粒子（陽子、中性子、電子）はそれぞれ固有角運動量（スピン）をもつ。ある軸方向（ここでは $z$ 方向とする）のスピン成分の測定から、

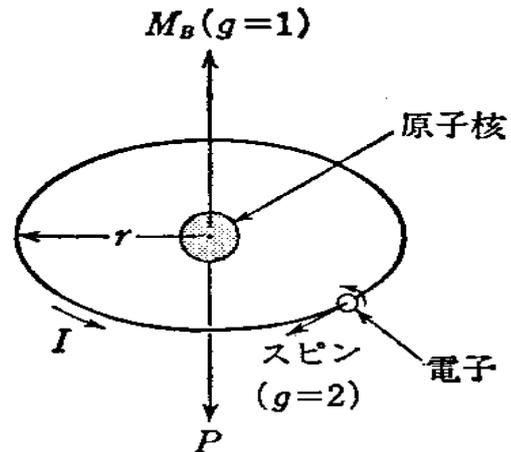


図7 電子の軌道運動とスピン運動による磁気モーメント。

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2} \quad (14)$$

なる2つの可能な値が存在する。すなわち、この軸方向の磁気モーメントは(13)から

$$M_z = \pm \frac{g}{2} \frac{e\hbar}{2m} \quad (15)$$

となる。ここで、 $\hbar = h/2\pi = 1.054 \times 10^{-34} [J \cdot s]$  はプランク定数である。括弧内はボーア磁子と呼ばれるもので、

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 0.93 \times 10^{-23} [A \cdot m^2] \quad (16)$$

である。

角運動量に比例する磁気モーメントを持っている帰結として、磁場中の電子のスピンは磁場方向のまわりに歳差運動する。磁気モーメント  $\mathbf{M}$  は磁場  $\mathbf{B}$  によって  $\mathbf{M} \times \mathbf{B}$  なるトルク  $\mathbf{T}$  を受ける。

$$\mathbf{T} = \mathbf{M} \times \mathbf{B} \quad (17)$$

もし角運動量が磁気モーメントに平行であれば、(17)にしたがってトルクを受けない。図8に示すように角運動量  $\mathbf{P}$  が磁場の方向に対して同じ角度を維持しながら時間  $t$  の間に  $\mathbf{P}$  から  $\mathbf{P}'$  に移るとすれば、角運動量の変化  $d\mathbf{P}$  は

$$d\mathbf{P} = (P \sin\theta)(\omega dt)$$

である。ここで、 $\omega$  は歳差運動の角速度である。

すなわち、

$$\frac{dP}{dt} = \omega P \sin\theta \quad (18)$$

トルクは角運動量が時間的に変化する割合であるので、

$$T = MB \sin\theta = \omega P \sin\theta \quad (19)$$

したがって、歳差運動の角速度は

$$\omega = \frac{M}{P} B \quad (20)$$

で与えられる。すなわち、電子スピンの歳差運動の角速度は

$$\omega = -g \frac{eB}{2m} \quad (21)$$

である。

強磁性体の磁化は原子内部の電子のスピンのよるものである。鉄の場合強磁性に關係する電子は不対電子とよばれる2個の電子スピンの關係する。十分強い外部磁場のもとでこの2個の電子に付随するボーア磁子がすべて同じ方向に加え合わされば

$$\begin{aligned} M_{sat} &= 2n\mu_B = \frac{N_A \rho}{A} 2\mu_B \\ &= \frac{(6.02 \times 10^{23})(7.9 \times 10^6)}{55.6} (2)(0.93 \times 10^{-23}) = 1.59 \times 10^6 [A/m] \end{aligned} \quad (22)$$

なる飽和磁化を示すことになる。ここで、 $N_A$  はアボガドロ数[個数/mol]、 $A$  は質量数、

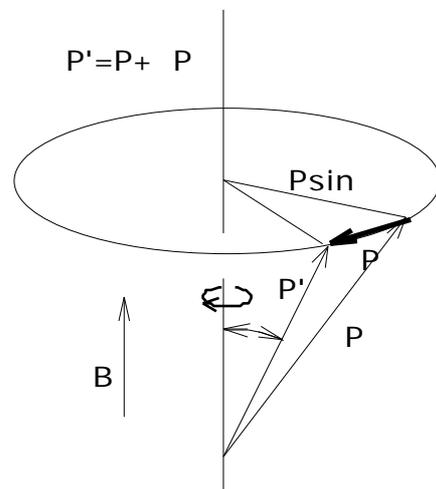


図8 磁場中における電子スピンの歳差運動。

$\rho$ は密度[g/m<sup>3</sup>]である。これを磁場に直せば、

$$B_s = \mu_0 M_{sat} = (4\pi \times 10^{-7} [H/m])(1.59 \times 10^6 [A/m]) = 2.0 [T]$$

となり、鉄の飽和磁場の測定値に近い値が得られる。このように電子スピンの磁場方向に整列することが強磁性の原因である（アインシュタイン・ド・ハース効果）。

磁性体に限らず、あらゆる物質は各種の原子から構成されている。原子は原子核と電子から構成される。また、原子核は陽子と中性子から構成され、陽子の数に等しい数の電子が原子核の周りの閉じた軌道上を回転運動している。個々の電子はそれぞれに固有の軌道をもつ。1つの軌道を占める電子の数は決まっています、電子数が増えれば（すなわち、原子番号が大きくなれば）、内側の軌道から溢れた電子は回転半径の大きな外側の軌道を占めることになる。鉄の原子番号は $Z = 26$ （原子量は $A = 56$ ）であるので、電子数は26である（中性子の数は $A - Z = 30$ ）。電子軌道は内側から順に1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, 4s, 4p, 4d, 4f, .....の殻（シェル、shell）があり、入り得る電子数は順に2, 2, 6, 2, 6, 10, 2, 6, 10, 14, .....である。鉄の場合、26個の電子は順に2, 2, 6, 2, 6, 6, 2個になっている。すなわち、3d殻に入るはずの電子2個がその外側の4s殻を占める。このように内側の殻を空けたまま、外側の殻を占領するような電子配置をもつ元素（Mn, Fe, Co, Ni）は遷移元素と呼ばれ、Mn以外は強磁性を示す（Mnは非磁性元素（Sb, Bi, S, Snなど）と合金をつくることによって強磁性を示す）。1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, .....殻には上向きと下向きのスピンをもつ電子が1個ずつ対をなして入るのが通常であるが、鉄の場合には3d殻には上向きスピンの電子が5個、下向きスピンの電子が1個、差し引き4個の上向きスピンの対をなさないで取り残される。この4個の電子が強磁性に関係する（孤立原子の場合不對スピンは4個であるが、結晶状態では2個の不對スピンの強磁性に参与する）。外部磁場がなくても1つの鉄原子のスピンの向きに引きずられて隣の鉄原子のスピンの向きも同じ方向に向く力が働く。このような力は外部磁界によらない量

表1 強磁性を示す原子の電子配列

殻 shell	副殻 sub-shell	副殻の 電子数	反強磁性 Mn	強磁性 Fe	強磁性 Co	強磁性 Ni	反磁性 Cu	反磁性 Zn
1	1s	2	2	2	2	2	2	2
2	2s	2	2	2	2	2	2	2
	2p	6	6	6	6	6	6	6
3	3s	2	2	2	2	2	2	2
	3p	6	6	6	6	6	6	6
	3d	10	5	6	7	8	10	10
4	4s	2	2	2	2	2	1	2
	4p	6	-	-	-	-	-	-
	4d	10	-	-	-	-	-	-
	4f	14	-	-	-	-	-	-

量子力学的なもので交換力と呼ばれる。交換力によって自発的にスピンの向きが揃うことによって磁化が起こっている。これを自発磁化と呼んでいる。

自発磁化されているのに、外部磁場を加えなければ磁性を示さないのは何故か？この疑問に対して、強磁性体は「磁区と呼ばれる構造をもつ」という今日の考え方に発展した。図9の示す磁区構造のため、それぞれの磁区が勝手な方向を向いていて、全体として打ち消しあって磁化を示さない。外部磁場を加えることによって磁区がその方向に揃い、強い磁化を示すようになるのである。図1は外部磁場による磁区構造の変化を模式的に示したものである。

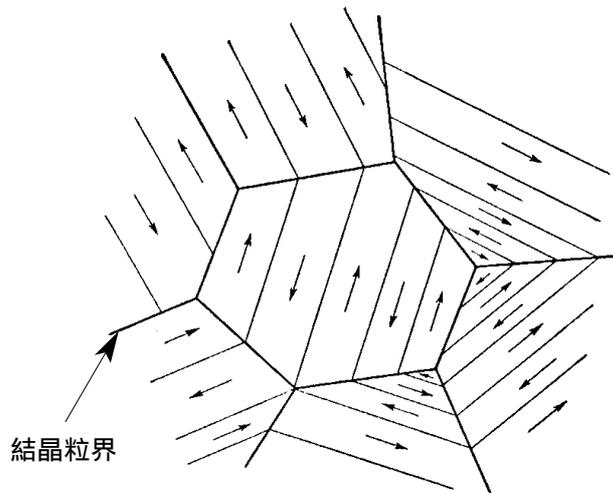


図9 磁化されていない強磁性体の磁区構造。

Feの電子軌道を例にとれば、

電子軌道	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s
+ スピン電子数	1	1	3	1	3	5	1
- スピン電子数	1	1	3	1	3	1	1
相殺されないスピン	0	0	0	0	0	+4	0

である。強磁性発生の条件は、

- (1) 相殺されないスピンの存在
- (2) 隣接原子間の交換相互作用の存在

である。強磁性体内部でスピンを平行に保つ力は交換力 (exchange force) と呼ばれる量子力学的な力で、スピン  $S_1$  とスピン  $S_2$  の原子間のポテンシャルエネルギーは図10に示すように

$$W_{ex} = -2JS_1S_2 \cos\theta_{12} \quad (23)$$

で与えられ、 $J$  は単位体積あたりの磁気モーメントである。そこで、

$a/r \gg 1$  であれば、 $J < 0$  となり強磁性を示さない。

$a/r < 3$  で、 $J < 0$  となり反磁性を示す。

$3 < a/r < 7$  で  $J > 0$ 、強磁性を示す。

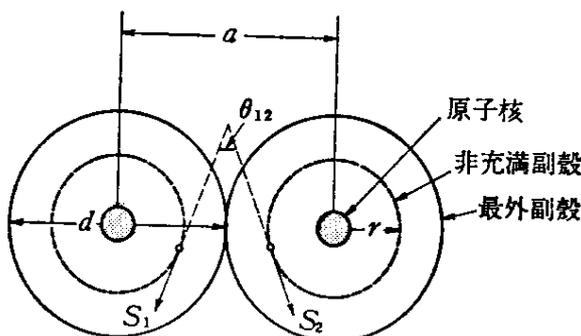


図10 交換相互作用による強磁性の発現機構。

すなわち、「強磁性の十分条件は  $J > 0$  であって、 $a/r > 3$ 」である。Mn は非磁性元素と合金をつくることによって結晶が歪み、 $a/r$  が大きくなって強磁性を示す。

強磁性体は内部のスピンの結集して自発磁化 (spontaneous magnetization) を持つ。単位体積あたりの磁気モーメントは

$$J = \frac{M}{V} [T] \text{ or } [Wb/m^2] \quad (24)$$

ここで、 $V$  は磁性体の全体積 [ $m^3$ ] である。外部磁場が作用しないときにはスピン磁気モーメントが無秩序になっていて  $M = 0$  であるが、外部磁場が作用すればスピン磁気モーメントが揃って  $M \neq 0$  となる。

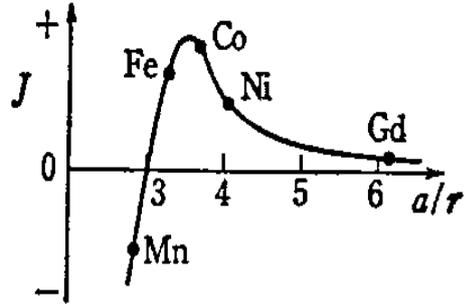


図 1.1 交換積分を与えるベテースレータ曲線 (計算値)。

### 1.5 自発磁化

簡単のため強磁性に関係する内殻電子が 1 個の Ni について考察する。原子的な粒子の磁気モーメントは

$$\mathbf{M} = -g \frac{e}{2m} \mathbf{P} \quad (25)$$

である。外部磁場  $\mathbf{H}$  の中における磁気モーメントのもつポテンシャルエネルギーは

$$U = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \quad (26)$$

で与えられる。ここでは  $\mathbf{B}$  の方向を  $z$  軸方向に選び、

$$U = -M_z B = g \frac{e}{2m} P_z B \quad (27)$$

とする。一般的にスピンの  $j$  ならば、 $P_z = j\hbar, (j-1)\hbar, \dots, -j\hbar$  であるので、ポテンシャルエネルギーの取り得る値は

$$U = g\mu_B B \frac{P_z}{\hbar} \quad \left( \frac{P_z}{\hbar} = j, j-1, \dots, -j \right) \quad (28)$$

すなわち、原子的な粒子のポテンシャルエネルギーは磁場によって  $(2j+1)$  個の準位に分かれる。スピンの配列が外部磁場の影響によるものとするれば、次のように統計力学的手法で扱うことができる。

スピン  $1/2$  の粒子において、

$$P_z = +\frac{\hbar}{2} \text{ に対して、磁場によるエネルギーの変化は } U_1 = g\mu_B \frac{B}{2}$$

$$P_z = -\frac{\hbar}{2} \text{ に対して、磁場によるエネルギーの変化は } U_2 = -g\mu_B \frac{B}{2}$$

$M_z = g\mu_B / 2 = \mu_B$  とおけば、 $U = \pm M_z B$

$-M_z$  上向きスピンの磁気モーメントの  $z$  成分

$+M_z$  下向きスピンの磁気モーメントの  $z$  成分

である。統計力学から

上向きスピンをもつ原子の単位体積あたりの数  $N = ae^{-M_z B/kT}$

下向きスピンをもつ原子の単位体積あたりの数  $N = ae^{+M_z B/kT}$

である。ここで、 $k$ はボルツマン定数、 $T$ は絶対温度である。 $N = N + N$  から、

$$a = \frac{N}{e^{+M_z B/kT} + e^{-M_z B/kT}}$$

となる。したがって、平均の磁気モーメントは

$$\langle M_z \rangle = \frac{N(-M_z) + N(+M_z)}{N} \quad (29)$$

単位体積あたりの平均磁気モーメント（磁化の強さ）は

$$M = N \langle M_z \rangle = NM_z \tanh \frac{M_z B}{kT} [T] \quad J[Wb/m^2] \quad (30)$$

室温において  $\frac{M_z B}{kT} \ll 1$  であるので、スピン1/2から(28)のスピン $j$ の場合に一般化すれば

$$M = \frac{NM_z^2 B}{kT} \quad \text{generalized} \quad M = Ng^2 \frac{j(j+1)}{3} \frac{M_z^2 B}{kT} \quad (31)$$

である。電子スピンの場合は  $j = 1/2$ 、 $g = 2$  であるから  $M = NM_z^2 B/kT$  となる。

磁性体の中にあけた球形の孔の中の1個の原子に働く局所的な磁場は

$$\mathbf{B}_{hole} = \mu_0 \mathbf{H}_{material} + \frac{\mu_0 \mathbf{M}}{3} \quad (32)$$

ここで、 $\mathbf{M}$ は磁化である。(32)を(30)に代入して、

$$M = NM_z \tanh \frac{M_z (H + M/3\mu_0)}{kT} [T] \quad (33)$$

この式を曲線(a)と直線(b)に分けて図12のようにグラフを用いて交点を求める。

$M_{sat} = NM_z$  とおけば、

$$\frac{M}{M_{sat}} = \tanh x \quad \text{曲線(a)}$$

$$x = \frac{\mu_0 M_z H}{kT} + \frac{\mu_0 M_z M_{sat}}{3kT} \frac{M}{M_{sat}} \quad \text{直線(b)}$$

直線の勾配は絶対温度  $T$  に比例するので、

直線(b<sub>1</sub>)が高温の場合に相当する。直線

(b<sub>2</sub>, b<sub>3</sub>)は次のような温度に相当する。

直線b<sub>1</sub> ; 高温  $M/M_{sat} = 0$

直線b<sub>2</sub> ; 低温 安定解はA点 (自発磁化)

直線b<sub>3</sub> ; キュリー温度 ( $T_c$ )

直線(b<sub>3</sub>)は曲線(a)の接線になっていて勾配は1である。この温度より下で強磁性が現れる。曲線(a)の接線が直線(b)の勾配に等しいので、

$$\frac{3kT_c}{\mu_0 M_z M_{sat}} = 1 \quad (34)$$

この関係を用いれば直線(b)は次のように簡単化される。

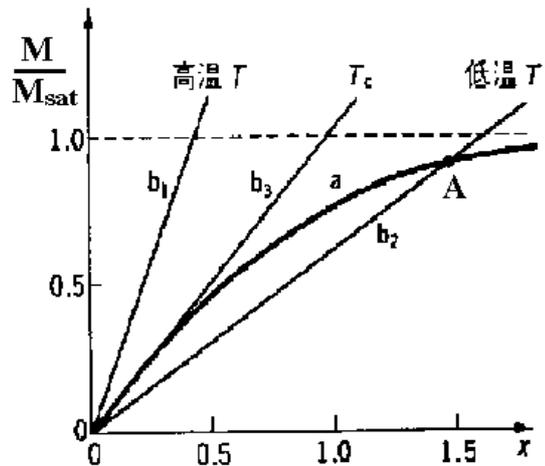


図12 H=0のときの(33)式のグラフ解法。H=0のときは各直線を右にずらして考える。

$$x = \frac{\mu_0 M_z H}{kT} + \frac{T_c}{T} \frac{M}{M_{sat}} \quad (35)$$

Niの場合、(22)の飽和磁化は  $M_{sat} = 0.9 \times 10^6$  [A/m]であるので、(34)からキュリー温度を計算すれば

$$T_c = \frac{\mu_0 M_z M_{sat}}{3k} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0.93 \times 10^{-23} \times 0.9 \times 10^6}{3 \times 1.38 \times 10^{-23}} = 0.25 \text{ K}$$

となる。これは実験値の631Kとは大きく異なり、(29)のような統計力学的考察が適用できないことを意味する。このことは、「強磁性は隣接原子の自転電子の間の磁氣的でない別の相互作用（スピンの交換相互作用）による」ことを示している。

強磁性体では(1)「自発磁化されているのに、磁化されていない？」(2)「外部磁場によって磁化されるが、自発磁化との関係は？」という疑問に答えるために、「磁区構造」が考え出された。すなわち、磁性体は小さな磁区構造に分かれていて、各磁区は飽和磁化にほぼ等しい磁化が現れているが、磁区が勝手な方向を向いているため、全体として打ち消しあっている。外部磁場の方向に自発磁化が揃うことによって、磁化が起こるのである。

### 1.6 磁区 (magnetic domain)

磁化されていない強磁性体の微視的構造は図9の矢印で示すように結晶の容易磁化方向に磁化されている。一つの磁区の中では磁気モーメントは一方向に整列している。各磁区の境界が磁壁 (domain wall, Bloch wall) である。冶金学的に観察される結晶粒界の内部もさらに小さな磁区に別れている。

なぜこのような小さな磁区が形成されるのであろうか。図13(a)のように

(a)全体が1つの磁区になっている場合外部に大きなエネルギーをもつ磁場ができる。しかし、図13(b)のように

(b)磁化が半分ずつ逆向きの磁区になっていれば外部磁場が減少するが、磁壁(点線)にそって余分のエネルギーが現れる。

さらに、図7(d)のように

(d)横向きにも磁区が形成されると外部にもれる磁場がなくなるが、磁壁のエネルギーが増加する。

強磁性体全体としてエネルギーが低いほど安定で、「磁壁を追加するために必要なエネルギーが、結晶の外につくる磁場の減少と同じ大きさになるまで磁区の分割が進行する」ことになる。

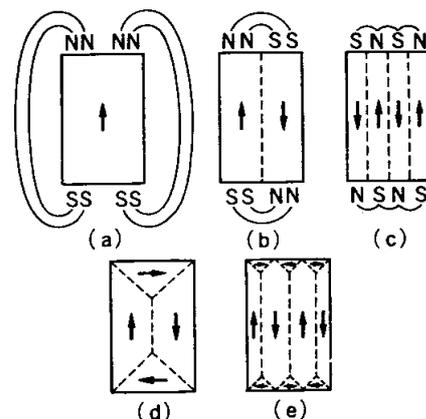


図13 磁区の形成。

### 1.7 磁壁構造と磁壁のエネルギー

隣り合う磁区の境界では、図14に示すように電子のスピンは徐々に回転している。

180度磁壁において隣り合う磁区の磁化方向を+z, -zとする。隣り合う一対の交換エネルギーは $\phi \ll 1$ として、

$$W_{ex} = -2JS^2 \cos \phi = -2JS^2 \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right) \quad (36)$$

N対の交換エネルギーは $\phi = \pi/N$ として、

$$W_{ex} = \text{const} + JS^2 \pi^2 / N \quad (37)$$

である。スピン間距離を $a$ とすれば、磁壁の単位面積あたり $1/a^2$ 列の並びがある。磁壁の厚みを $\delta = Na$ とすれば単位面積当りの交換エネルギーは

$$W_{ex} = \text{const} + JS^2 \pi^2 / \delta a \quad (38)$$

である。

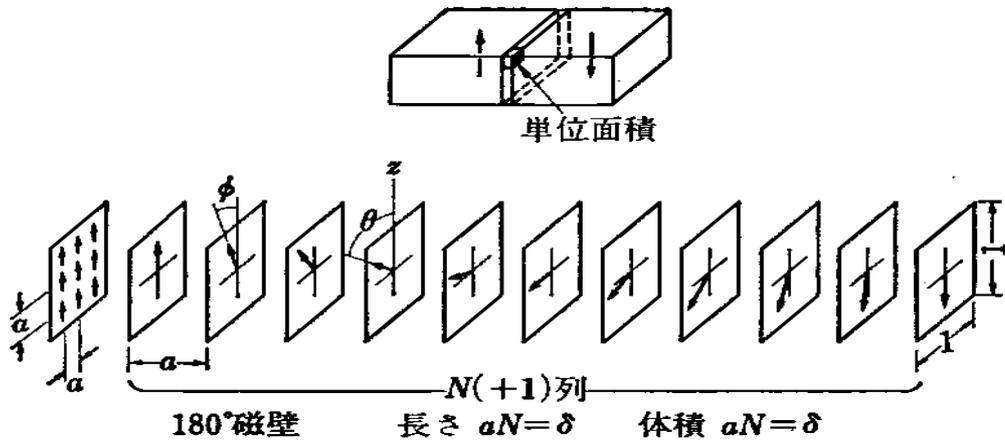


図14 磁壁境界の構造(180度磁壁の場合)、太田恵造著「磁気工学の基礎II」(共立出版)より。

さらに、スピンの磁化容易方向からずれることによるエネルギーの増加があり、これは異方性エネルギーと呼ばれる。簡単のため一軸方向のみを考えて、単位面積あたりの異方性エネルギーは、

$$W_{anis} = K \sin^2 \theta$$

ここで、 $\theta$ は磁化が容易磁化方向となす角度、 $K$ は磁気異方性定数である。鉄の場合、 $K$ の実測値は $K = 5 \times 10^4 [J/m^3]$ である。磁壁の単位面積あたりの異方性エネルギーは

$$W_{anis} = Ka(\sin^2 \phi + \sin^2 2\phi + \dots + \sin^2 \pi) = Ka \sum_{n=1}^N \sin^2(n\pi/N) \quad (39)$$

$$N \int_0^{\pi} \sin^2(n\pi/N) dn = K\delta/2$$

である。磁壁の単位面積あたりのエネルギーは交換エネルギーと異方性エネルギーを合わせて、

$$W_{wall} = W_{ex} + W_{anis} = \frac{JS^2 \pi^2}{\delta a} + \frac{K\delta}{2} \quad (\text{定数項は省略}) \quad (40)$$

で与えられる。すなわち、「磁壁が厚いほど交換エネルギーは低く、異方性エネルギーは逆に高い。 $W_{wall}$ が最低になる条件から磁壁の厚みが決まる」ことになる。

$W_{wall}$ が最小になる磁壁の厚さは $\partial W_{wall} / \partial \delta = 0$ から

$$\delta = \sqrt{\frac{3kT_c S^2}{aK}} \sqrt{\frac{kT_c}{aK}} \quad (41)$$

ただし、交換積分  $J$  はキュリー温度  $T_c$  に関して、 $J = 0.15kT_c$  (Feの場合) である。また、磁壁厚の目安はキュリー温度  $T_c$  を用いて、

$$\delta_{Fe} = \sqrt{kT_c / aK} = \sqrt{(1.38 \times 10^{-23})(10^3) / (3 \times 10^{-10})(5 \times 10^4)} = 3 \times 10^{-8} [m]$$

である。

### 1.8 磁気余効 (magnetic aftereffect)

磁性体に磁界変化を与えたときの図 15 のように磁化が時間的に遅れる現象を磁気余効と呼ぶ。磁化の遅れの原因として、

- (1) 外部磁界  $H$  を加えても、磁化の変化にともなう電流が発生し、これが治まるまでは有効な外部磁界に達しない (マクロな電流による遅れ、 $10^{-4}$ 秒程度)。
- (2) 有効な外部磁界に達しても、磁区の回転による電流が生じ、遅れる (ミクロな電流による遅れ、 $10^{-6}$ 秒程度)。

このよう電流による遅れを差し引いても、さらに遅れがあり、この部分を磁気余効と呼ぶ。

磁性体の組織的变化による磁化の時間変化 (時効、aging) は繰返し再現できないが、磁気余効は消磁のような磁気的手段によって繰返し再現できる。磁化  $M=0$  の試料に  $t=0$  で直流磁場を加えたとき、磁化  $M$  は有限時間後に目標値  $M$  に達する。

$$M(t) = M (1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau \text{ は緩和時間}$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{M}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{M - M}{\tau} \quad (42)$$

交流磁界  $H = H_0 e^{j\omega t}$  を与えたときの磁化率を

$\chi_s$ ; 磁気余効のないときの磁化率  
 $\chi$ ; 磁気余効のあるときの磁化率

として、

$$M = \chi H_0 e^{j\omega t}, \quad M = \chi_s H_0 e^{j\omega t} \quad (43)$$

(43)を(42)に代入して、

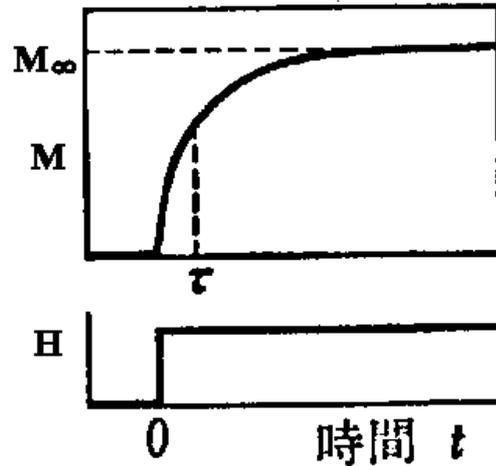


図 15 磁気余効による磁化の遅れ。

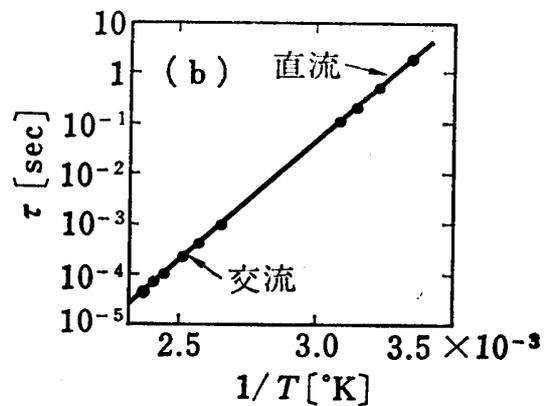
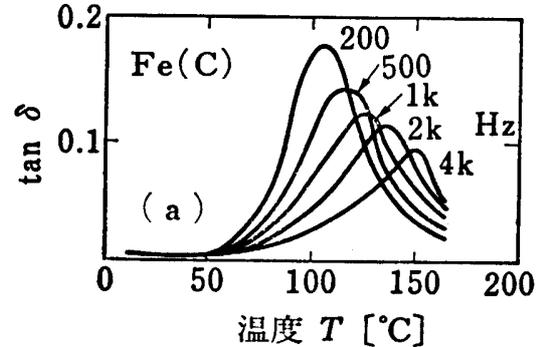


図 16 鉄の (a)  $\tan \delta$  の周波数、温度依存性、(b) 緩和時間の温度依存性。

$$j\omega\chi\tau = \chi_s - \chi \quad \chi = \frac{\chi_s}{1 + j\omega\tau} \quad (44)$$

したがって、

$$M = \frac{\chi_s H}{1 + j\omega\tau} \quad (46)$$

比透磁率は(9)より、

$$\mu_r \quad \mu_r' - j\mu_r'' = 1 + \frac{\chi_{rs}}{1 + \omega^2\tau^2} - j \frac{\chi_{rs}\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (47)$$

ここで、 $\chi_{rs} = \chi_s / \mu_0$  は比磁化率である。また、

$$\tan \delta \quad \frac{\mu_r''}{\mu_r'} = \frac{\chi_{rs}\omega\tau}{1 + \chi_{rs} + \omega^2\tau^2} \quad (48)$$

である。図16において、(a)はFeの $\tan \delta$ の周波数、温度依存性、(b)緩和時間の温度依存性である。緩和時間の温度依存性が

$$\tau = \tau_0 e^{Q/KT} \quad (49)$$

で表されることから、磁化の遅れの原因として格子間に存在する炭素原子の移動によるものと思われる。ここで、 $Q$ は活性化エネルギー（図16では、 $Q = 1eV$ ）である。

磁化の方向によりエネルギー的に得になる場所に炭素原子が移動する。すなわち、磁化は炭素を従えて方向を変えるが、周波数によって、

- 1) 低周波では、炭素は速やかに移動できるので磁化を妨げない、
- 2) 高周波では、炭素の動く暇がないから磁化を妨げない、
- 3) 緩和時間に近い周波数では、磁化に引きずられて動くので、磁化を妨げる。

電磁石においては、不幸にして磁気余効が現れる場合には励磁電流を変えても磁場は直ぐには変わらないで徐々に変化するので、微調整に手間取ることが予想される。

## 2. 電磁石の鉄心材料

### 2.1 電磁軟鉄

以上では強磁性体の電磁気学的な理論を見てきたが、加速器の電磁石に応用する観点から、鉄心材料として「磁気抵抗が小さく、透磁率の大きな材料」が望ましい。これはより小さな起磁力で強い磁場を発生させるためである。また、経済的立場から安価であることも重要である。これらの要件を満たす材料として鉄が最適である。電磁石に利用される鉄は磁気特性と同一性が保証された電磁軟鉄である。

鉄は不純物のない純鉄の磁気特性

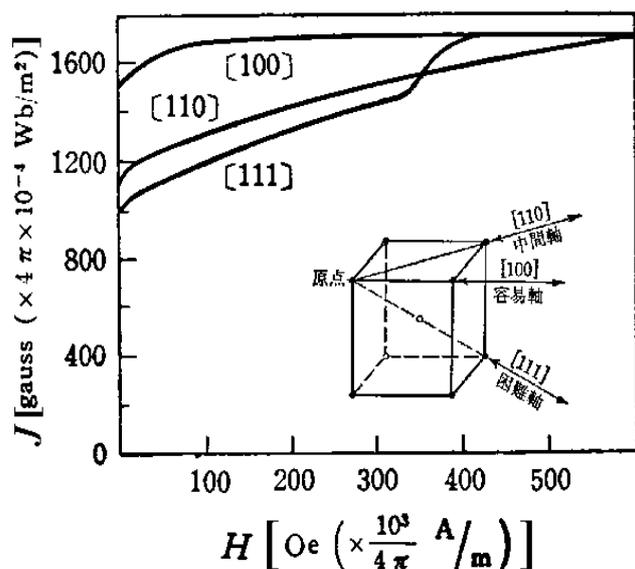


図17 鉄の単結晶の磁化曲線。

が最も優れ、図17に示すように結晶の方向によって特性が異なる（磁気異方性）。鉄は磁気異方性を示し、容易磁化方向は[100]である。純鉄を得るのはかなり高価になることと、純鉄の状態では機械加工する上で比較的柔らかいことなどのため、機械加工性をよくするために焼き戻し処理の圧延で硬度の調整が行われる。また、交流電磁機械に使用する目的でヒステリシス損失を減らすためSiが添加され、これはケイ素鋼板と呼ばれる。鉄の精練過程で、磁気特性に敏感な炭素や不純物を減らすことが行われる。このような操作を加えて作られた鉄は脱炭鋼板（decarburized steel）とか低炭素鋼板（low carbon steel）と呼ばれる。

電磁石に利用される鉄は、ケイ素鋼板か脱炭鋼板が一般的である。鋼板は電気機械向けが多く、ケイ素鋼板の生産が圧倒的に多い。そのため、磁気特性がよく揃った、供給面で不安のないケイ素鋼板がよく利用される。ケイ素鋼板のグレードはJIS規格で決められていて、高価なものほどヒステリシス損失は少ない。加速器の電磁石はパルス励磁されるものでもラピッドサイクルでなければ、周波数は低く繰返率も低いのでヒステリシス損失はそれほど考慮されない。皮肉なことに飽和磁場はグレードの低いものほど大きく、最低のグレードはSi含有量が最も少なく脱炭鋼板に近づく。ただし、グレードの低下とともに磁気特性のばらつきも大きくなるので中程度のグレードで、さらに生産ラインにおける磁気特性の実測値を参考にして指定範囲に入るものだけを購入する。

ケイ素の含有量が多くなれば脆くなるので、数%以下のものが利用される。回転機、電磁石では1～3% Si、変圧器では3～4.5% Siが選ばれる。鋼板の厚さは0.1, 0.2, 0.3, 0.35, 0.5 mmのものが標準化されている。比抵抗は  $\rho = (9.99 + 12Si\%) \times 10^{-2} [\mu m]$  の関係にあるので、Si量によって比抵抗が増加し、渦電流損失を軽減できる。市販されているケイ素鋼板には方向性鋼板と無方向性鋼板がある。KEK-PSでは方向性鋼板が使用されている。これは、磁極部の大局的な磁力線の方に容易磁化方向を選ぶことによって電磁石性能が改良されることを意図したものである。

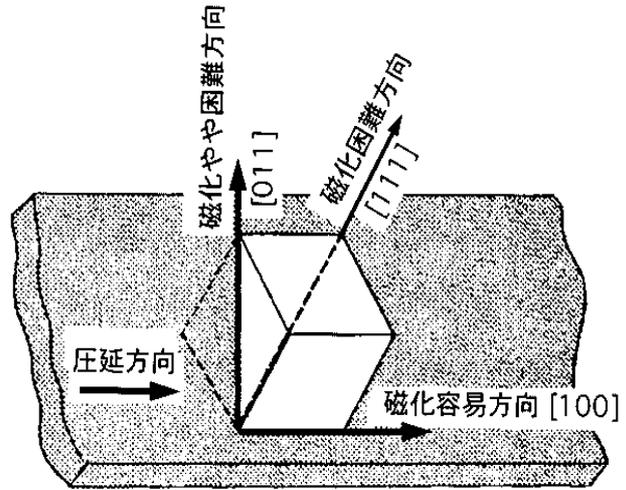


図18 方向性ケイ素鋼板の結晶方向。

図18のように圧延過程で結晶粒の方向を揃えて、1方向（圧延方向）にすべての結晶粒の容易磁化方向を揃える方法がN.P. Gossによって開発された（1934年）。このようにして得られる鉄の組織をゴス組織という。

## 2.2 磁気異方性（magnetic anisotropy）

強磁性体を磁化するとき、磁化の方向によって磁氣的性質が異なる性質をいう。結晶

構造との関連によって磁化のしやすさ、しにくさが現れるものを結晶磁気異方性と呼ぶ。磁化容易方向（容易軸）は磁化されやすい方向、磁化困難方向（困難軸）は磁化されにくい方向である。

立方晶（Fe）の磁気異方性は自発磁化の方向余弦を $I_s(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 、異方性エネルギーを $E_A$ として、

$$E_A = K_0 + K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + K_2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 + (\text{higher\_term}) \quad (50)$$

で与えられる。結晶構造の対称性から $\alpha$ の奇数次の項は消える。また、2次の項は定数項になる。簡単のため定数項および高次の項を無視して、

$$E_A = K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + K_2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 \quad (51)$$

ここで、 $K_1$ 、 $K_2$ は異方性定数である。 $I_s$ が各方向を向くとき

$$\begin{aligned} [100] ; \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0 & \quad E_A = 0 \\ [110] ; \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_3 = 1/\sqrt{2} & \quad E_A = K_1/4 \\ [111] ; \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1/\sqrt{3} & \quad E_A = K_1/3 + K_2/27 \end{aligned}$$

であるので、

$K_1 > 0, K_1 + K_2/9 > 0$ であれば、[100]が容易軸になる。

$K_1 > 0, K_1 + K_2/9 < 0$ または $K_1 < 0, K_1 + 4K_2/9 < 0$ であれば、[111]軸が容易軸になる（図19）。

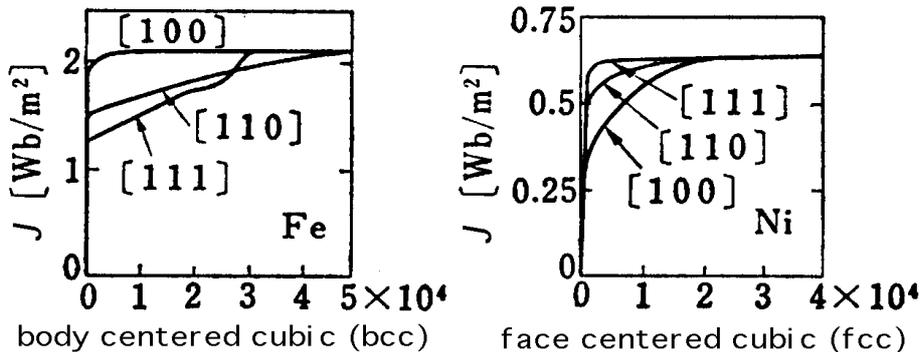


図19 体心立方格子（Fe）と面心立方格子（Ni）の結晶構造にける磁気異方性。

磁気異方性の原因としていくつかの考え方が提案されている。

- (1) スピン間の磁氣的相互作用
- (2) スピン-軌道相互作用
- (3) スピン間の異方的交換相互作用

人工的に作られた異方性として、

- (1) 磁界中冷却による異方性

強磁性体を磁場の中で加熱・冷却すれば、高温で現れた変化が低温で固定される。

- (2) 圧延による異方性

圧延により原子面がすべて圧延方向に関係した異方性が現れることがある。

ケイ素鋼板の磁気異方性はこの(2)によるものである。

### 3. 電磁石用鋼（板）の選択

加速器の電磁石には、高磁場の直流電磁石、交流電磁石、パルス電磁石、超伝導電磁石があるが、電磁石の種類や用途によって構成材料に対する要求は異なる。加速器やビーム輸送に使用される同じ種類の電磁石では、加速サイクルを通して全ての磁場性能が同じ（ $10^{-3} \sim 10^{-4}$ ）であることが重要である。

鉄心用スチールの選択は直流または交流電磁石によって異なるため、別々に扱う必要がある。電磁石に使用される軟鉄の磁氣的性質は化学的組成や製法（溶解、圧延、熱処理）によって異なる。電磁石の鉄心材料に要求される性質として、

- 1) 保持力が小さい（ヒステリシス損失が少ない、残留磁場が小さい）
- 2) 渦電流損失が少ない
- 3) 低磁場における透磁率が高い
- 4) 飽和磁束密度が高い
- 5) 経年変化 (aging) が無い
- 6) 同じ種類の電磁石全体についてスチールの磁氣的性質が一様である
- 7) 機械加工性がよい

などがある。しかし、これらの性質のあるものはお互いに矛盾するものがあるため、最適な選択をすることになる。直流電磁石か交流電磁石、使用磁場範囲などに応じて優先させる性質に差が現れる。これらの磁氣的性質に影響を与える要因として、合金元素、不純物、機械的歪（応力）、磁気異方性、熱処理などが考えられる。

純鉄は優れた強磁性体であるが、微量の炭素と酸素が結合してCOを発生するため、高純度で気泡のないインゴット（鑄塊）を作るとは困難である。その上、高価で、電気抵抗が低いため交流電磁石には採用されない。また、機械的に柔らかいため精度良く加工することが難しい。SiやAlなどを混ぜて合金にすることにより、電気抵抗が増加し、磁氣的性質の経年変化や加工性が改善される。

SiやAlは置換固溶体を形成し、結晶格子に歪みを与えない。このため磁氣的性質には悪い影響を与えない。その上、鉄の同素性の転移（相転移、phase transition、変態）を阻止するため、相転移を受けることなく高温における熱処理が可能である。

SiやAlは優れた脱酸素剤であり、還元前の鉄に添加すればそれらの酸化物が作られる。しかし、酸化物は磁氣的性質にとって有害である。Alの酸化物はSi酸化物以上に有害である。

SiやAlとの合金により飽和磁場は低下し、鉄が脆くなるので、ケイ素鋼板ではSiの上限は約3.2%である。交流電磁石の鉄心の最適値は1～2%Siの合金である。磁氣的性質の経年変化は減少するが、1.5%ケイ素鋼板では経年変化が観測されている。しかし、保磁力は約70 A/mに減少し、低磁場の透磁率は約750に増加する。ケイ素鋼板では一般的に、低磁場で高い透磁率をもつ鋼板は保持力が低く、高磁場における透磁率も低い。電気品位のケイ素鋼板（1.5% Si）の透磁率は0.01Tで750、 $H_c \sim 72$  A/mである。低炭素鋼（～0.1% Si）では透磁率は250～500、 $H_c \sim 120-160$  A/mである。

極低温で使用する電磁石では9%程度までNiを添加した合金のスティールが使用される。これは4.2 Kまでの機械的性質に優れ、磁気飽和の低下が少ないことによる。

直流電磁石には合金元素はあまり使用されない。経年変化はそれほど重視されないので、0.1%のSiまたは0.01%のAlで十分である。Si含有量が0.05～0.2%の範囲で変化すれば、1～1.5 T領域のB-H曲線に影響が現れ、直列接続された電磁石の間で磁場特性が一様でなくなる。

パルス電磁石には、低炭素鋼板（あるいは脱炭鋼板）やケイ素鋼板が採用される。特に日本では、電気機械用に用途が広く磁気特性が保証されたケイ素鋼板が入手しやすく、一般的である。ヨーロッパで製造されたこれらの2種類の鋼板（ケイ素鋼板は0.5 mm厚のEuronorm 106-84規格のFev 330-50、低炭素鋼板は1.5 mm厚脱炭鋼板）についてエプスタイン（Epstein）試験器で比較測定された磁気特性を図20に示す。また、ケイ素鋼板の低磁場における透磁率と保磁力の関係を図21に示す。図21から保磁力を制御すれば透磁率の拡がりも制御できるので、電磁石の性能の一様性がよくなる。この関係は0.9 Tまでよく成り立つ。

冷間圧延電磁石用スティール（Armco社、USA）は電磁石用に開発された鋼板（1.5 mm厚）である。焼鈍段階で炭素を0.006%まで除去できる雰囲気中で、鋼板コイルを巻き戻しながら焼鈍する。鋼板が薄いため、この方法でよい結果が得られる。この材料はFNAL主リング、PEP蓄積リングなどに使用されている。

### 3.1 不純物の影響

強磁性は結晶格子が完全であるかどうかによって影響される。固溶体の不純物は磁気的性質に影響する。炭素、窒素、ボロンなどの非金属元素は格子間不純物として格子に

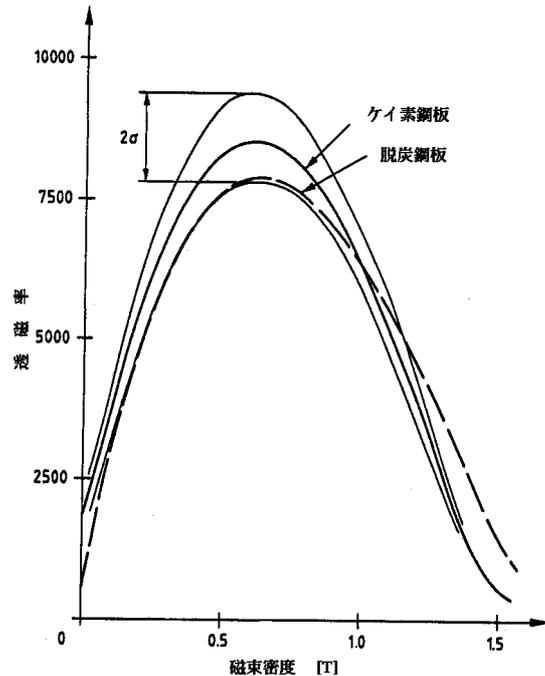


図20 ケイ素鋼板と脱炭鋼板の平均比透磁率。

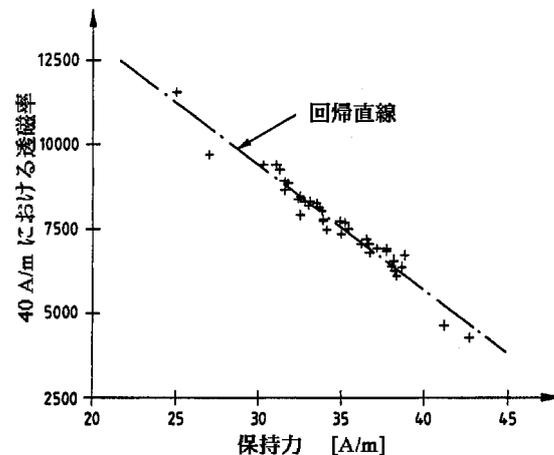


図21 ケイ素鋼板の低磁場における透磁率と保磁力の関係。

歪を与える。これらの不純物はS, P, Mn, Cr, Cuなどの置換不純物よりも有害である。

水素は格子間不純物であるが、磁氣的性質への影響は系統的には調べられていない。CやNは最も有害な格子間不純物であるが、市販のスチールの窒素含有量は約0.003%と低く問題にならない。しかし、炭素は有害であり除去が困難である。

Geroldの測定によれば、1%以下の不純物の添加によって磁束密度が濃度に比例して低下する。1%の各種不純物による  $B-H$  曲線と  $B-H$  曲線を図 2 2 に示す。 $H = 10^4 [A/m]$  における純鉄の磁束密度は  $B_{Fe} = 1.9 T$  であるが、各種不純物の含有により磁束密度が低下する。各種元素の1%含有による磁束密度の低下は図 2 2 から、表 2 で与えられる。

表 2 から不純物の含有量に合わせて、各成分からの寄与の和を  $B$  とすれば、予測される磁束密度は

$$B_{H=10^4 A/m} = B_{Fe} - B \quad (8)$$

である。この表は  $H = 2.5 \times 10^3 [A/m]$  に対して成り立つが、低い磁束密度では低めの  $B$  を与える。

保磁力は不純物の量と分布状態に依存する。不純物の影響は不純物と結晶マトリックスとの間の境界で磁壁の移動が阻止されることによる。図 2 3 に示すように定量的に炭素と窒素は保磁力に大きな影響を与える。Cr, V, Moなどの合金元素を高温で窒素と化合させて安定な化合物にすれば、大型鉄心の磁氣的性質に対して窒素は無害になる。

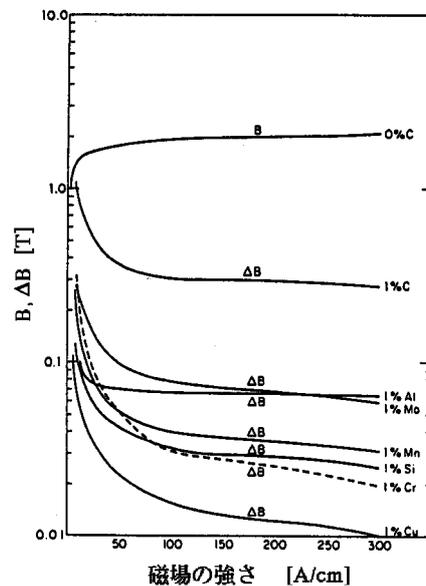


図 2 2 純鉄の  $B-H$  曲線と不純物による磁束密度への影響。

表 2  $H = 10^4 [A/m]$  における不純物1%含有による磁束密度の低下

元素 (各1%含有)	C	Si	Mn	Cr
磁束密度の低下(T)	0.3	0.032	0.075	0.033
元素 (各1%含有)	Mo	Cu	Al	N
磁束密度の低下(T)	0.075	0.016	0.068	0.7

薄い鋼板では真空中または水素雰囲気中での焼鈍により脱炭、脱窒が容易にできる。この方法で窒素を0.001%に減らすことができる。

酸素、炭素、窒素などの非金属格子間元素は鉄中にある程度、固溶体として溶け込む。これらの元素は鉄の融点より低い高温で鉄中を拡散し、表面で水素と結合するため、薄

板については水素雰囲気中の熱処理で除去可能である。これらの室温における含有量を溶解度以下にする必要がある。磷は0.01%以下の含有量であれば磁氣的性質には影響を与えない。

酸素や窒素などの気体元素は温度が下がれば溶解度も低下するので、溶解度限界以上に存在する気体は鉄中に気泡を作り、鋼材の中に拡がって分布する。気泡の存在により鉄中の平均磁束密度は低下する。

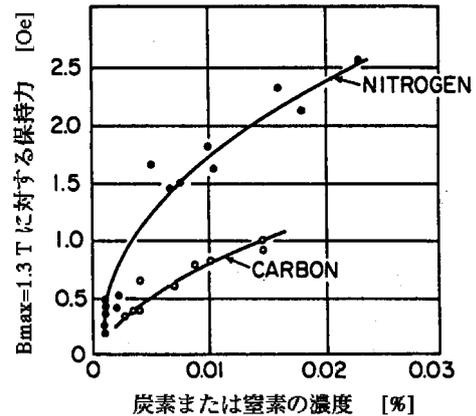


図 2.3 3%ケイ素鋼板の保磁力に及ぼす炭素と窒素の影響。

### 3.2 鍛造

直流電磁石の鉄心は鍛造鋼または圧延鋼から作られる。鍛造による効果は、

- 1) インゴット中に閉じ込められた気泡に接する金属面は還元雰囲気 (COまたは水素) であるため、活性状態になっている。加熱と鍛造圧力の組み合わせにより、気泡を潰して金属面を溶着させる、
- 2) 鍛造により硬い金属間化合物を壊し、鉄中に再溶解させて均質化をはかることである。

鍛造により結晶粒度は小さくなるが、最終段階における鍛造の温度条件と焼鈍により粒度の制御ができる。最終鍛造を低い温度で行い、比較的高い温度で焼鈍すれば、大きな結晶粒度が得られる。

鍛造の代わりに、不純物を低減する清浄鋼精練法で作ったスラブを高形状比圧延機で圧延する方法もある。この方法によりコスト高な鍛造工程を避け、鋼板中心部まで均質な厚板 (厚さ600 mm) の製造が可能である。この方法で作られた厚板について採取したサンプルの化学組成を表3に示す。

表3 600mm厚板の化学組成分布 (各部から採取したサンプル)

元素	C	Si	Mn	P	S	Cu	
wt. %	0.005 ~0.010	0.074 ~0.080	0.12 ~0.13	0.007 ~0.008	0.002 ~0.003	0.015	
元素	Ni	Cr	Mo	Ti	V	Tr. N	Tr. Al
wt. %	0.034 ~0.035	0.020 ~0.021	0.015	0.001	0.001	0.0049 ~0.0061	0.017 ~0.024

### 3.3 磁氣的性質の経年変化

低炭素鋼の磁氣的性質の経年変化は炭素含有量を0.006%以下に下げるか、または室温

まで徐冷することによって抑えることができる。経年変化としては保磁力の増加と透磁率の低下である。これは炭素や窒素の格子間溶融元素の凝縮によるので、炭素と窒素の総含有量を減らすか、あるいは磁気特性に効かない炭化物や窒化物に凝縮させて固溶体中の炭素、窒素の濃度を減らすことで経年変化を抑えることができる。同じ固溶体の濃度では、炭素より窒素の方が保磁力に大きく寄与する（図23）。窒素を0.005%から0.002%に減らすことで、保磁力は約50%減少する。また、ケイ素鋼板について150、100時間の加速試験を行った結果では、保磁力の変化は殆ど認められていない。

### 3.4 結晶粒度

多結晶体の結晶粒界における結晶の乱れはエネルギー損失の原因になり、望ましくない。磁氣的性質は単結晶でよく、結晶粒が大きくなればエネルギー損失は小さくなり、透磁率が上がる。粒度は炭素とSiの含有量と共に変化する。結晶粒度は保磁力に大きな影響を与える（図24、ケイ素鋼の保磁力は粒度とともに増加する）。大きな結晶粒でも不純物の影響は無視できない。冷間加工と焼鈍により純鉄の粒度は大きくできる。しかし、冷間加工が結晶粒の方向性に関係するので、結晶粒の向きを揃えることにより磁氣的性質の改良が可能である。

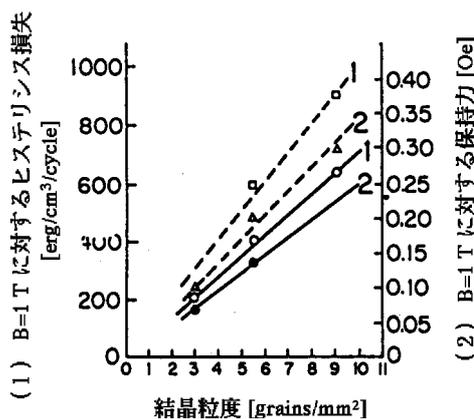


図24 ケイ素鋼板のヒステリシス損失（点線）と保磁力（実線）の結晶粒度依存性、1=3% Si (0.005% C), 2=5-6% Si (<0.01% C)。

### 3.5 塑性歪

弾性歪および塑性歪は磁氣的性質に大きな影響を与える。鉄のように正の磁歪をもつ物質では、ある程度までの引張応力によりB-H曲線の間領域における透磁率が増加するが、限度を越えれば減少する（負の磁歪では透磁率は引張応力により減少する）。塑性歪は軟磁性材料の全てに有害で、透磁率は減少し、保磁力は増加し、鉄損も増加する。このことは鋼板の運搬時や加工時に歪みを与えないよう細心の注意が必要であることを意味する。鋼板は製造や運搬の利便性のためドラムに巻いてコイル状で取り扱われるので、コイル巻枠の径を大きくして巻取歪を与えないようにする。

交流およびパルス電磁石には低炭素鋼板やケイ素鋼板（0.35-0.5 mm厚）が使用され、鉄心積層時の加圧により圧縮力を受ける。この圧縮応力により保磁力が増加し、鉄損が増える。方向性鋼板の圧縮応力を1 kg/cm<sup>2</sup>から11.5 kg/cm<sup>2</sup>に増やせば、1.5 Tにおける鉄

損は8%増加する。方向性鋼板の圧縮応力を1 kg/cm<sup>2</sup>から10 kg/cm<sup>2</sup>に増やせば、保磁力は12%増加する。

実際には、個々に絶縁された鋼板を積層治具上で積み重ね、~20 kg/cm<sup>2</sup>の平均圧力をかける。この状態で鉄心をボルト、または外周の溶接で固める。溶接法では一様な圧縮応力が得られるが、溶接により鉄心が変形する。鉄心の変形を防ぐためにスルーボルトを追加することもあるが、この場合ボルト周辺部の応力は4~6倍大きくなる。鉄心の変形を嫌う電磁石では、エポキシ樹脂による接着法が採用され、構造的安定性を保つため鉄製のフレームで外周部を固定する。

### 3.6 方向性

結晶の磁気異方性のため、多結晶材料でも磁氣的性質に方向性がある。適当な冷間加工と焼鈍の組合せにより方向性を持たせることができる。方向性ケイ素鋼板（Goss鋼板）は変圧器や電磁石（KEK-PS）に利用されている。保磁力と鉄損は圧延方向に最小で、直角方向は3~4倍大きい。圧延方向に比べ、直角方向の透磁率は低磁場においてかなり低い。非常に低い保磁力（鉄損）が重要であれば、圧延方向を磁束の方向に選ばなければならない。偏向電磁石においても圧延方向にB-H特性がすぐれているので、磁極部の磁束の方向が圧延方向になるように選ばれる。4極電磁石では、磁極部で磁束は水平と垂直の両方向に別れるので、方向性鋼板を使用する利点は垂直、水平方向のどちらかのアパーチャが他方に比べて大きい場合に現れる。図25はKEK-PSに使用された方向性ケイ素鋼板（1mm厚）の磁気特性である。この鋼板を1.8 Tまで励磁した後の圧延方向の保持力は圧延方向で15 A/m、直角方向で31 A/mである。

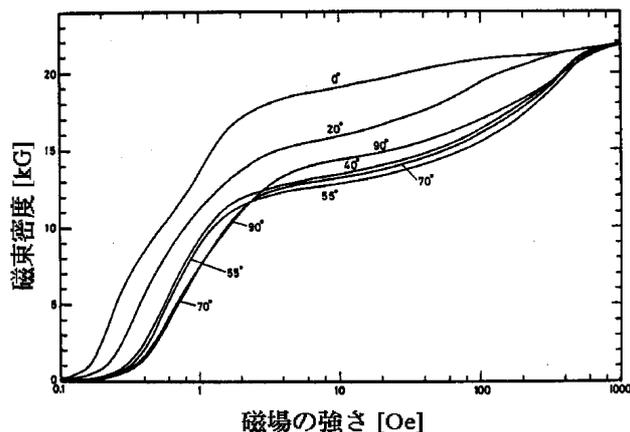


図25 方向性ケイ素鋼板の方向による磁気特性、0度が圧延方向（KEK-PS用3% Si）。

無方向性鋼板でも、圧延方向とこれに直角な方向で磁気特性に若干の相違があり、方向性を嫌う電磁石では打抜き方向を90度異にする2種類の鋼板を交互に積層して特性を平均化することが行われる。

### 3.7 鋼板の絶縁被膜

鋼板には両面に絶縁が施されている。絶縁物の組成は無機質、無機質ベース+有機質がある。放射線下で使用する場合は一般に無機質絶縁が選ばれる。積層の作業性の上では無機質ベース+有機質が優れているが、溶接性は無機質絶縁がよい。絶縁被膜のため若干占積率は下がるが、それでも0.5 mm鋼板で98.5%は確保できる。

以上のように、電磁石鉄心材料である鋼板の品質管理や取り扱いには細心の注意が必要である。パルス電磁石や交流電磁石の鋼板は購入した材料を電磁石製造現場において、ドラムに巻かれた鋼板のコイルを巻戻しながらダイにより打抜き、そのまま積層する。この過程で機械的歪を与えないようにしなければならない。積層で注意することは、JIS規格で許容される鋼板の厚み偏差（0.03 mm以下）があるので、積層全長で積厚が偏らないように鋼板を裏返しなから調整する必要がある。

### 3.8 具体例、加速器の電磁石用鋼板

ラミネート鋼板による鉄心の製作では、鋼板を抜型（ダイ）で打抜き、積層する。電磁石には2種類のスチール、脱炭鋼板（低炭素鋼）とケイ素鋼板から選択できる。脱炭鋼板は加速器の電磁石のために開発された板厚は1.5mm程度の鋼板で、純鉄に近い磁気特性を示す。ケイ素鋼板は電気機械用に大量生産されている板厚0.5mm, 0.35mmの鋼板で、Siを数%含む。脱炭鋼板は高磁場側で磁気特性がよく、ケイ素鋼板は低磁場側で優れている。日本では脱炭鋼板に相当するものは、自動車や家庭製品に使用される深絞り用軟鉄と呼ばれる鋼板であるが、磁気特性の保証はない。これらの磁気特性の比較を図26に示す。

過去に使用した鋼板の仕様の1例として、

保持力は  $B_{\max} = 1.5 \text{ T}$  において  $H_c = 1.0 [\text{Oe}]$ 、バラツキは10%以下

磁化力5,000 A/mにおいて、

磁束密度は1.66 T以上、バラツキは2.5%以下

占積率は98%以上

炭素含有量は0.003%以下

絶縁被膜は無機質

厚み偏差は  $0.5 \text{ mm} \pm 0.02 \text{ mm}$

層間抵抗は  $5 \text{ cm}^2 / \text{枚}$  以上

硬度は  $H_v = 100$

がある。

その他、機械的強度、寸法などに関する仕様を定めることになる。これらの数値は電磁石の設計条件によって異なる。磁束密度の指定は満足されるが、保持力については納入前に選別されることになる。10%のバラツキは大きいので、積層前にシャフリングを行う必要がある。鋼板をシャフリングして平均化することにより鉄心間のバラツキを減らすことができる。また、電磁石用の鉄の炭素含有量は0.006%以下であれば、鉄の磁氣的性質は炭素含有量によらなくなる。

鋼板の使用量が多くなれば、鋼板は複数のロットに分けて生産される。電磁石への使

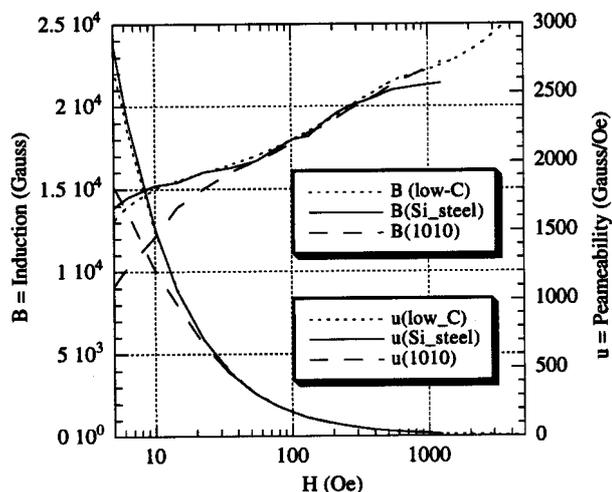


図26 電磁石用鋼板の磁気特性。

用にあたって重要なことは、ロット間に化学組成の変化がなく磁気特性にバラツキがないことである。

鋼板は冷間圧延後の焼鈍により硬度が低下するため、精度のよい打抜きが難しくなる。このため最後の焼き戻し処理の圧延で硬度が調整される。打抜き精度を確保するためには、ビッカース硬度100以上が適している。スチールは再びコイルに巻かれ、ミル工程で両端を切り取り所定の幅に切断される。コイルに巻取る過程での鋼板の機械的歪みを避けるために板状に切断するのが最良である。しかし、巻枠の直径をある値以上にすればこの歪みを最小限に留めることができると経済的であることから、最近ではコイルを巻き戻しながら打抜きが行われる。

鋼板製造のあらゆる段階で磁気特性に何らかの影響が現れるが、厳格な品質管理が重要である。

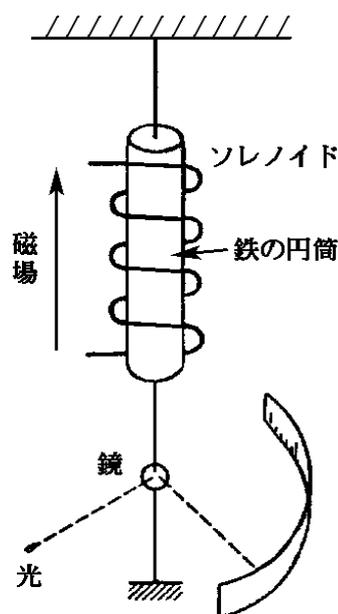
-----ここでちょっとコーヒータム-----

### 「強磁性の話」

鉄の元素記号はFeである。これはラテン語の鉄を表すferrumから来たもので、強磁性のferromagnetismはこれに由来する。このように我々にとって鉄は身近な強磁性体である。強磁性を示す純粋な元素は9種類（Fe, Ni, Co, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tm）であるが、これ以外にもこれらの元素の合金や他の非強磁性元素との合金も強磁性を示すものがある。この他にもホイスラー合金と呼ばれる非強磁性元素同志の合金も強磁性を示す。

磁性の基本的な担い手は電子の軌道磁気モーメントとスピン磁気モーメントであるが、強磁性にはどちらが関与しているであろうか。電子は原子核のまわりを軌道運動しながら自分自身も自転運動している。物理量の保存則の一つに「角運動量の保存」がある。これは「物体に外部からトルクが作用しなければ、物体のもつ角運動量は一定に保たれる」ことを表す。この保存則を鉄片中の鉄原子の電子に当て嵌めてみよう。強磁性が軌道角運動量に起因するとすれば、各電子の軌道面は平行ですべて同じ向きに回転していることになる。この鉄片の向きを逆（すなわち、磁化を逆転）すれば、角運動量保存則から電子は逆回転し、鉄片は逆転前の電子の方向に回転しなければならないことになる。

このような実験はソレノイド中に鉄の円筒をぶら下げて、ソレノイドに流れる電流の向きを逆転することによって鉄円筒の磁化を逆転させることができる。磁気モーメントの原因が軌道角運動量であっても、スピン角運動量であっても、磁化を逆転させれ



アインシュタイン・ド・ハースの実験。

ば角運動量保存則にしたがって鉄円筒は逆転前の電子の方向に回転するはずである。鉄円筒の回転は図のようにその中心軸に吊した鏡の回転角によって測定することができる。鏡に光を当てておけば円筒の回転によって糸が擦られ、鏡の回転を反射光の動いた角度で読み取ることができる。糸を擦る力の大きさは強磁性の担い手が軌道運動によるか、自転運動によるかによって異なる。ここで、復習として、

- 1) 軌道運動による軌道磁気モーメント =  $n\mu_B$   
 軌道角運動量 =  $nh/2\pi$   
 軌道磁気モーメント / 軌道角運動量 =  $2\pi\mu_B/h$
- 2) 自転運動によるスピン磁気モーメント =  $\mu_B$   
 スピン角運動量 =  $h/4\pi$   
 スピン磁気モーメント / スピン角運動量 =  $4\pi\mu_B/h$

であるので、磁気モーメントと角運動量の比を測定すれば強磁性の担い手が判明する。ソレノイドを用いた実験から、この比は  $4\pi\mu_B/h$  であることが確認されている（アインシュタイン-ド・ハースの実験）。

強磁性の担い手はスピン磁気モーメントであることがはっきりしたものの、限られた元素にしか強磁性が現れないのは何故であろうか。強磁性元素の原子構造に共通している特徴は軌道電子の殻 (shell) の占め方にある。通常、内側（原子核に近い側）の殻から順に電子が入っていく。殻には副殻 (sub-shell) があって、殻 (K, L, M, ...) の中に

殻	K	L	M			N				
n	1	2	3			4				
副殻	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f
l	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
収容電子数	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14

のように 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d, 4s, 4p, ... の副殻が存在し、副殻に収容できる電子数は決まっている。一つの殻に収容できる電子の数は  $2n^2$  個である。

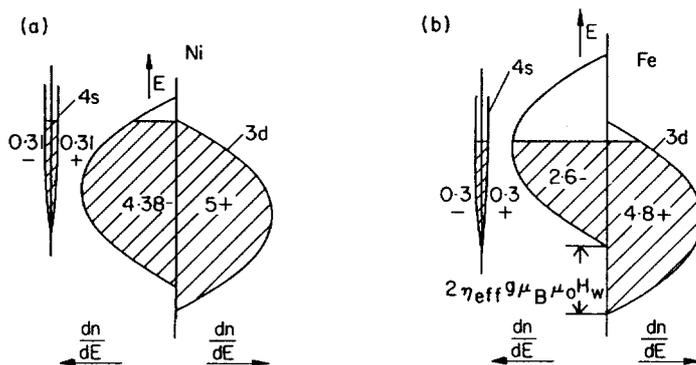
原子番号が増えていくとき電子は内側の副殻から占められていくが、3d殻のところでのこの規則性が破れる。すなわち、3d殻がいっぱいになる前に4s殻が占められる。電子が完全に占めている殻および副殻では + スピンと - スピンが同数存在するので、スピン磁気モーメントは相殺される。強磁性元素は3d殻が部分的にしか占められていない不完全副殻をもつ。しかし、不完全副殻をもつ元素でも Mn, Cr, V などの元素は強磁性を示さない。強磁性元素もキュリー温度以下で原子が結晶状態にあるとき強磁性を示すが、孤立状態では強磁性を示さない。スピン間に交換相互作用が働くとき強磁性が発現する。交換相互作用は結晶格子の原子間隔に依存し、交換相互作用を特徴づける交換積分の値は原子間隔が十分大きいときゼロで、間隔が小さくなるにつれて正で大きくなる。さらに近づくとき最大値を経てから減少し、やがて負になる。交換積分が負の場合はスピンは互いに反平行に並び、反強磁性が現れる。原子直径 (a) と不完全殻の直径 (d) の比 (a/d) が 1.5 以上のとき交換積分は正で、強磁性を示す。

+ と - のスピンが同数であればスピン磁気モーメントは相殺してしまうが、相殺しな

い不對スピがあれば、交換相互作用により強磁性に加担する。孤立したFeとNi原子の不對スピンの数は3d殻に現れる。

		1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p
1)	Fe								
	+スピン	1	1	3	1	3	5	1	0
	-スピン	1	1	3	1	3	1	1	0
2)	Ni								
	+スピン	1	1	3	1	3	5	1	0
	-スピン	1	1	3	1	3	3	1	0

Feでは4個、Niでは2個の不對スピが存在するが、結晶状態になれば隣り合う原子に所属する電子軌道が重なり合って、一方の原子の電子が他の原子にも属するようになる。この結果、不對スピンの数は孤立原子の場合と結晶状態の場合で異なる。結晶を作ると4s殻の電子は原子による束縛から解放されて自由電子になる。3d殻の電子も変化を受ける。飽和磁化や中性子散乱の実験から結晶状態における1原子あたりの不對スピンの数はFeで2.2、Niで0.6、Coで1.7個である。この値が整数にならないのは、4s電子が伝導バンドを作っているように、3d電子も原子の束縛から離れて結晶全体で共有されるエネルギーバンド構造をもつものと解釈されている（下図参照）。



(a) Niと(b) Feの3d, 4s エネルギーバンドにおける電子の分布 (Brailsford, 1966による)。

-----コーヒータイム、終わり-----

## 第6章 電磁石の製作工程とコイルの設計

ここでは加速器に使用される通常の電磁石に関して製作する上で留意すべき項目を工程順に述べる。励磁コイルも電磁石設計に重要であるので、その設計方法についてもこの章で扱う。大型の加速器では数100～数1000台もの電磁石を製作するため、設計は勿論のこと製作方法にも細心の注意を払い、工程管理を徹底しなければならない。多くの場合加速器建設計画の開始前に電磁石設計は始まっているが、加速器の完成は電磁石製作のスケジュールに左右される。電磁石の製作コストも問題でコストの削減を図りながら性能を維持するために様々な創意工夫も必要である。

### 1. 鉄心の製作

#### 1.1 シャフリング (shuffling)

電磁石の性能の個体差をできるだけ小さくするために、鋼板のシャフリングが行われる。高磁場における透磁率はほぼ一様であるので、主に保持力の分布を基にして行われる。鋼板購入時に保持力と透磁率をある範囲に指定できれば問題ない。用途の広い鋼板であればこのような選択が可能である。保持力はほぼガウス分布するので、保持力の小さい部分と大きい部分を混ぜ合わせて、中心値になるように均等化する。保持力の統計分布を図1に示す。しかし、長期にわたる鋼板の大量の調達では、保持力も大きく変化することもある。このような場合は当然、電磁石の個体差も大きく、最後の手段として据え付け時に電磁石のシャフリングを行い、リング全体で電磁石の性能が平均化するようにする。

緻密にシャフリングを行おうとすれば、広い場所が必要になるので、現実的には保持力の分布を数ブロックに分けて混ぜ合わせる。

#### 1.2 打抜き (stamping, punching)

鋼板の打抜きを精密に行うためには、粗打抜きと仕上げ打抜きの2回打抜き法が採用

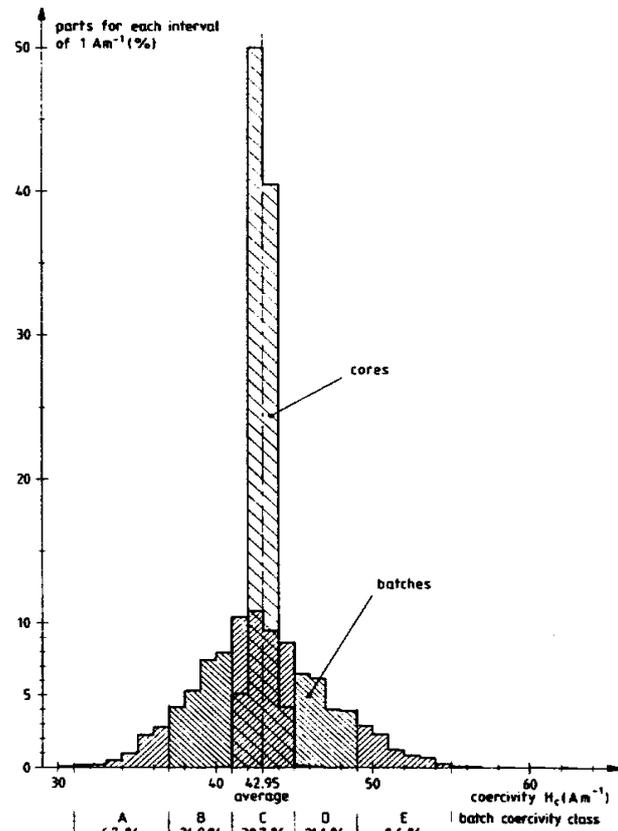


図1 保持力の統計分布、シャフリング前の分布とシャフリング後の平均化された鉄心の保持力 (CERN)。

される。打抜きは周囲温度の影響により抜き型寸法が変化するため、温度制御された部屋で行われる。図2は打抜きを行う工場の様子を示す例である。この図では打抜きは鋼板に歪みを与えないようにシートで行われているが、現在はドラムに巻かれたロール状の鋼板を巻き戻しながら自動的に打抜く方法が採用されている。

打抜き精度を上げるため、抜き型は調整ができるように分割されたブロックで構成され、打抜き鋼板の寸法測定からブロックを動かして抜き型の修正を行う。鋼板を多数打抜けば抜き型のエッジが摩耗するので、打抜いた鋼板の寸法を規定枚数ごとに測定し、打抜き精度が悪くなれば研磨を行う。抜き型の雄雌の片側クリアランスは10~20 μmである。

打抜かれた鋼板の切断部にはダレとカエリが現れる。カエリは鋼板を積層するとき、隣の鋼板を押えつけ、電氣的に短絡すれば渦電流が流れる原因になるので、この部分を取り除くため片面だけバリ取りを行う。ダレが大きい場合は打抜き寸法精度が悪くなる。一般的に加速器の電磁石で達成されている基準はダレが板厚の10%以下、カエリが板厚の2%以下である。

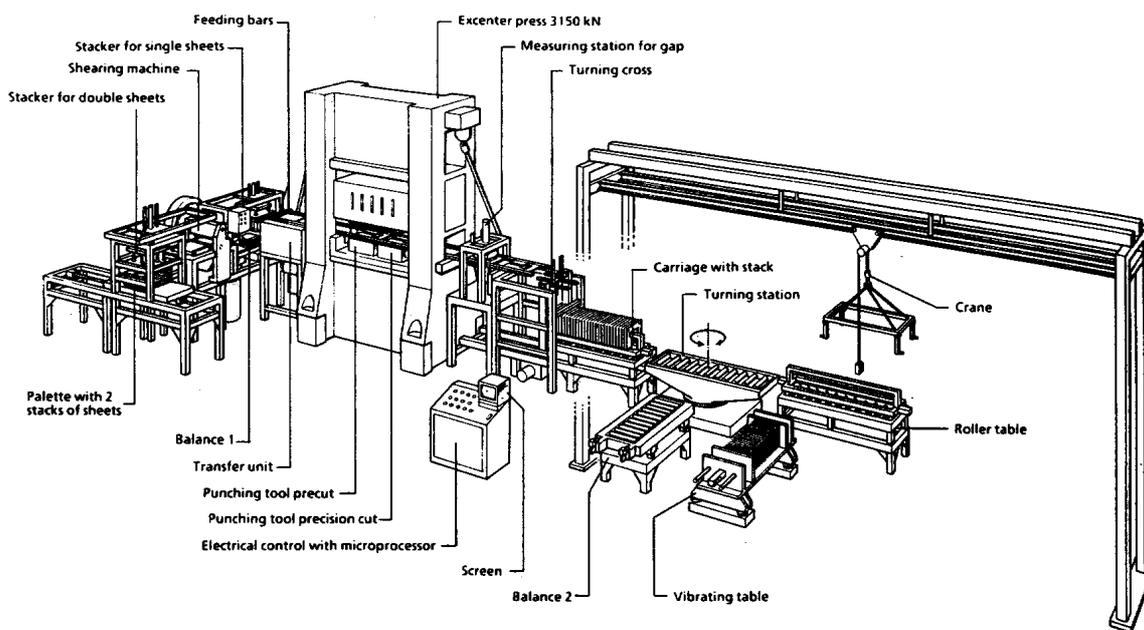


図2 鋼板の打抜きの工場内の様子 (CERN-LEP)。

鋼板は厚み偏差をもっているなので、積層時に偏差を修正できるように、打抜き方向を変えたものを用意する必要がある。

non-critical な補正電磁石の場合は、抜き型は一体構造とし、粗打抜きを省略して1回打抜きである。

### 1.3 積層、拘束

打抜いた鋼板は積層治具の上で積層する。積層は仮締め付けをしては積層厚み偏差を

測定しながら行い、厚み偏差を修正する。規定長積層した後で、全体を長さ方向と横方向に加圧する。この加圧は溶接変形を抑えるため、加圧により積層治具が変形しない構造にしなければならない。溶接は加圧下で行うので、積層治具は溶接による変形応力に十分耐える強度を持たなければならない。端板の加圧面が平行になっていなければ、加圧により鉄心が傾くので、端板の平行度が出ていなければならない。

長さ方向は油圧シリンダーで最大  $20 \text{ kg/cm}^2$  の締め付け圧が掛けられるように設計する。

電磁石の真直度を出すため、磁極部に積層の基準になる面（積層基準面）を持たせる磁極設計を行う必要がある。

溶接に入る前に、加圧状態で溶接変形の原因になる積層治具と鉄心との隙間がないこと、積層治具の変形がないことを確認しなければならない。

#### 1.4 溶接

鉄心の溶接はラミネーションを固定するために行われ、鉄心側面に付ける側板および両端の非磁性の端板でラミネーションを抑え込む。一般に側板は磁場には寄与しないので、構造用軟鉄が使用される。端板は鋼板を加圧状態で抑えるため変形しない程度の厚み、数 cm 程度、が必要である。磁場の実効的長さは機械的な長さより長く、端板を含めた長さがほぼ実効長に相当する。また、端板はリングに組込まれたとき、まわりの機器との取り合いのため、機器取付けの座に利用されたり、高次磁場成分補正のためのシムを取付ける必要がある。パルス電磁石の場合、この部分に渦電流が流れやすいため、磁場誤差が入る原因にもなる。このような理由から、端板は磁場に寄与しない非磁性で、しかも電気抵抗の大きな SUS が使用される。室温における比電気抵抗は純鉄で  $9.8 \times 10^{-8} \text{ m}$ 、SUS316L は  $74 \times 10^{-8} \text{ m}$  である。約 7 倍大きい。SUS は非磁性（透磁率は 1.02）であるが、若干の透磁率をもち、機械加工や溶接によって透磁率が増加する。過去には SUS304 や SUS316 が使用されたが、機械加工や溶接による透磁率の増加が大きいため現在では SUS316L が一般的である。機械加工後の透磁率は加工法にもよるが、1.05 程度である。加工による透磁率は焼鈍により除くことができる。電磁石の製作仕様として端板の透磁率は 1.05 以下を推奨している。

高マンガン非磁性鋼（透磁率は 1.02）も比電気抵抗は SUS と同程度だが、被切削性が悪く工具の寿命が議論されたこともある。現在では快削高マンガン非磁性鋼が開発され、被切削性も向上している。

#### 1.5 溶接法

溶接は鉄の合わせ部分を加熱して部分的に溶かして溶着させるもので、溶けた部分の温度が下がるとき鉄が収縮しながら固まるので、まわりの鉄を引き寄せながら固化する。電磁石の溶接部分は鉄心側面にあるため、ギャップが開くように変形する。変形量はギャップ寸法で許容公差  $\pm 0.05 \text{ mm}$  に対して、 $0.1 \sim 0.3 \text{ mm}$  にもなる。これは非常に大きな変形量で、このままでは磁場誤差や高次磁場成分のため加速器の電磁石には使用できない。昔から行われている方法は溶接部分を機械的に衝撃して、この部分に溜っている応力を

開放する、所謂ピーニングが行われていた。すべての電磁石にピーニングを施すのは大変な作業である。

溶接変形のメカニズムは複雑であるが、大別すれば溶接の熱応力による変形と、ビードの収縮による変形がある。

最近の溶接技術では、溶接変形の発生メカニズムから、図3のように変形に弱い遊びの部分鉄心の形状の中に盛り込み、この部分に変形を吸収させる方法が採用されている。鉄心外周部の溶接部位に近いところにこのような遊びの切れ込みを作る。このようにすれば溶接の歩留まりは格段に向上し、90%以上と言われている。

溶接変形を抑えるため昔から飛石溶接という方法が採用されていた。これは溶接による鉄心の熱を鉄心全体に分散させ、一カ所に過大な熱応力が発生しないようにするもので、複数の溶接作業員が鉄心のまわりを回転しながら少しずつ溶接を行うもので、BNLのAGSやKEKの主リングの電磁石はこのようにして溶接された。このようにしても許容できない変形が生じ、ニューマチックハンマーで溶接部をたたき伸ばすピーニング(peening)が必要であった。飛石溶接は回転変形の防止に効果がある。

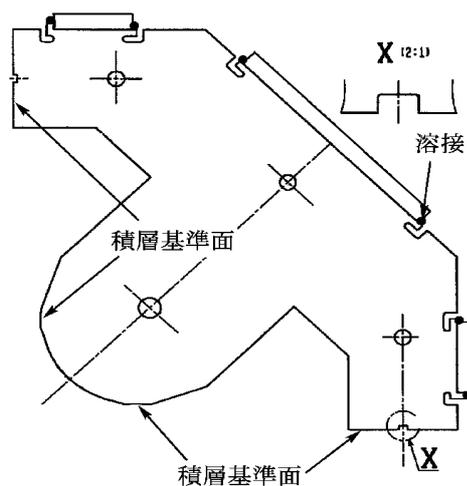
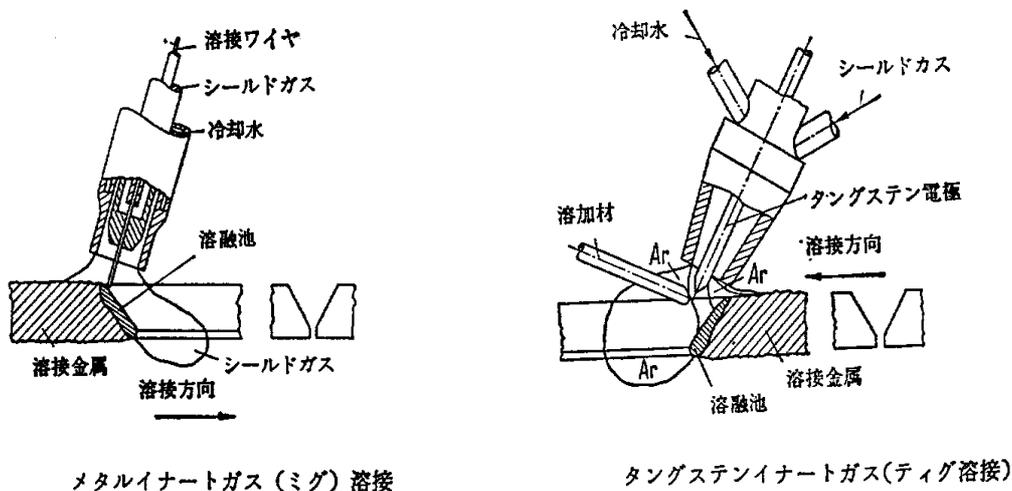


図3 溶接変形を防ぐ切れ込み。

溶接法として、熱入力が少ない、溶着金属量が少ない、自動溶接に向く、ビード幅が狭い、などに優れた方法が電磁石の溶接に向いている。自動溶接は電磁石の大量生産に向けて必要条件になり、熱入力が少なく、溶接速度の速いものほど、熱変形が小さいと思われる。この基準で溶接法を選択すれば、MIG溶接かTIG溶接を採用することになる。TRISTANではMIG溶接が採用され、作業性の向上のため自動溶接が行われた。この2種類の溶接法の相違を図4に示す。



メタルイナートガス (ミグ) 溶接

タングステンイナートガス(ティグ溶接)

図4 溶接法 (MIG, TIG 溶接法)。

自動溶接を採用すれば、飛び石溶接は不可能ではないにしても、溶接ヘッドの移動が錯綜するため非常に困難である。溶接順序で変形量に差があるかどうかの検討が先ず必要である。図5に示す試験片による応力分布の測定から溶接順序による応力分布の違いがあり、飛び石溶接は短い周期で応力が変化しているのに対し、一端から他端まで一気に溶接した場合の溶接方向に直角な方向の応力は飛び石溶接に比べて低く、ギャップへの影響が小さいことが窺える。幾何学的に対称な位置を同時に複数の溶接トーチで溶接すれば、溶接方向の変形も小さく収まることが考えられる。このような考察から TRISTAN では複数のトーチによる連続自動溶接が採用された。

### 1.6 鉄心の寸法測定

溶接後、除圧し、鉄心の寸法測定を行う。重要な寸法はギャップ間隔、鉄心長（端板を除いた鋼板の積層厚）、真直度、捩れなどである。鉄心長の偏差は鋼板の厚みの半分程度である。

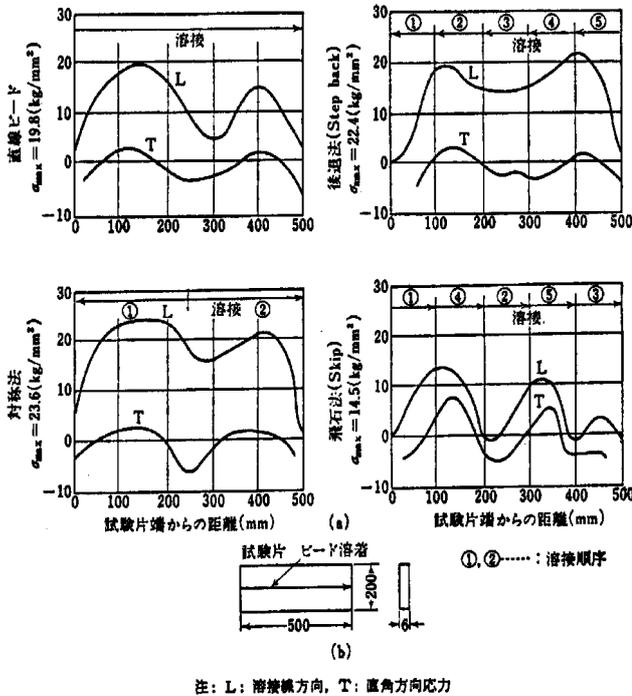


図5 溶接応力の実測例。

## 2. コイル

### 2.1 コイル導体

コイル導体は冷却水チャンネルのある無酸素銅（OFC ホロー導体）がアルミである。アルミは比電気抵抗が大きいので、抵抗値を下げるためにコイル寸法は大きくなる。コイル製作コストはアルミの方が安い。運転経費、耐久性、接続性、電気端子取り合いの点では銅の方が優れている。

アルミの場合、コイルの接続には heliarc 溶接が必要で、機械的接続にも十分注意しなければならない。また、接続部の接触抵抗を避けるために特殊なペースト（Alcoa No.

2EJC) が使用される。Al の表面絶縁処理には陽極酸化法 (hard-anodized) が採用され (絶縁破壊は 750V)、絶縁膜には耐放射線性がある。しかし、この膜は機械的な衝撃で壊れやすく、緻密ではないので、冷却水の漏れに対する対策が必要である。

国際的な電気品位の焼鈍銅 (99.91%純度) の 20 における比抵抗は

$$\rho = 1.724 \times 10^{-8} [1 + 0.00393(t - 20^{\circ}\text{C})] \quad [\text{m}]$$

また、Al の国際規格は 20 において、

$$\rho = 2.827 \times 10^{-8} [1 + 0.00403(t - 20^{\circ}\text{C})] \quad [\text{m}]$$

である。単位重量当たりの銅の価格はアルミの 3 倍である。密度の比は 3.27 であるため、電力消費量を同じとすれば Al を使用した場合には鉄心とコイルが大きくなるがそれでも十分安価である。

銅の場合、導体の長さには制限があり、1 つのコイルは途中で多くの接続箇所をもち、接続部分は銀口ウ付けされる。コイル通電中は導体の冷却水チャンネルを水が 1~2 m/sec 程度の速度で流れる。もし、接続箇所が少しでもズレていれば、流路が狭まって流速が増し、段差のところで冷却水流による低圧部が発生し、銀ローが損傷 (壊食) を受ける。この壊食は銀ローの弱いところを伝わって外部まで達し、水漏れが起こる。損傷のメカニズムの詳細は不明であるが、圧力が飽和蒸気圧まで低下すれば、そこで水が気化し、泡 (蒸気泡) ができる。この泡は水圧の高い部分で潰れ、そのときに強い衝撃波を発生する。この衝撃波が冷却チャンネルの弱い面を壊食 (erosion) する。このような現象は空洞現象 (cavitation) と呼ばれる。

導体接続に銀ローを挟んで、直付けにする方法が FNAL で採用され、KEK の PS や TRISTAN でも採用されている。この方法では、このような事態が発生する危険があり、工程管理が重要である。上のような故障は今までに 1 件だけ発生し、コイルが通電中に層間短絡した。

## 2.2 コイル絶縁材料

加速器の電磁石では、コイルは絶えず放射線に曝されるので、絶縁材料の耐放射線性が問題になる。コイルの絶縁層は 4 重に行われる。導体の素線絶縁と層間絶縁、層間絶縁された導体を束ねて絶縁する対地絶縁、さらにその外側の保護絶縁層である。以前はボロンを含まないガラステープまたはマイカテープで絶縁して全体を真空含浸させ、加熱硬化させた。樹脂含浸コイルの絶縁特性に関して、必要な性能と一様性を得るために特別の絶縁技術が要求される。樹脂で接合した材料の機械的性質と電気的性質は相互に関係があるため、最適の機械的強度をもつ樹脂を選び同時に信頼性のある電気絶縁を得ることは一般には不可能である。低電圧で使用する場合、エポキシ樹脂の絶縁破壊強度は 16~22 kV/mm である。しかし、対地電圧が高い場合はマイカシートの絶縁を使用する必要がある。マイカの絶縁破壊強度は 120~240 kV/mm である

樹脂接合のコイルの製作技術は、導体を望ましい形状に曲げて成形した後でポーラスなガラス繊維の絶縁テープで個々の導体をラップする。コイルを気密容器に入れて真空に引き、液体状の熱いエポキシ樹脂を容器に流し込みコイル全体に浸透するようにして、エポキシ樹脂でポーラスな絶縁を満たす。硬化した後でコイルは最終的なキュアのた

めオープンで加熱し、コイル全体を特別の高電圧絶縁層で包む。この技術は中空導体で使用でき、この場合水チャンネルの口出し部は電気端子と共に絶縁しない。図6はパルス励磁されるBNLのAGS電磁石のコイル断面で、大きな中空導体を使用されている。

現在ではもっと効率的なコイル絶縁システムとしてガラス繊維にエポキシ樹脂を含浸させたセミキュア絶縁テープが開発され、これで素線絶縁と層間絶縁を行い、エポキシセミキュアガラス/マイカテープの対地絶縁を施した後、エポキシセミキュアガラステープで保護し、加熱硬化させる。コイル外周部に絶縁ワニス塗布してコイルが出来上がる。

新しい方式では、セミキュアのエポキシ樹脂が溶け出して層間の隙間を埋めるが、エポキシの量は隙間を埋め尽くすほど十分ではない。セミキュア絶縁は非常にポラスで湿気があれば簡単に電氣的に短絡する。このためコイル内に湿気が入らないように、特にコイル口出し部から冷却水や湿気が浸透しないように対策しなければならない。この種の故障も今までに1件発生し、やはり電気短絡を起した。

KEKで経験した故障を2、3紹介したが、いずれも今後には生かすべき教訓である。

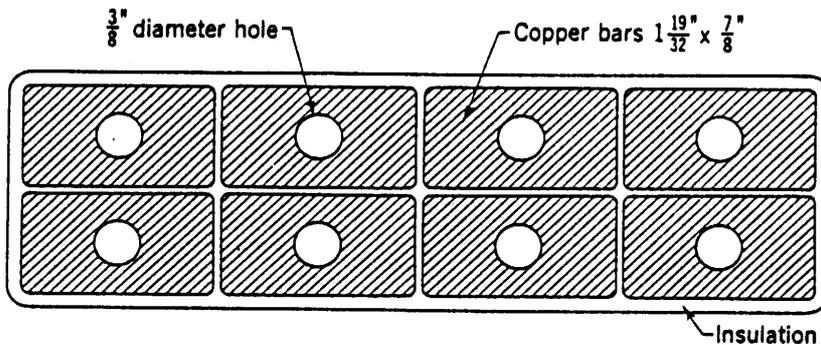


図6 中空導体コイルの断面形状(AGS)。

多くの熱硬化樹脂は $10^9$  radまでの吸収線量に耐えるが、これ以上では有機物による絶縁は使用できない。図7にCERNのコイル絶縁用に使用されているエポキシ樹脂の耐放射線試験のデータを示す。この他、コイルや冷却水母管との接続に使用される絶縁材料の耐放射線データをこの章の最後に示す。これらのデータはCERNのVan de Voordeによって収集されたものである。

コイルは鉄心に装着する前に検査が行われる。これには加圧試験、誘導試験、対地絶縁試験などがある。試験電圧は定格電圧を $E[V]$ とすれば

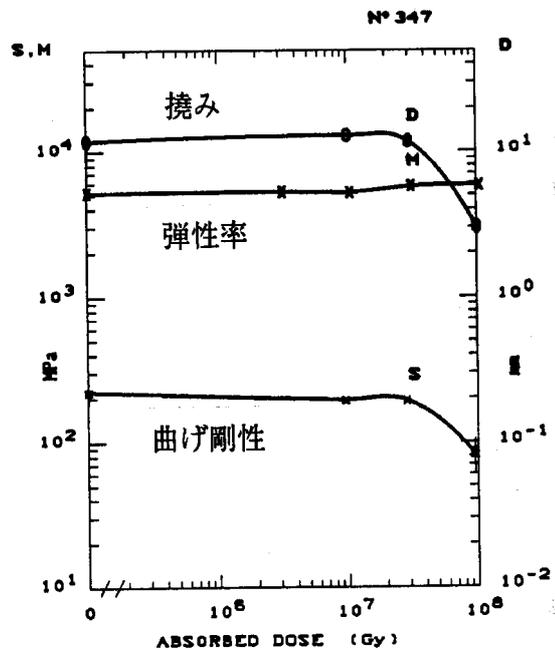


図7 コイル絶縁用エポキシ樹脂の耐放射線試験のデータ(CERN)、1 Gy = 100 rad。

$$\text{試験電圧} = 2E + 1000 \text{ [V]}$$

(最低でも 1,500V)

に従う。コイルの最初の 1 ターン目に励磁電源電圧とその反射波が重なって約 2 倍の電圧がかかることが予想される。

加圧試験として、試験電圧を印加して異常の有無を検査する。誘導試験は、この試験電圧に等しい交流電圧をコイルに印加して、層間およびターン間の試験を行う。絶縁の弱い個所が破壊される。対地絶縁試験はコイル表面を通して鉄心に地絡しないことを確認するための試験である。

### 2.3 コイルの設計

励磁コイルは磁気回路方程式における起磁力 (magnetomotive force) またはアンペアターン ( $Ni$ ) を与える。直流電磁石では決めるべき最初のパラメータは励磁巻線の抵抗で消費する電力である。以下に示すように、電力は導体の体積に逆比例するため、第 1 次近似では随意に決められる。

導体 1 本の断面積を  $a$ 、コイルのターン数を  $N$ 、1 ターンの平均長さを  $\ell$  とする。導体の比抵抗を  $\rho$  (巻線内の平均温度における比抵抗) とすれば、コイルの全抵抗は

$$R = \frac{\rho N \ell}{a} \quad (1)$$

である。最大電流  $i$  は選ばれたピーク励磁  $Ni$  によって指定される。この電流における消費電力  $U$  は

$$U = i^2 R = \frac{\rho (Ni)^2 \ell^2}{Na \ell} = \frac{\rho (Ni)^2 \ell^2}{\text{coil volume}} \quad (2)$$

である。この関係から電力が決まればコイルの導体体積が得られる。ターンの平均長さは導体の体積によるが、コイルの断面寸法は絶縁材の分布が関係する。パッキング比を  $\lambda = (\text{導体断面積}) / (\text{コイル断面積})$  とすれば、 $\lambda > 0.5$  である。コイル断面積には導体、絶縁、冷却チャンネルの占める面積が含まれる。ターン当たりの平均長さ  $\ell$  はコイルの外周と内周の約半分である。

導体サイズを決めるターン数  $N$  は電源の電流 - 電圧の定格に合うように調節する。電圧  $V$ 、電力  $U$ 、アンペアターン  $Ni$  に対して、ターン数は次式で与えられる。

$$N = \frac{(Ni)V}{U} \quad (3)$$

2 つの同じコイル (パンケーキ) を作るとすれば、ターン数は偶数である。さらに、ターン数はコイルのレイヤー数で割り切れなければならない。その他、レイヤー数の選択に影響するコイルのレイヤー相互の接続の条件が入る。全てのレイヤーが同じターン数をもつ長方形の断面をもつ通常的设计とは別に、四角形とは異なる断面のコイル設計もある。単純な長方形断面形状は冷却システムの構造、機械的支持、コイル巻線プロセスが簡単になるから経済的である。上に述べたターン数の制約のため、偏向電磁石の場合は、8, 16, 24, 32 などの整数に制限され、電圧の選択もある 1 組の値に制限される。励磁の余裕を考慮して必要電圧  $V$  は電源電圧より幾分低い電圧になるターン数  $N$  が選ばれる。コイルの電圧は電流密度を  $j (= i/a)$  とすれば、

$$V = Ri = \frac{U}{i} = \rho Nj\ell \quad (4)$$

である。

コイルのインダクタンスも励磁に関して重要なパラメータである。コイルのターン数を  $N$ 、交差する磁束を  $[Wb]$ 、励磁電流を  $I[A]$  とすれば、

$$L = \frac{N}{I} \quad [H] \quad (5)$$

である。磁束は偏向電磁石の場合、漏れ磁場を考慮して、

$$= w\ell B \quad (6)$$

ここで、

$$w = \begin{array}{ll} w_a + 2w_c / 3 & : \text{window frame magnet} \\ w_p + h / 2 & : \text{magnet with poles} \end{array}$$

$w_a$  = コイル内矩 [m]

$w_c$  = コイル片幅 [m]

$w_p$  = 磁極幅 [m]

$h$  = ギャップ高 [m]

$\ell$  = 磁極の長さ [m]

である。偏向電磁石の磁場

$$B = \frac{\mu_0 NI}{h} \quad (7)$$

を考慮すれば

$$L_{dipole} = \frac{\mu_0 N^2 w \ell}{h} [H] \quad (8)$$

4 極電磁石の場合は、ボア半径を  $r$  とすれば、磁場勾配は

$$g = \frac{2\mu_0 NI}{r^2} \quad (9)$$

であるので、中心軸からコイルまでの距離を  $x_{\max}$  [m] とすれば、1 磁極当たりのコイルと交差する磁束は漏れを考慮して、

$$\begin{aligned} &= 2\ell \int_0^{x_{\max}} g x dx = 2\ell g x_{\max} \left( x_{\max} + \frac{2}{3} w_c \right) \\ &= \frac{2\mu_0 NI \ell}{r^2} x_{\max} \left( x_{\max} + \frac{2}{3} w_c \right) \end{aligned} \quad (10)$$

である。したがって、4 磁極を考慮した 4 極電磁石のインダクタンスは

$$L_{quad} = \frac{8\mu_0 N^2 \ell}{r^2} x_{\max} \left( x_{\max} + \frac{2}{3} w_c \right) \quad (11)$$

である。

速いパルスまたは交流励磁のコイルでは、電圧は電流変化率に比例する。

$$V = Ri + L \frac{dI}{dt} \quad (12)$$

このため、コイルのインダクタンスを小さくすることが必要で、ターン数を少なくして、断面を大きくする。ソリッド導体では渦電流損失が大きくなる。撚線は磁気力に対する複雑なクランプと絶縁構造が必要で、冷却が困難である。60 Hz で励磁する Cambridge

電子加速器（CEA、ハーバード大学）では、撚線を使用し樹脂含浸法が採用された。図8は導体のすき間に薄肉の冷却チューブを埋め固めた撚線コイルの断面である。

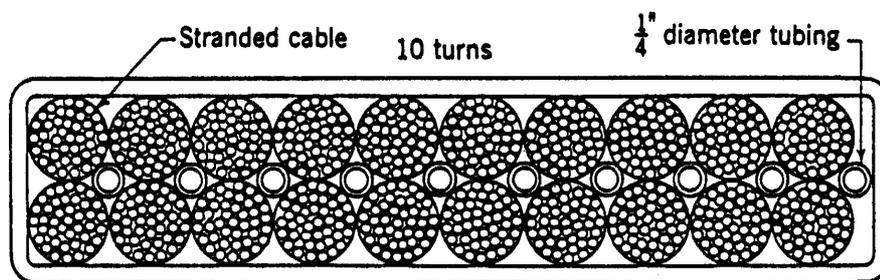


図8 内部に水冷却チューブをもつ樹脂含浸による60cps/パルス励磁の撚線コイル（CEA）。

## 2.4 コイルの冷却

導体断面の形状は冷却法の影響を強く受ける。電磁石のコイルの冷却には、空気冷却と水冷却の2つの場合が考えられる。空冷はステアリング電磁石のように発熱が少ないものに適用される。強制的な送風はしないで、静的に空冷される。

水冷の技術は加速器のために開発されたもので、1つの方法は間接的に冷却するもので、導体と金属水冷層を交互に重ねる設計である。薄い中間絶縁層を通して熱が伝わる。金属冷却層は冷却水を通す中空の角形チューブをスパイラル状に巻いた薄い板に成形される。この乾式巻線水冷コイルはコンパクトで取付けが簡単である。しかし、導体の温度が比較的高くなり、水漏れを起しやすい。この間接冷却法は発熱の比較的小さい補正電磁石に採用されることがある。

今日最も一般的な水冷法は中空導体（ホロー導体）の中に冷却水を流す直接冷却法である。これは比較的大きな断面をもつ導体で可能である。大型電磁石では導体断面は十分大きく中空導体が使用できる。長方形の外形をもち、その中心に水チャンネルのある押し銅（またはアルミ）の棒が使用される。この構造は冷却効率がよく、大きな電流密度（ $5 \sim 10 A/mm^2$ ）に耐える。大型電磁石では、導体の途中で多数の溶接ジョイントが必要になり、水漏れの原因になることが欠点である。

### [1] 中空導体の冷却水流量

所定の冷却水流量を得るために必要な水圧は、冷却チャンネルのサイズと形状に関係する。直接水冷却コイルの設計において冷却チャンネルのサイズは最も重要である。コイルに発生した熱を取り去るために必要な流量はコイルの発熱（消費電力）と許される冷却水の温度上昇から決定される。許容温度上昇を  $T$  [ ]、発熱を  $U$  [kW] とすれば、必要冷却水流量  $q$  は次式で与えられる。

$$q = \frac{U}{4.2 T} = 10^{-3} v \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \text{ [liter / sec]} \quad (13)$$

ここで、 $v$  [m/sec] は冷却水の流速、 $d$  [mm] は冷却チャンネルの直径である。流速はキャビテーションによる導体の侵食を防ぐため、 $\sim 2.5$  m/sec 以下に選ばれる。

冷却水の流速と冷却チャンネルの直径からレイノルズ数を計算すれば、流れが静流であるか乱流であるかが決まる。多くの場合、加速器の冷却システムは乱流領域にある。流量 $q$  [liter/sec] と冷却チャンネルの直径 $d$  [mm] を使って、温度 $T$  [ ] の水に対するレイノルズ数 $Re$ は

$$Re = 10^{-3} \frac{vd}{\nu_T} = \frac{4q}{\pi d \nu_T} \quad (14)$$

である。ここで $\nu_T$  [m<sup>2</sup>/sec] は $T$  [ ] における動粘度である。水の動粘度を表 1 に示す。 $Re > 2300$  であれば乱流である。

表 1 水の動粘度 (理科年表より)

温度 $T$ [ ]	動粘度 $\nu_T$ [m <sup>2</sup> /sec]
0	$1.792 \times 10^{-6}$
10	1.307
20	1.0038
30	0.801
40	0.658
50	0.554

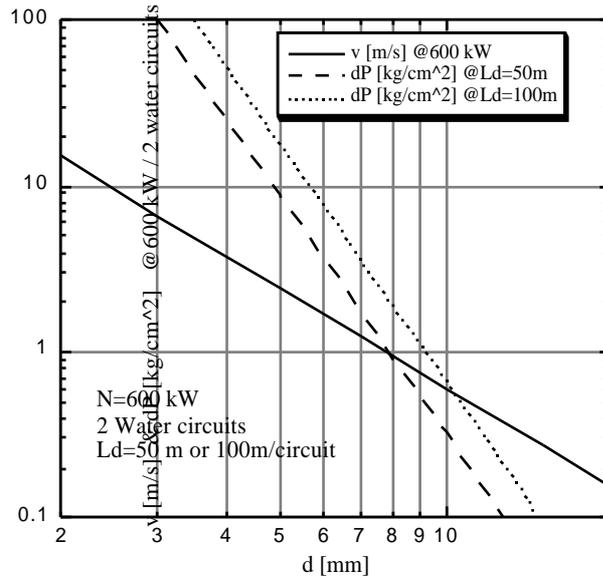


図 9 発熱量600kWの電磁石を冷却水2回路(各50m, 100mの場合)で温度上昇を15 として冷却チャンネルの直径と流速、圧力損失の関係。

必要な圧力損失  $p$  は次式から得られる。

$$P[\text{kg/cm}^2] = 0.18 \frac{L_d v^{1.75}}{F_s^{1.75} d^{1.25}} \quad (15)$$

ここで、 $v$  = 流速 [m/sec]

$d$  = 冷却チャンネルの直径 [mm] =  $4A_F$  / 冷却チャンネル断面の周長

$L_d$  = 冷却チャンネルの長さ [m]

$F_s (= A_F / d^2)$  = 形状因子、丸穴の場合は ( $= \pi / 4$ )

$A_F$  = 冷却水流路の断面積

である。

冷却チャンネルが丸穴の場合は上の式は簡単になり、

$$P[\text{kg/cm}^2] = 5 \times 10^{-5} \frac{L_d v^{1.75}}{d^{1.25}} \quad (16)$$

ただし、 $v$  = 流速 [m/sec]

$d$  = 冷却チャンネルの直径 [m]

$L_d$  = 冷却チャンネルの長さ [m]

である。発熱量 600kW のコイルを冷却水 2 回路で冷却する場合の例を図 9 に示す。各冷却水回路の長さ 50m または 100m について許容温度上昇を 15℃ として計算したものである。

[2] 無酸素銅の中空導体（ホローコンダクター、Hollow conductor）の例

冷却水の通路を持つ無酸素銅導体には、その用途に応じて多くの形状がある。図 10 は今までにある電線メーカーで作られた断面形状である。このような断面は型を通して押し出して作られるので導体の長さには制限がある。この内、電磁石によく採用される形状（型番 7，8）について表 2 と表 3 に示す。これらの表は過去に製作されたもので、この中から選ぶ必要は必ずしもないが、コイル設計の参考になる。少量の導体であれば表の中から選ぶ方が安価であるが、同じサイズのを大量に使用する場合は新たに押出型を作ってもそれほどコストには影響しない。

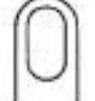
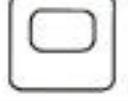
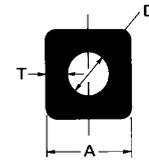
型番	断面	型番	断面	型番	断面	型番	断面
1		4		7		10	
2		5		8		11	
3		6		9			

図 10 無酸素銅中空導体の断面形状（日立電線）。

2.5 特殊な絶縁方法

非常に過激な放射線を受ける場所に使用される電磁石、例えば実験ビームラインにおけるビーム振り分け電磁石、はエポキシ樹脂絶縁では長時間耐えることはできない。絶縁体の積算吸収線量が  $10^9$  rad ( $10^7$  Gy) 程度以上になれば有機物は最早使用に耐えない。このような場所では酸化モリブデン絶縁やセラミック絶縁、コンクリート絶縁などの特殊な方法が採用される。シンクロトロンリング内でも、遅いビーム取出用のセプタム電磁石もセプタムコイルがビームに直撃されるので耐放射線性が特に要求される。ビームに曝されるセプタムは構造的に絶縁スペースが限られるので薄いセラミック絶縁が施される。パルス励磁されるセプタムは電磁力による機械的な力を繰返し受けるので、コイルの固定方法にも配慮が必要である。また、放射線の強い場所では残留放射能も強く、電磁石の故障に速やかに対処できるような対策も必要である。

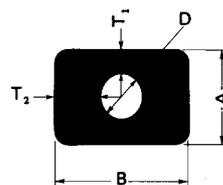
表2 型番7の無酸素銅中空導体の寸法



HITACHI-NO	DIMENSIONS				Area (mm <sup>2</sup> )	Weight (kg/m)	Length (Random) (m)	Packing form
	A	D	T	R				
H-750	65	27	19	3	3,649	32.5	2-3	Straight
H-761	60.4	31.75	14.3	3	2,851	25.4	2-3	Straight
H-762	50.8	27	11.9	3	2,005	17.8	3-4	Straight
H-773	40	20	10	3	1,278	11.4	5-7	Straight
H-934	46	22	12	4.5	1,719	15.4	5-7	Straight
H-7018	16	7	4.5	1.5	215.6	1.93	55	Coil
O-750	7.5	4.5	1.5	0.8	39.8	0.354	40	Coil
O-890	24	16	4	2	372	3.31	21	Coil
O-932	11	6	2.5	1	91.8	0.82	15	Coil
O-938	9	6	1.5	0.5	52.5	0.467	65	Coil
O-963	16	10	3	1	176.6	1.57	57	Coil
O-998	20.1	12	4.05	2	287.6	2.56	25	Coil
O-999	10.8	7	1.9	1	77.3	0.69	127	Coil
O-1013	6	4	1	1	22.6	0.202	30	Coil
O-1050	13.5	8	2.75	1	131	1.17	30	Coil
O-1059	8.5	4.5	2	1.5	54.4	0.484	80	Coil
O-1060	8.5	4	4	2.25	57.7	0.513	75	Coil
O-1063	13	7	3	3	122.8	1.093	25	Coil
O-1116	20	14	3	1	245.2	2.19	6-8	Straight
O-1128	38	26	6	2	884.4	7.91	6-8	Straight
O-1141	12.5	7	2.75	1	116.9	1.045	60	Coil
O-1143	14.9	6	4.45	2	190.3	1.70	21	Coil
O-1148	30	22	4	2	496.5	4.44	6-8	Straight
O-1173	8.5	5	1.75	1.5	50.7	0.453	80	Coil
O-1199	50	30	10	3	707	14.7	3-5	Straight
O-1221	15	7.5	3.75	1.5	178.9	1.60	42	Coil
O-1226	25	13	6	1	491.4	4.39	6-8	Straight
O-1255	6.4	3.2	1.6	0.6	32.6	0.291	95	Coil
O-1257	11.86	6.985	2.44	1.52	100.4	0.897	40	Coil

Tolerance: A, D: 1% of dimension A, D (Max. ±0.6 mm, Min. ±0.1 mm)  
 T: 10% of dimension T (Max. ±0.6 mm, Min. ±0.1 mm)

表3 型番8の無酸素銅中空導体の寸法

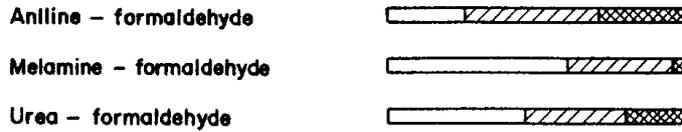


HITACHI -NO	DIMENSIONS						Area (mm <sup>2</sup> )	Weight (kg/m)	Length (Random) (m)	Packing form
	A	B	D	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	R				
H-693	13	54	8	2.5	23	2	648.2	5.76	8-10	Straight
H-710	17	24.5	12	2.5	6.25	2	300.6	2.69	25	Coil
H-711	12	15	5	3.5	5	1	159.5	1.43	13	Coil
H-713	18	22	12	3	5	2	281	2.5	25	Coil
H-740	21.6	23.5	11	5.3	6.25	2	404	3.59	23	Coil
H-754	16	18	5.5	5.25	6.25	1.2	263.7	2.35	17	Coil
H-800	11.8	15.8	5.5	3.15	5.15	1.2	161.5	1.44	30	Coil
H-804	10	14	7	1.5	3.5	1.6	99.3	0.88	45	Coil
H-807	11.6	17.5	5	3.3	6.25	1	182.5	1.62	30	Coil
H-850	11.5	16	5	3.25	5.5	1.2	163.2	1.46	30	Coil
H-851	17	28	6	5.5	11	3	440.2	3.94	12	Coil
H-932	20	28	12	4	8	4	433.1	3.87	20	Coil
H-963	21.6	23.5	11	5.3	6.25	2	409.1	3.66	8-10	Straight
H-980	14	18	6	4	6	1	219.6	1.96	8-10	Straight
H-989	17	24	12	2.5	6	2	289.1	2.58	27	Coil
H-992	8.9	10.5	4	2.45	3.25	2	78.0	0.70	8-10	Straight
H-1022	15	20	9	3	5.5	2	230.5	2.06	8-10	Straight
H-1024	21	28	12	4.5	8	2	468.3	4.19	8-10	Straight
H-1025	15	20	7	4	6.5	2	255.6	2.29	8-10	Straight
H-1032	22	30	14	4	8	3	487.1	4.35	8-10	Straight
H-1050	16	72	10	3	31	2	1062.8	9.50	5-7	Straight
H-1052	9.9	18	4	2.95	7	2	160.4	1.43	8-10	Straight
H-1053	18	55	6	6	24.5	2	952.8	8.52	8-10	Straight
H-1069	23.5	24	11	6.25	6.5	2	461.5	4.13	8-10	Straight
H-7009	15	19	8.5	3.25	5.25	2	222.4	1.99	8-10	Straight
H-7011	12	15	5	3.5	5	1	157.0	1.40	8-10	Straight
H-7012	9.1	10.3	4.8	2.15	2.75	1	73.3	0.66	8-10	Straight
O-716	20	28	12	4	8	4	443.6	3.95	22	Coil
O-721	16.5	23	10	3.25	6.5	2	298.1	2.65	25	Coil
O-865	29	35	16.4	6.3	9.3	2	800.3	7.13	12	Coil
O-879	11.5	15.5	8	1.75	3.75	1	127.2	1.13	14	Coil
O-894	35	40	20	7.5	10	2	108.2	9.64	6-8	Straight
O-964	8.9	13.9	4.65	2.13	4.63	1	108	0.961	12	Coil
O-1026	5.5	6.7	3.3	1.1	1.7	0.5	28.1	0.251	20	Coil
O-1061	9.5	12.5	5.5	2	3.5	2	91.6	0.815	13	Coil
O-1062	10.5	14	6.5	2	3.75	3	106	0.95	13	Coil
O-1064	13	16.5	8.5	2.25	4	3	150	1.34	13	Coil
O-1095	17.5	21.5	12	2.75	4.75	3	255.4	2.28	30	Coil
O-1106	16	30	8	4	11	3	422	3.77	40	Coil
O-1123	14.5	27	8.5	3	9.25	2	331.3	2.96	28	Coil
O-1126	9	16	6	1.5	5	1.5	113.8	1.017	50	Coil
O-1140	8.38	10.16	5.08	1.65	2.54	1.27	63.5	0.568	38	Coil
O-1142	14	15	8	3	3.5	1.5	157.8	1.41	23	Coil
O-1149	9	20	6	1.5	7	1.5	150	1.34	8-10	Straight
O-1169	13.5	25	6	3.75	9.5	1	308.4	2.76	8-10	Straight
O-1170	26	40	8	9	16	1	984.1	8.8	5-7	Straight
O-1171	18	22	14	2	4	2	238.6	2.13	8-10	Straight
O-1177	9	17	6	1.5	5.5	1.5	122.8	1.108	8-10	Straight
O-1210	14	19	6	4	6.5	1	245.3	2.19	25	Coil
O-1217	9	22.5	6	1.5	8.25	1.5	169.2	1.51	8-10	Straight
O-1225	28	88	17	5.5	35.5	3	2229.3	19.9	2-3	Straight
O-1232	19	26	10	4.5	8	1.5	413.5	3.7	20	Coil
O-1237	14	26	10	3	8	0.8	284.9	2.55	8-10	Straight

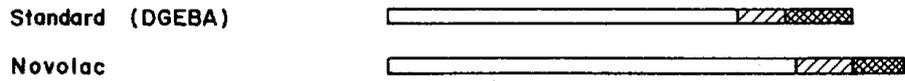
Tolerance: A, B, D: 1% of dimension A, B, D (Max. ±0.6 mm, Min. ±0.1 mm)  
 T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>: 10% of dimension T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub> (Max. ±0.6 mm, Min. ±0.1 mm)

参考 1 絶縁材料の耐放射線データ (熱硬化性樹脂)

AMINOPLASTS



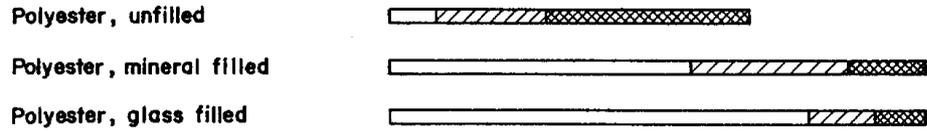
EPOXIES



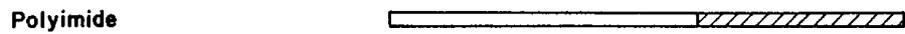
PHENOPLASTS



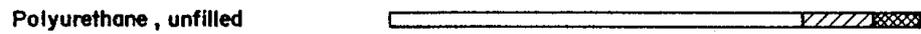
POLYESTERS



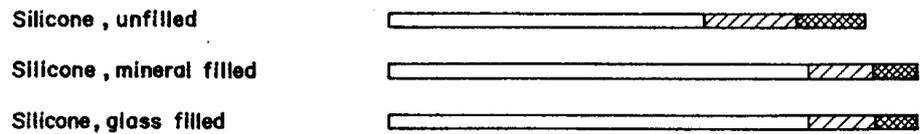
POLYIMIDE



POLYURETHANE



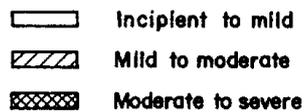
SILICONES



10<sup>5</sup> 10<sup>6</sup> 10<sup>7</sup> 10<sup>8</sup> 10<sup>9</sup> 10<sup>10</sup> 10<sup>11</sup>

Gamma dose, rad

DAMAGE

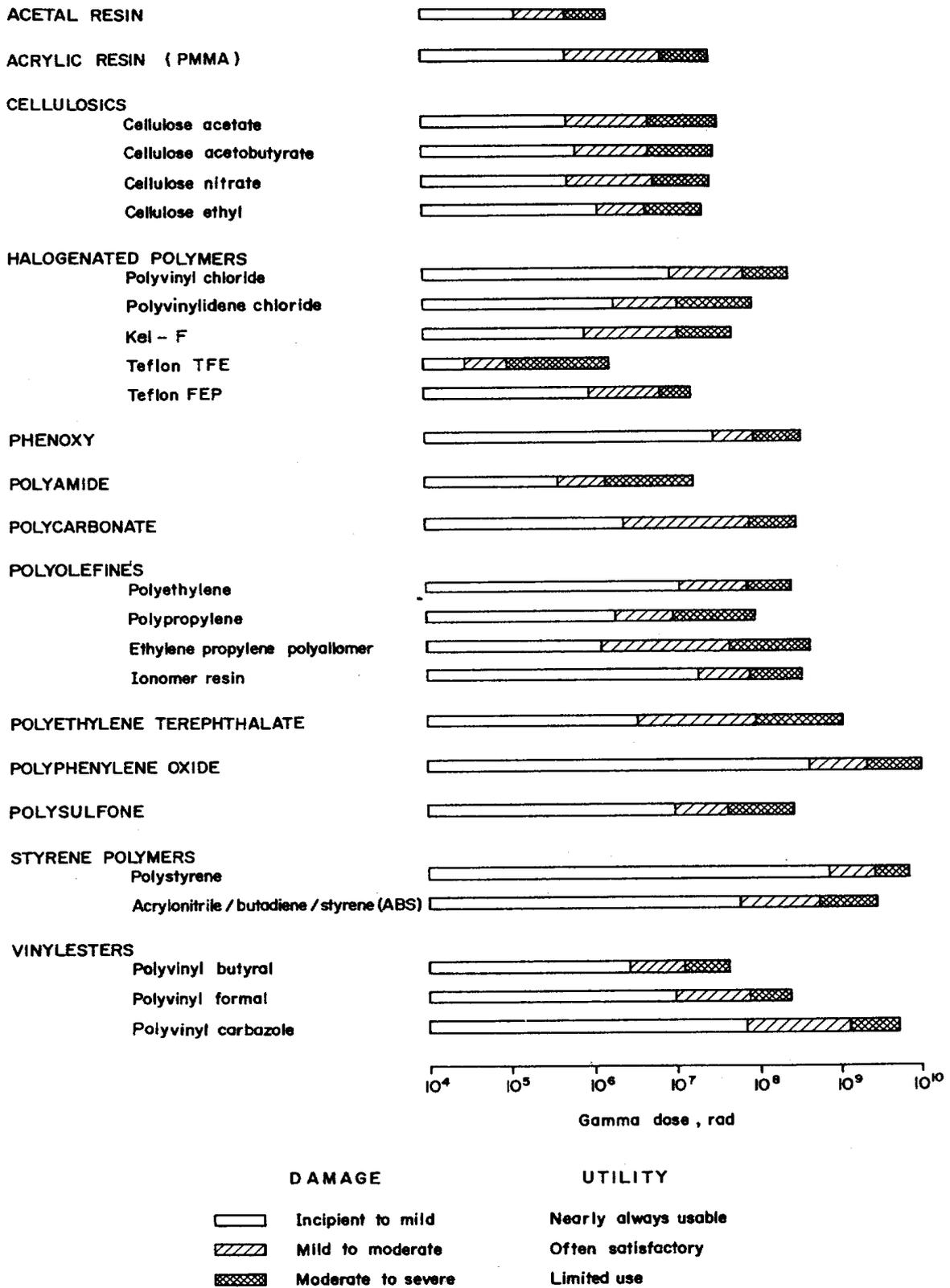


UTILITY

Nearly always usable
Often satisfactory
Limited use

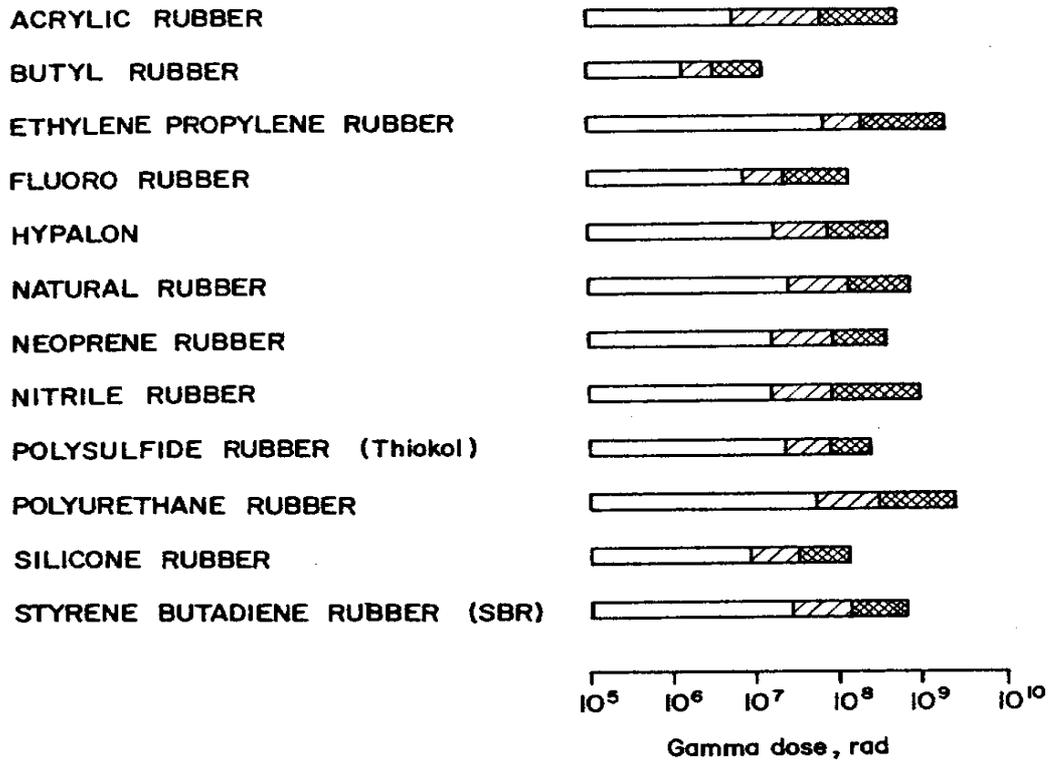
熱硬化性樹脂

参考2 絶縁材料の耐放射線データ (熱可塑性樹脂)



熱可塑性樹脂

参考3 絶縁材料の耐放射線データ (ゴム)



DAMAGE		UTILITY	
	Incipient to mild		Nearly always usable
	Mild to moderate		Often satisfactory
	Moderate to severe		Limited use

## ゴム弾性体

-----ここでちょっとコーヒータイム-----

「加速器の放射線線量とコイル絶縁エポキシ樹脂の吸収線量」

強いガンマー線で長時間照射したエポキシ樹脂の各種測定から耐放射線性データが得られる。加速器で要求する  $5 \times 10^8 \sim 10^9$  rad という値は 10 年程度の運転寿命を想定してのことで、この期間の吸収線量を 1 年間程度で実現するとすればかなりの線量率が必要である。絶縁材料についての耐放射線性データは各メーカーが独自に測定しているが、エポキシ樹脂の組成とともに一切公表されていない。電磁石の製作を依頼した時点で「うちの絶縁はこれこれの吸収線量までは補償します」ということでお茶を濁されてし

まう。

電子シンクロトロンでは放射光として強烈なX線が得られるので、これを利用して絶縁材料の性能評価が短時間に可能である。エポキシ樹脂の試料を作成して、直接放射光に曝せば短時間で真っ黒焦げになる位である。一体どのくらいの線量が得られるであろうか。トンネル内にTLDを置いて弱いビーム運転状態で短時間曝して測定された線量からビームの積算電流値あたりの線量率が推定できる。この結果は

鉛遮蔽なし 1 Ahr =  $5 \times 10^8$  rad

鉛遮蔽あり（遮蔽強化前） 1 Ahr =  $2 \times 10^7$  rad

鉛遮蔽あり（遮蔽強化後） 1 Ahr =  $5 \times 10^6$  rad

であった。鉛遮蔽は真空チェンバーに取り付けた5mm厚鉛板で、「遮蔽強化前」は取り付けがかなりルーズですき間から散乱X線が漏れる状態であった。真空チェンバーに近い6極電磁石のゴムホースが放射線損傷を受けたので全数交換したこともあった。この状況を改善するため、すき間を完全に塞ぐ工事（1987年12月）を行った後が「遮蔽強化後」である。ビーム電流の積分値を20 Ahr/yearとすれば、電磁石のコイルが受ける年間の放射線量は $20 \times 5 \times 10^6$  rad =  $10^8$  rad/yearである。この線量率から判断すればトリスタンの電磁石の絶縁はほぼ寿命がきていたことになる。コイル表面の打音から対地絶縁層はコイル本体から浮き上がっているように感じられた。

「鉛遮蔽なし」は遮蔽強化時に照射ボックスなるものを数箇所に取り付け、照射ボックス内でもっと高い線量率（ $5 \times 10^8$  rad/Ahr）が得られるようにした。これにより1ヶ月あたりの線量は非常に大きく $2 \times 10^9$  rad/monthである。

トリスタン運転の各期間毎の積算線量は

1986.11	1988.2	$2.0 \times 10^8$ rad ( 10 Ahr)
1988.3	1990.7	$2.5 \times 10^8$ rad ( 50 Ahr)
1990.8	1991.1	QCS 建設シャットダウン
1991.2	1993.6	$2.5 \times 10^8$ rad ( 50 Ahr)

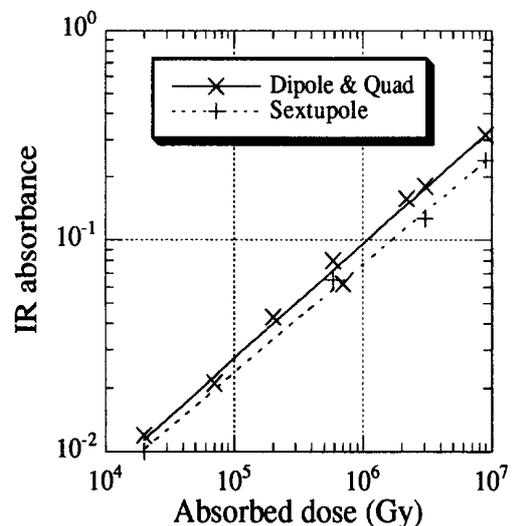
であった。

コイル絶縁表面のエポキシを耳かき一杯程度削り取って赤外線吸収スペクトルを測定することによっても吸収線量の推定が可能である。トリスタンの電磁石は偏向電磁石と4極電磁石が日立製作所製、6極電磁石が東芝製である。これらからエポキシ試料を採取して赤外線吸収スペクトルを測定した結果、両者に次のような違いが現れた。

1) 偏向電磁石、4極電磁石（日立製作所製）

[1] 未照射エポキシ樹脂では $1700 \text{ cm}^{-1}$ 付近の吸収線が無い。

（硬化材にアミン系を使用している？）



エポキシ樹脂の赤外線吸光度と吸収線量の関係

[2] 照射により  $1720\text{ cm}^{-1}$  前後に吸収線が現われる。

--> [2] の吸収スペクトルを直接読むことにより吸収線量を推定する。

2) 6 極電磁石 (東芝製)

[1] 未照射エポキシ樹脂では  $1730\text{ cm}^{-1}$  付近にエステルの吸収線がある。

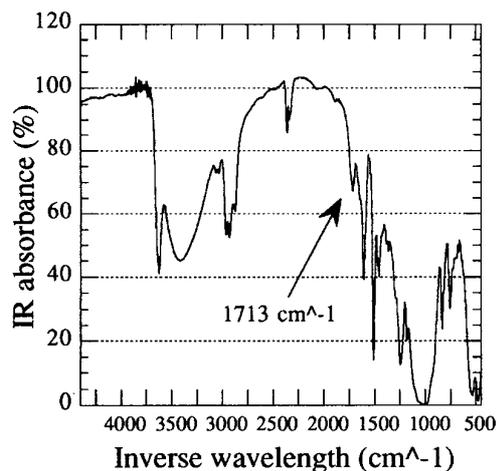
(硬化材に酸無水物を使用している)

[2] 照射により  $1730\text{ cm}^{-1}$  付近の吸収線が変化を受ける。

(放射線によりカルボニル基などの酸性物質の増加のため)

--> [1] - [2] の差スペクトルから [2] の生成物のスペクトルを測定し、吸収線量を推定する。

このようなスペクトルはエポキシ樹脂の化学結合が放射線によって切断されて各種の遊離基が作られ、それぞれに応じた固有周波数 (波長) で赤外線吸収が起ることによる。吸収が現れる周波数からエポキシの組成を知ることにも可能である。



赤外線吸光度スペクトルの例

-----コーヒータイム、終わり-----

## 第7章 超伝導電磁石の設計

1960年代にイギリスのRutherford研究所における実用的な超伝導体の安定化に必要な基本原理の理解が進み、1970年代に急速な技術的進歩を遂げた。1980年代初期にはFNALのTevatron計画が現れた。幾多の技術的課題を乗り越えて、Tevatronは大規模な極低温の超伝導電磁石システムをシンクロトロン加速器の分野で実用化した。この計画に次ぐ大規模な加速器はDESYのHERA計画である。これらの加速器はすでに稼働している。また、次世代の高エネルギー加速器として重イオンコライダーが今後の高エネルギー実験物理をリードしていくものと期待されているが、この分野で先陣をきったBNLのRHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) も運転が開始され、すでにAuイオン同志の衝突も行われた。さらに、世界最大・最強のCERNのLHC (Large Hadron Collider) は予定通り建設され、2008年9月10日公開テレビ報道の最中最初のビーム運転に成功した。2013年2月以来改良のための長期シャットダウンを終えて2015年4月には13TeVの衝突エネルギーで実験が再開される。

今後、高エネルギー物理の分野はリニアコライダーは勿論のこと、ハドロンコライダーはますます高いエネルギーに向かって進化し続けることは明白である。前者はレプトンコライダーであるが、衝突エネルギーとして1 TeV 以上を目指している。同じレプトンコライダーでも線形加速器ではなく、円形リングで電子より重い正負電荷のミュオンを衝突させるミュオンコライダーも研究されている。寿命の短いミュオンを採用する理由は加速粒子の質量が大きくなればそれだけシンクロトロン放射光による放射損失を減らすことができるからである。しかし、ミュオンの発生には高エネルギーの大強度陽子が必要で、その加速には超伝導シンクロトロンが利用される。リニアコライダーとミュオンコライダーの関係が今後どのように展開されるか興味ある話題である。

加速器分野における大規模な超伝導電磁石の製作技術はその冷却技術を含めて一応確立された段階に達したものと判断され、RHICやLHCにみられるように、超伝導電磁石の利用なくしては今後の超高エネルギー加速器は考えられない。同じ加速エネルギーにおいて、リングの半径は偏向電磁石の磁場にほぼ比例するので、超伝導電磁石で得られる強い磁場を利用すればリングの大きさを格段に小さくできる。言い換えれば、超伝導電磁石の採用により超高エネルギー加速器がより経済的に建設できる。

### 1. 超伝導線材

超伝導電磁石の発生磁場は最も経験の深い合金のNbTi超伝導線材により10 Tに達し、金属間化合物のNb<sub>3</sub>Snでは20T以上の磁場の発生が可能である。従来のCuによる電磁石の発生磁

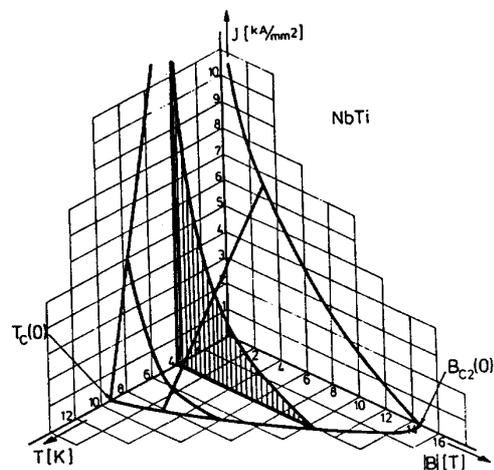


図1 NbTi 超伝導線の特性。

場が2 T程度であることを考えれば、同じ規模のリングで少なく見ても5倍のbeamエネルギーが得られることを意味する。図1にNbTi超伝導線の特徴を、図2に超伝導加速器に使用される所謂Rutherford cableと呼ばれるNbTi超伝導線の構造を示す。また、加速器に使用される超伝導線材の特性値を表1に示す。

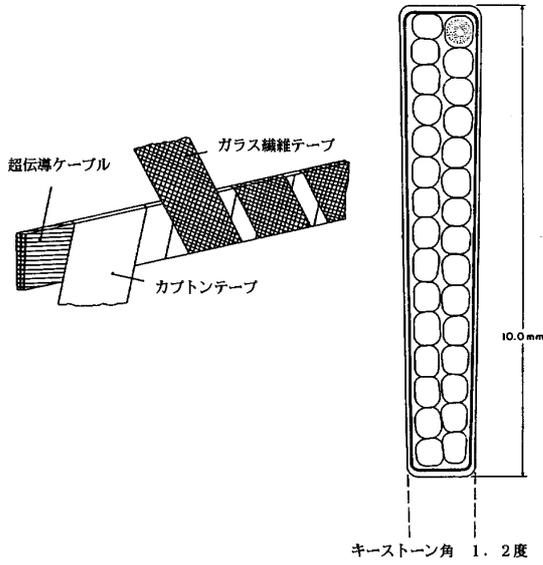


図2 Rutherford cable (NbTi - Cu) の構造 (カプトンとガラス繊維による絶縁)。

表1 超伝導線材の特性

		臨界温度(K)	臨界磁場(T)
		@4.2 K	
NbTi	合金	9 - 9.3	11.5 - 12.2
Nb <sub>3</sub> Sn	金属間化合物	18.3	26

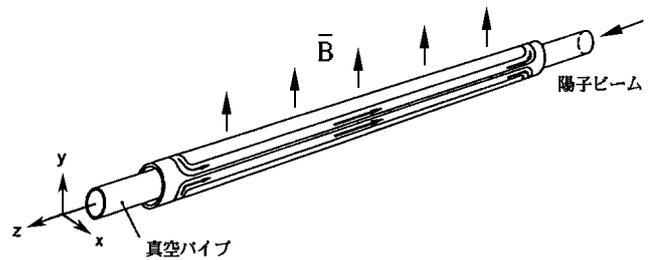


図3 超伝導2極電磁石の概略図。

## 2. 超伝導電磁石における磁場の記述

### 2.1 単一電流導体の多極磁場成分展開

図3のようなアパーチャに比べて長さの長い超伝導2極電磁石を考える。電流導体はbeamに平行であるとすれば、磁場を2次元的に扱うことができる。

まず、線電流(導体が1本)の場合の非常に簡単な場合について、図4に示す座標系で考える。導体はz軸に平行で、無限に長いものとする。図4(a)において、z軸上を+方向に流れる電流IによるP点の磁場はθ方向成分しか持たないので、

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (1)$$

で与えられる。

このようにz方向に無限に長い場合は(r, θ)の2次元面において考えることが可能で、ベクトルポテンシャルはz成分しか持たないのでA = (0, 0, A<sub>z</sub>)である。したがって、円柱座標(r, θ, z)における磁束密度は

$$B_{\theta} = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

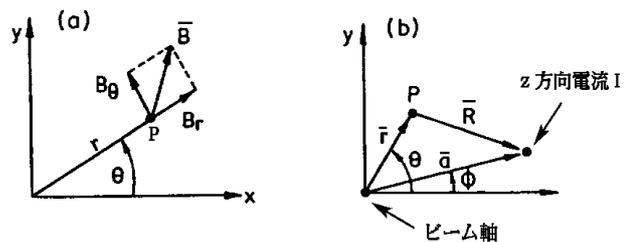


図4 線電流による磁場計算の座標 (P点は磁場の観測点)。

で与えられることから、ベクトルポテンシャルは

$$A_z(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{a} \quad (2)$$

ここで  $a$  は対数項を無次元化するために長さの次元をもつ任意定数である。

同じように図 4 (b) において  $(a, \phi)$  の位置にある  $z$  軸に平行な電流  $I$  による P 点におけるベクトルポテンシャルは

$$A_z(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{a} \quad (3)$$

ここで、

$$R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos(\theta - \phi)} \quad (4)$$

これは図 5 のように新しい座標  $(x', y')$  を考えて、P 点における磁場が  $\vec{B} = \mu_0 I / 2\pi R$  であることから (3) が得られる。

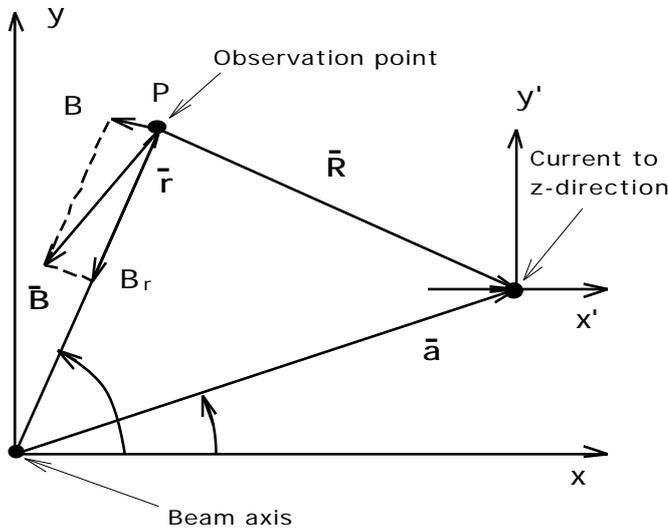


図 5 P 点におけるベクトルポテンシャル。

磁場の観測点が電流要素より内側にあるかどうかによって 2 つの場合に分けて考える。

1)  $r < a$  の場合、

$$R^2 = a^2 + r^2 - ar[e^{i(\theta-\phi)} + e^{-i(\theta-\phi)}] = a^2 \left[1 - \frac{r}{a} e^{i(\theta-\phi)}\right] \left[1 - \frac{r}{a} e^{-i(\theta-\phi)}\right] \quad (5)$$

の指数関数を考えれば、

$$\ln \frac{R}{a} = \frac{1}{2} \ln \left[1 - \frac{r}{a} e^{i(\theta-\phi)}\right] + \ln \left[1 - \frac{r}{a} e^{-i(\theta-\phi)}\right] \quad (6)$$

が得られるので、これを Taylor 展開して整理すれば、

$$\begin{aligned} A_z(r, \theta) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \ln \left[1 - \frac{r}{a} e^{i(\theta-\phi)}\right] + \ln \left[1 - \frac{r}{a} e^{-i(\theta-\phi)}\right] \right\} \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ -\left(\frac{r}{a}\right) e^{i(\theta-\phi)} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{i2(\theta-\phi)} - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a}\right)^3 e^{i3(\theta-\phi)} - \left(-\frac{r}{a}\right) e^{-i(\theta-\phi)} - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 e^{-i2(\theta-\phi)} - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{a}\right)^3 e^{-i3(\theta-\phi)} - \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos[n(\theta - \phi)] \end{aligned} \quad (7)$$

磁場成分は

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{a} \cos[n(\theta - \phi)] \quad (8)$$

$$B_r(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{a} \sin[n(\theta - \phi)] \quad (9)$$

$$B_z(r, \theta) = 0 \quad (10)$$

である。

2)  $r > a$ の場合も同様にして、

$$A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{a}{r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{a^n}{r^n} \cos[n(\theta - \phi)] \quad (11)$$

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} \cos[n(\theta - \phi)] \quad (12)$$

$$B_r(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} \sin[n(\theta - \phi)] \quad (13)$$

$$B_z(r, \theta) = 0 \quad (14)$$

である。

## 2.2 純粋な多極磁場の発生 (ノーマル電磁石)

上に求めたベクトルポテンシャルにおいて、電流分布として、

$$I(\phi) = I_0 \cos(m\phi) \quad (15)$$

を仮定すれば、(7)より

$$A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r^n}{a^n} \int_0^{2\pi} \cos(m\phi) \cos[n(\theta - \phi)] d\phi = \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{1}{m} \frac{r^m}{a^m} \cos(m\theta) \quad \begin{matrix} ; m < n \\ ; m = n \end{matrix} \quad (16)$$

すなわち、 $m = n$ のとき、

$$A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{1}{m} \frac{r^m}{a^m} \cos(m\theta) \quad (17)$$

このときの磁場は

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I_0}{2a} \frac{r^{m-1}}{a^{m-1}} \cos(m\theta) \quad (18)$$

$$B_r(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I_0}{2a} \frac{r^{m-1}}{a^{m-1}} \sin(m\theta) \quad (19)$$

$$B_z(r, \theta) = 0 \quad (20)$$

である。上の電流分布を仮定すれば、 $m$ 次の多極磁場だけが発生する。 $m=1, 2, 3, \dots$ に対して2極、4極、6極磁場、 $\dots$ になる。図6にこれらの電流分布に対応する電磁石の断面を示す。電流が $\cos m\theta$ にしたがって分布すれば、そこに応じた成分の磁場だけが発生するので、超伝導電磁石を設計する場合 $\cos m\theta$ を如何に近似するかによって現れる高次の磁場成分の大きさが変わってくる。

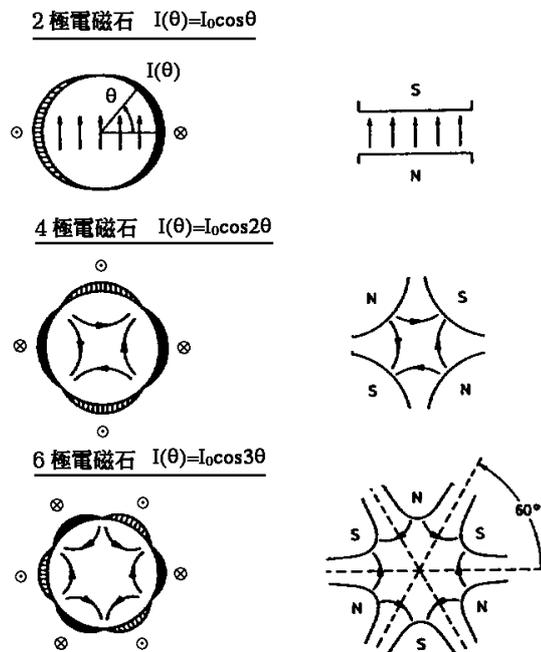


図6 空間電流分布による純粋な2極、4極、6極電磁石と対応する通常の電磁石断面。

### 2.3 回転磁場成分 (スキュー電磁石)

ノーマル磁場の電流分布に  $-\pi/2m$  の回転を与えた場合、空間電流分布は

$$I(\phi) = I_0 \cos[m(\phi - \pi/2m)] = I_0 \cos(m\phi - \pi/2) = I_0 \sin(m\phi) \quad (21)$$

で与えられる。この分布によるベクトルポテンシャルは、

$$A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_0^{2\pi} \sin(m\phi) \cos[n(\theta - \phi)] d\phi = \begin{cases} 0 & \text{for } n \neq m \\ \frac{\mu_0 I_0}{2} \frac{1}{m} \left(\frac{r}{a}\right)^m \sin(m\theta) & \text{for } n = m \end{cases} \quad (22)$$

これより磁場成分は、

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I_0}{2a} \left(\frac{r}{a}\right)^{m-1} \sin(m\theta) \quad (23)$$

$$B_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_0}{2a} \left(\frac{r}{a}\right)^{m-1} \cos(m\theta) \quad (24)$$

$$B_z(r, \theta) = 0 \quad (25)$$

である。ノーマル磁場と比べて磁場が角度  $-\pi/2m$  だけ回転している。例えば、 $m=1$  の場合はスキュー 2 極磁場  $B_\theta(r, \theta) = -\frac{\mu_0 I_0}{2a} \sin\theta$ 、 $B_r(r, \theta) = \frac{\mu_0 I_0}{2a} \cos\theta$  である。

### 2.4 電流分布の近似

上の計算のように三角関数で与えた電流分布を電流シェルまたは電流ブロックの配置で近似する。このような近似を評価するため、次の一般化した多極展開を利用する。

$$B_\theta(r, \theta) = B_{ref} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} [b_n \cos(n\theta) + a_n \sin(n\theta)] \quad (26)$$

$$B_r(r, \theta) = B_{ref} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} [-a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)] \quad (27)$$

ここで  $B_{ref}$  は基準半径  $r_0$  における磁場の強さである。 $r_0$  としてコイル内径の2/3程度に選択する。 $b_n$  はノーマル成分、 $a_n$  はスキュー成分の係数である。

図6における理想的な電流分布の空間対称性を考慮した場合の線電流によるベクトルポテンシャルを求める。

#### 1) ノーマル 2 極の場合

(7)において電流分布の対称性

$$I(\phi) = I(-\phi) = -I(\pi - \phi) = -I(\pi + \phi) \quad (28)$$

を考慮して、これら4本の線電流に対するベクトルポテンシャルを求めると、

$$A_z(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\phi) \cos(n\theta) [1 - \cos(n\pi)]$$

となつて、ベクトルポテンシャルに寄与する項は  $n=1, 3, 5, \dots$  の奇数項である。したがって、

$$A_z(r, \theta) = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) \cos(n\phi) \quad (29)$$

すなわち、2極の対称性のある電流分布からはnが奇数のノーマル成分しか現れない。

2) ノーマル4極の場合

$$\begin{aligned}
 I(\phi) &= I(-\phi) = I(\pi - \phi) = I(\pi + \phi) \\
 &= -I(\pi/2 - \phi) = -I(\pi/2 + \phi) \\
 &= -I(-\pi/2 - \phi) = -I(-\pi/2 + \phi)
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

から、現れる成分は2の奇数倍のノーマル成分n=2, 6, 10, 14, ... だけである。すなわち、これら8本の線電流によるベクトルポテンシャルは

$$A_z(r, \theta) = \frac{4\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=2,6,10,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) \cos(n\phi)
 \tag{31}$$

3) ノーマル6極の場合

$$\begin{aligned}
 I(\phi) &= I(-\phi) = I(2\pi/3 - \phi) \\
 &= I(2\pi/3 + \phi) = I(-2\pi/3 - \phi) = I(-2\pi/3 + \phi) \\
 &= -I(\pi/3 - \phi) = -I(\pi/3 + \phi) = -I(\pi - \phi) \\
 &= -I(\pi + \phi) = -I(-\pi/3 - \phi) = -I(-\pi/3 + \phi)
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

から、現れる成分は3の奇数倍のノーマル成分n=3, 9, 15, 21, ... だけである。すなわち、これらの12本の線電流によるベクトルポテンシャルは

$$A_z(r, \theta) = \frac{6\mu_0 I}{\pi} \sum_{n=3,9,15,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) \cos(n\phi)
 \tag{33}$$

である。

=====ここで、頭の体操=====

問題1  $r > a$  の場合の式(11)~(14)を求めよ。

問題2 4極と6極電磁石に相当する電流の空間分布の対称性から線電流のベクトルポテンシャル(31)と(33)を導け。

=====頭の体操終わり=====

3 超伝導電磁石の断面構造

3.1 2極超伝導電磁石

図7のように電流シエルが存在する半径を $a_1$ 、 $a_2$ 、シエルの角度の半分を $\phi_\ell$ 、一様な電流密度を $J$ とすれば、2極電磁石の場合(29)から

$$A_z(r, \theta) = \frac{2\mu_0 J}{\pi} \int_0^{\phi_\ell} \cos(n\phi) d\phi \cos(n\theta) \quad (34)$$

$$= \frac{2\mu_0 J}{\pi} \frac{r^n}{n^2(n-2)} (a_1^{2-n} - a_2^{2-n}) \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta)$$

$a = a_2 - a_1 \ll a = (a_2 + a_1)/2$  の場合、 $a_2 = a + a/2$ 、 $a_1 = a - a/2$  とおいて

$$A_z(r, \theta) = \frac{2\mu_0 J}{\pi} a \frac{r^n}{n^2} \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \quad (35)$$

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{2\mu_0 J}{\pi} a \frac{r^{n-1}}{n} \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \quad (36)$$

$$B_r(r, \theta) = -\frac{2\mu_0 J}{\pi} a \frac{r^{n-1}}{n} \sin(n\phi_\ell) \sin(n\theta) \quad (37)$$

以上からn次の磁場の絶対値は

$$B_n(r, \theta) = \frac{2\mu_0 J}{\pi} \frac{a}{n} \frac{r^{n-1}}{a} |\sin(n\phi_\ell)| \quad (38)$$

2極磁場を電流シェルで近似した場合、含まれるn=3の成分(6極成分)を消すためには

$$3\phi_\ell = \pi, \text{ すなわち } \phi_\ell = 60^\circ \quad (39)$$

にすればよいことが分かる。次に現れる成分としてn=5を考えると

$$\frac{B_5}{B_1} = \frac{1}{5} \frac{r^4}{a} \frac{|\sin(5\pi/3)|}{\sin(\pi/3)} = \frac{1}{5} \frac{r^4}{a} = 0.04 \quad @ \frac{r}{a} = \frac{2}{3} \quad (40)$$

となり、主成分に比べて約4%である。これは加速器で許される値より2桁大きい。n=3, 5の成分を同時に消すためには、電流シェルを2重にしてそれぞれを最適化(内側シェルを72度、外側シェルを36度)すればよい。このようにして設計された2極電磁石でも更に高次の項(n=7, 9, ...)が $10^{-3}$ 程度残る。残ったこれらの高次の項は図9に示す非磁性のウエッジを入れることで $10^{-4}$ 程度に減少する。シェルの多重化、ウエッジなどの構造はパラメータの自由度を上げる役目を果たしている。

### 3.2 4極超伝導電磁石

図8において電流シェルの存在する半径を $a_1$ 、 $a_2$ 、シェルの角度の半分を $\phi_\ell$ 、一様な電流密度を $J$ とすれば、4極電磁石の場合(31)から

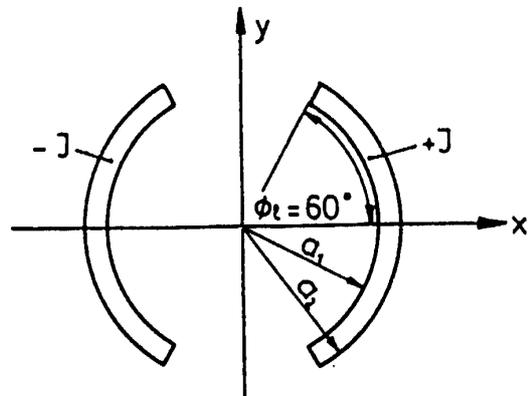


図7 2極電磁石の電流シェル。

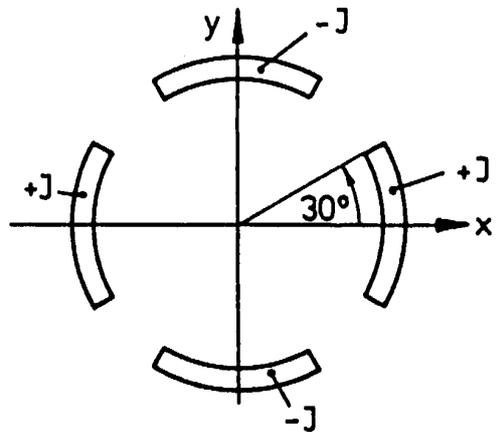


図8 4極電磁石の電流シェル。

$$\begin{aligned}
A_z(r, \theta) &= \frac{4\mu_0 J}{\pi} \int_0^{\phi_\ell} \frac{1}{n} \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) d\phi \cos(n\phi) \\
&= \frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[ \frac{r^2}{4} \ln \frac{a_2}{a_1} \cos(2\theta) \sin(2\phi_\ell) + \sum_{n=6,10,\dots} \frac{r^n}{n^2(n-2)} (a_1^{2-n} - a_2^{2-n}) \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \right]
\end{aligned} \tag{41}$$

$a = a_2 - a_1 \ll a = (a_2 + a_1)/2$  であれば、

$$A_z(r, \theta) = \frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[ \frac{r^2}{4} \ln \frac{a_2}{a_1} \cos(2\theta) \sin(2\phi_\ell) + a \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n^2} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \right] \tag{42}$$

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[ \frac{r}{2} \ln \frac{a_2}{a_1} \cos(2\theta) \sin(2\phi_\ell) + a \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \right] \tag{43}$$

$$B_r(r, \theta) = -\frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[ \frac{r}{2} \ln \frac{a_2}{a_1} \sin(2\theta) \sin(2\phi_\ell) + a \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \sin(n\phi_\ell) \sin(n\theta) \right] \tag{44}$$

n次の多極磁場の絶対値は

$$B_n(r, \theta) = \frac{4\mu_0 J}{\pi} \frac{a}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} |\sin(n\phi_\ell)| \tag{45}$$

n=6の成分を消すためには $\phi_\ell = \pi/6 = 30$ 度を選べばよいことが分かる。このときn=10の4極磁場に対する割合は

$$\frac{B_{10}}{B_2} = \frac{1}{5} \frac{a}{a \ln(a_2/a_1)} \left(\frac{r}{a}\right)^8 \left| \frac{\sin(5\pi/3)}{\sin(\pi/3)} \right| = 0.0078 \tag{46}$$

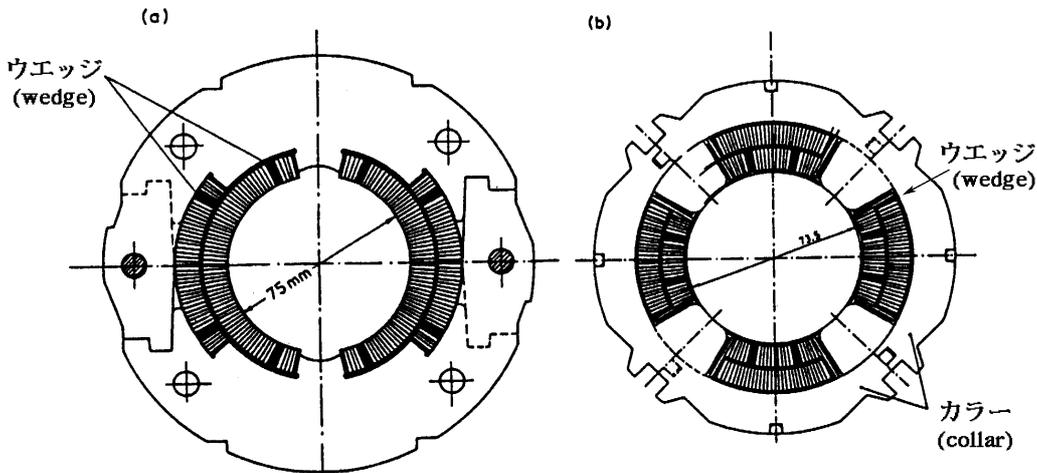


図9 2重シェルの(a)超伝導2極電磁石と(b)超伝導4極電磁石の断面、磁場一様性を上げるため電磁石の軸に平行にウエッジが入れてある。超伝導コイルは固定のため非磁性カラーに閉じ込められている。  
(a)はHERA, LHC, SSCに採用されているタイプ、  
(b)はHERAの4極コイル。

電流シェルの2重にした場合は、内側と外側のシェルの角度を $\phi_1$ 、 $\phi_2$ 、コイルの半径を $a_1 \sim a_2$ 、 $a_3 \sim a_4$ として、

$$\begin{aligned}
A_z(r, \theta) &= \frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[ \sum_{n=2,6,10,\dots} \frac{1}{n} \frac{a_2}{a_1} \frac{r}{a} \int_0^{\phi_1} \cos(n\theta) d\phi \cos(n\phi) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=2,6,10,\dots} \frac{1}{n} \frac{a_4}{a_3} \frac{r}{a} \int_0^{\phi_2} \cos(n\theta) d\phi \cos(n\phi) \right] \\
\bar{a}_1 < \bar{a}_1, \bar{a}_2 < \bar{a}_2 &\quad \frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[ \frac{1}{4} r^2 \ln \frac{a_2}{a_1} \cos(2\theta) \sin(2\phi_1) + \frac{1}{4} r^2 \ln \frac{a_4}{a_3} \cos(2\theta) \sin(2\phi_2) \right. \\
&\quad \left. + \bar{a}_1 \bar{a}_1 \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n^2} \frac{r}{\bar{a}_1} \sin(n\phi_1) \cos(n\theta) + \bar{a}_2 \bar{a}_2 \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n^2} \frac{r}{\bar{a}_2} \sin(n\phi_2) \cos(n\theta) \right] \quad (47)
\end{aligned}$$

ただし、

$$\bar{a}_1 = a_2 - a_1 << \bar{a}_1 = (a_2 + a_1)/2$$

$$\bar{a}_2 = a_4 - a_3 << \bar{a}_2 = (a_4 + a_3)/2$$

である。

$$\begin{aligned}
B_\theta(r, \theta) &= -\frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[ \frac{1}{2} r \ln \frac{a_2}{a_1} \cos(2\theta) \sin(2\phi_1) + \frac{1}{2} r \ln \frac{a_4}{a_3} \cos(2\theta) \sin(2\phi_2) \right. \\
&\quad \left. + \bar{a}_1 \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n} \frac{r}{\bar{a}_1} \sin(n\phi_1) \cos(n\theta) + \bar{a}_2 \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n} \frac{r}{\bar{a}_2} \sin(n\phi_2) \cos(n\theta) \right] \quad (48)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_r(r, \theta) &= -\frac{4\mu_0 J}{\pi} \left[ \frac{1}{2} r \ln \frac{a_2}{a_1} \sin(2\theta) \sin(2\phi_1) + \frac{1}{2} r \ln \frac{a_4}{a_3} \sin(2\theta) \sin(2\phi_2) \right. \\
&\quad \left. + \bar{a}_1 \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n} \frac{r}{\bar{a}_1} \sin(n\phi_1) \sin(n\theta) + \bar{a}_2 \sum_{n=6,10,\dots} \frac{1}{n} \frac{r}{\bar{a}_2} \sin(n\phi_2) \sin(n\theta) \right] \quad (49)
\end{aligned}$$

$\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = a$ と仮定して、 $n > 2$ に対して、

$$B_n(r, \theta) = \frac{4\mu_0 J}{\pi} \frac{a}{n} \left[ \frac{r}{\bar{a}_1} \sin(n\phi_1) + \frac{r}{\bar{a}_2} \sin(n\phi_2) \right] \quad (50)$$

[ ]内がゼロになる条件から高次の項を消すことができる。すなわち、

$$\frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1} \sin(n\phi_1) + \sin(n\phi_2) = 0 \quad (51)$$

これより、 $n = 6, 10$ についてこの条件を満たす $\phi_1$ 、 $\phi_2$ から同時に高次の成分をゼロにすることができる。2極電磁石の場合と同様に、コイルのシェル数を増やせば条件が増え、設計の自由度を上げることができる。

### 3.3 6極超伝導電磁石

$a = a_2 - a_1 << a = (a_2 + a_1)/2$ として、(33)より

$$A_z(r, \theta) = \frac{6\mu_0 J}{\pi} a \sum_{n=3,9,15,\dots} \frac{1}{n} \frac{r}{a} \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \quad (52)$$

$$B_\theta(r, \theta) = -\frac{6\mu_0 J}{\pi} a \sum_{n=3,9,15,\dots} \frac{1}{n} \frac{r}{a} \sin(n\phi_\ell) \cos(n\theta) \quad (53)$$

$$B_r(r, \theta) = -\frac{6\mu_0 J}{\pi} a \sum_{n=3,9,15,\dots} \frac{1}{n} \frac{r}{a} \sin(n\phi_\ell) \sin(n\theta) \quad (54)$$

$$B_n(r, \theta) = \frac{6\mu_0 J}{\pi} \frac{1}{n} \frac{r}{a} \left| \frac{r}{a} \right|^{n-1} |\sin(n\phi_\ell)| \quad (55)$$

$n=9$ の成分を消すためには、 $\phi_\ell = \pi/9 = 20$ 度である。この場合、 $n=15$ の成分の相対的大きさは

$$\frac{B_{15}}{B_3} = \frac{3}{15} \frac{r}{a} \left| \frac{\sin(5\pi/3)}{\sin(\pi/3)} \right| = 0.0015 \quad @ \frac{r}{a} = \frac{2}{3} \quad (56)$$

である。

#### 4. 鉄ヨークの影響

超伝導電磁石は磁場を閉じ込めるため、コイルの外側は鉄のヨークで取り囲まれる。透磁率が一定で、鉄は飽和しないと仮定して、イメージ電流法で解析することができる。図10(b)のように、コイルを収めるヨークの内面半径 $R_y$ の内側、半径 $a$ のところに電流 $I$ が流れているとすれば、内部磁場に及ぼす鉄の影響は半径 $a' = R_y^2/a$ のところに流れているイメージ電流 $I'$ に等価である。

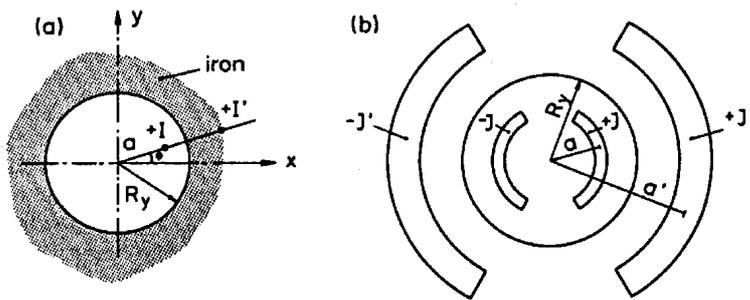


図10 (a) 線電流とそのイメージ電流、(b) 電流シェルとそのイメージ電流。

$$I' = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} I, \quad a' = \frac{R_y^2}{a} \quad (57)$$

イメージ電流は実電流 $I$ と平行に流れ、内部磁場を増加させる。図10(a)に線電流とそのイメージ電流の様子を示す。また、図10(b)は電流シェルのイメージである。電流シェルのイメージ電流密度は実コイルの内半径を $a_1$ 、外半径を $a_2$ として

$$J' = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} J \left( \frac{a}{R_y} \right)^4, \quad a' = \sqrt{a_1 a_2} \quad (58)$$

である。

##### 4.1 鉄ヨークをもつ2極超伝導電磁石

同軸の鉄ヨークをもつ単層電流シェルの $n$ 次の多極磁場は

$$B_n(r, \theta) = \frac{2\mu_0}{\pi} \sin(n\phi_\ell) \frac{1}{n} \left[ J a \frac{r}{a} \left| \frac{r}{a} \right|^{n-1} + J' a' \frac{r}{a'} \left| \frac{r}{a'} \right|^{n-1} \right] \quad (59)$$

である。第1項が実電流の寄与  $B_{coil}$ 、第2項がイメージ電流の寄与  $B_{iron}$  である。  $n=1$ 、 $\mu \gg 1$  として両者の比

$$\frac{B_{iron}}{B_{coil}} = \frac{a^2}{R_y} \quad (60)$$

からヨークの寄与が計算できる。2極超伝導電磁石ではヨークの寄与は数10%程度である。  $n$  次の多極電磁石では

$$\frac{B_{iron}}{B_{coil}} = \frac{a^{2n}}{R_y} \quad (61)$$

となるため、鉄の寄与は低下する。式から分かるように、鉄の飽和がなければ新しい多極磁場は発生しない。

#### 4.2 鉄の飽和がある場合

鉄の飽和が起これば透磁率が場所の関数になるためイメージ電流の方法は採用できない。この場合は飽和の影響が考慮できる数値計算プログラムを利用しなければならない。ヨークの磁場への寄与の程度により、超伝導電磁石の構造には図11に示すような種類がある。以下において、"warm iron"は鉄心が常温にあり、"cold iron"は鉄心を極低温にする設計である。

##### 1) "warm iron" 2極電磁石

ヨークはクライオスタットの外側にあるため、鉄とコイルの間に距離ができ、飽和は無視できる。鉄の寄与は10%程度であり、磁場は電流に比例する。

##### 2) "cold iron" 2極電磁石

BNLのRHICダイポールでは軟鉄がコイルに接近して取り囲み、ヨークの寄与は約35%である。初期の設計では鉄の飽和による6極、10極成分が観測されたが、コイル・ヨーク間の距離を増やしたり、ヨーク形状の最適化によって改善された。

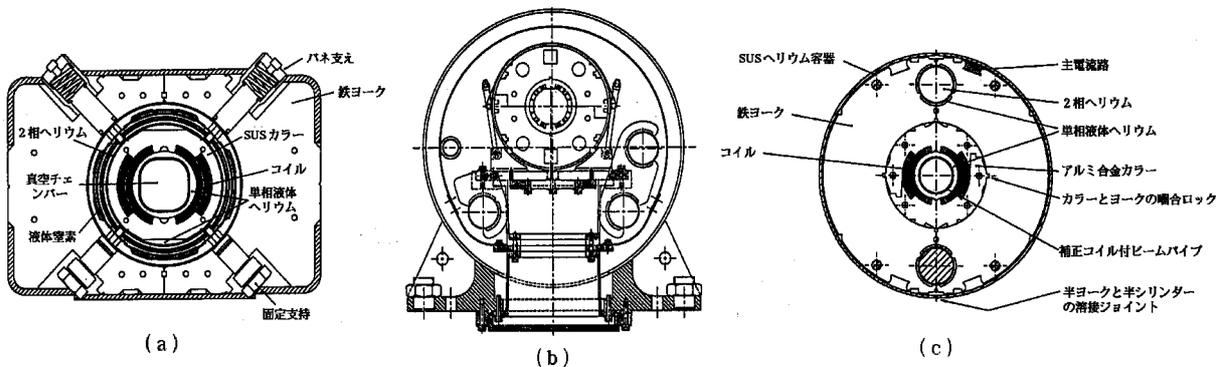


図1.1 3種類のダイポール、(a)FNALのTevatron (warm-iron)、(b)BNLのRHIC (cold-iron)、(c)DESYのHERA (非磁性カラー cold-iron)

### 3) "HERA型" ダイポール

warm iron の設計に採用された非磁性カラーの外側を鉄ヨークで取り囲む構造で、コイルとヨークが十分離れているため鉄の飽和が起らない。

### 5. 端部磁場

コイル端部の設計は複雑で、定式化はなされていない。図12 (a) に示す簡単なコイル端部では負の6極成分が発生する。このような6極成分は一般に補正用の6極電磁石で補正される。また、中心磁場より約10%強い磁場がこのコイル端部に現れ、ローレンツ力によるコイルの動きによってクエンチ (quench) が起きやすい。このため、最近の設計では図12 (b) に示すようにコイル端部にエポキシガラスのスペーサーを挟み、コイルエンドを広げる (spread-out)。スペーサーの調節により端部磁場は正と負の6極成分が現れ、平均的にゼロにすることができる。これはコイル直線部分において30度以下の角度で巻かれたコイルからは正の6極成分が発生し、30度以上の角度で巻かれたコイルからは負の6極成分が発生することから理解できる。この2組のコイルを端部で離せば、正負の6極成分が分離されて現れる。この他の長所として、コイル端部のスプレッドアウトにより局所磁場の集中が避けられ、最大磁場は直線部側に移る。コイル直線部ではコイル導体をしっかり固定することができるので、巻線の動きによるクエンチは起こりにくい。

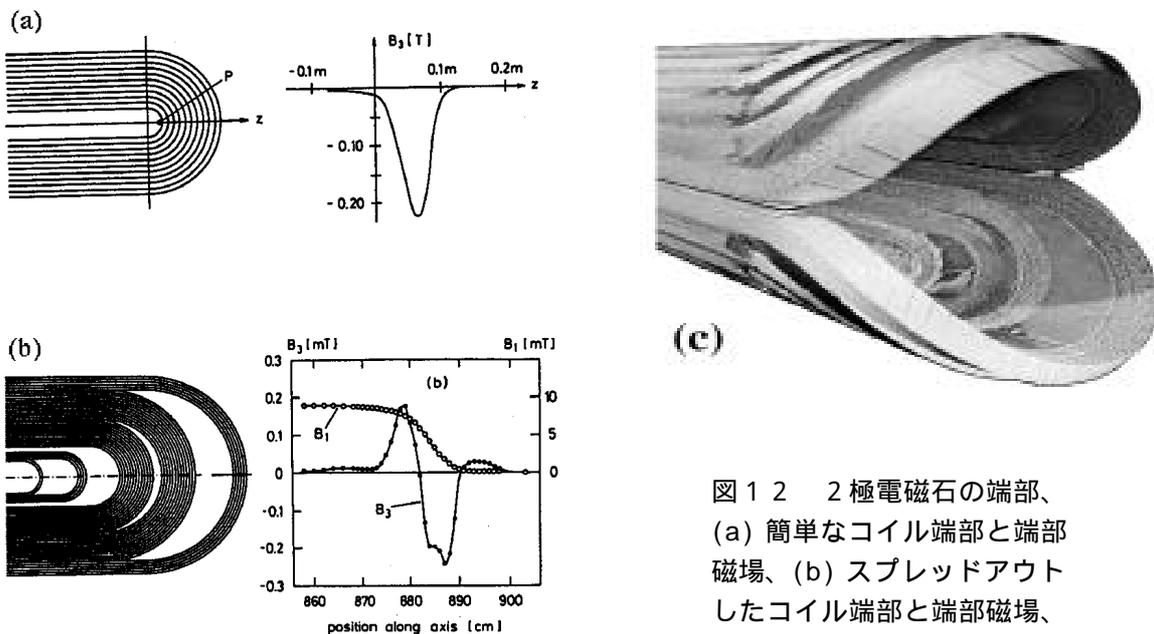


図12 2極電磁石の端部、  
(a) 簡単なコイル端部と端部磁場、  
(b) スプレッドアウトしたコイル端部と端部磁場、  
(c) 実際の2極コイル端部。

コイル端部の設計ではBiot-Savartの法則

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (62)$$

を直接使用すること考える。ここで $\mathbf{r}$ は磁場 $\mathbf{B}$ の観測点から電流 $I$ が流れる導体要素 $d\mathbf{l}$ までの位置ベクトルである。導体は $z$ 軸に平行に負側に無限に長いものとする。

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (1 + \cos\theta_0) \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} \quad (63)$$

ここで $\theta_0$ は観測点 $P$ の位置ベクトル $\mathbf{R}$ が $z$ 軸となす角度、 $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ 、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ は単位ベクトルである。

コイル端部が空間的に半円を形成するように半径 $a$ の円筒に取り付ける。このときの半円の中心を $z = z_0$ として、 $k$ 番目の導体の座標を $z$ 座標に依存する角度 $\phi_k(z)$ で表す。

$$\phi_k(z) = \begin{cases} \phi_k(0) & \text{for } z < z_0 \\ \frac{\pi}{2} - \sqrt{\left\{\frac{\pi}{2} - \phi_k(0)\right\}^2 - \left(\frac{z - z_0}{a}\right)^2} & \text{for } z_0 \leq z \leq z_{\max} \end{cases} \quad (64)$$

ここで $z_{\max} = z_0 + (\pi/2 - \phi_k(0))a$ である。電流の角度成分は $z$ 方向の積分において打ち消し合う( $B_x, B_y$ )成分しか与えないので、次の $z$ 方向の電流成分だけを考慮する。

$$I_z(k, z) = \begin{cases} I & \text{for } z < z_0 \\ I \frac{\phi_k(z) - \pi/2}{\phi_k(0) - \pi/2} & \text{for } z_0 \leq z \leq z_{\max} \end{cases} \quad (65)$$

コイルの上下左右の対称性が保たれているものと仮定して、許される多極成分は $n=1, 3, 5, \dots$ である。

$$B_n(z) = \frac{2\mu_0}{\pi a} \frac{r_0}{a} \sum_{k=1}^N I_z(k, z) \cos[n\phi_k(z)] \quad (66)$$

偏向磁場の実効長は

$$\ell_{B_{\text{eff}}} = \frac{1}{B_0} \int B_1(z) dz \quad (67)$$

で与えられる。ここで $B_0$ はコイルの中心磁場である。

このような近似的な計算でもかなり良い結果が得られるが、鉄の飽和を含む取り扱いには3次元計算コード( OPERA, TOSCA, ANSYSなど )に頼らなければならない。

## 6 . 持続電流

超伝導体の中を流れる持続性の磁化電流は低磁場領域で磁場に影響を与える。これらの電流はコイルの対称性から許される多極成分( 2極電磁石では $n=1, 3, 5, \dots$ 、4極電磁石では $n=2, 6, 10, \dots$  )を発生する。これらの多極磁場は磁場の上昇時と下降時で逆極性を示し、ヒステリシスがある。コイルを横切る磁場が変化すれば、超伝導体の中に誘導電流が流れる。コイルに誘導される電流には、渦電流、結合電流、磁化電流がある。渦電流は超伝導ケーブルの異なるストランド間に流れる電流、結合電流はストランド内の異なるフィラメント間に流れる電流、磁化電流は個々のフィラメント内を流れる電流である。

超伝導フィラメントを外部磁場 $B_{\text{ext}}$ の中に置き、外部磁場を上げ下げする。 $B_{\text{ext}}$ を増加させるとき、フィラメント内に $\cos\phi$ で分布する電流が現れ、フィラメントの電流が流れない領域の外部磁場を打ち消すように遮蔽磁場 $B_{\text{screen}}$ を発生する。電流のない領域を図

1 3 (a)に示すように楕円（長半軸 $a = r_f$ 、短半軸 $b$ 、 $\varepsilon = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ ）で近似する。フィラメントに流れる電流は臨界電流密度 $J_c(B, T)$ である。この遮蔽電流による磁場は

$$B_{screen} = -\frac{\mu_0 J_c}{\pi} \int_{-a}^a dy \frac{v(y)}{u(y)} \frac{x}{x^2 + y^2} dx \quad (68)$$

である。ここで

$$u(y) = b\sqrt{1 - (y/a)^2}, \quad v(y) = \sqrt{a^2 - y^2} \quad (69)$$

はx方向の積分範囲を与える楕円と円の境界である。積分を実行すれば、

$$B_{screen} = -\frac{\mu_0 J_c r_f}{\pi} \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{\sin^{-1} \varepsilon}{\varepsilon}}{\varepsilon} \quad (70)$$

が得られる。遮蔽できる最高磁場は侵入磁場 $B_p$ （penetrating field）と呼ばれ

$$B_p = \frac{\mu_0 J_c r_f}{\pi} \quad (71)$$

である。これは図1 3 (b)の楕円領域が完全に無くなった状況（ $b = 0$ ）に相当する。この状態から外部磁場を下げれば、逆極性の電流が重畳され、複雑な電流パターンが現れる（図1 3 (c)）。

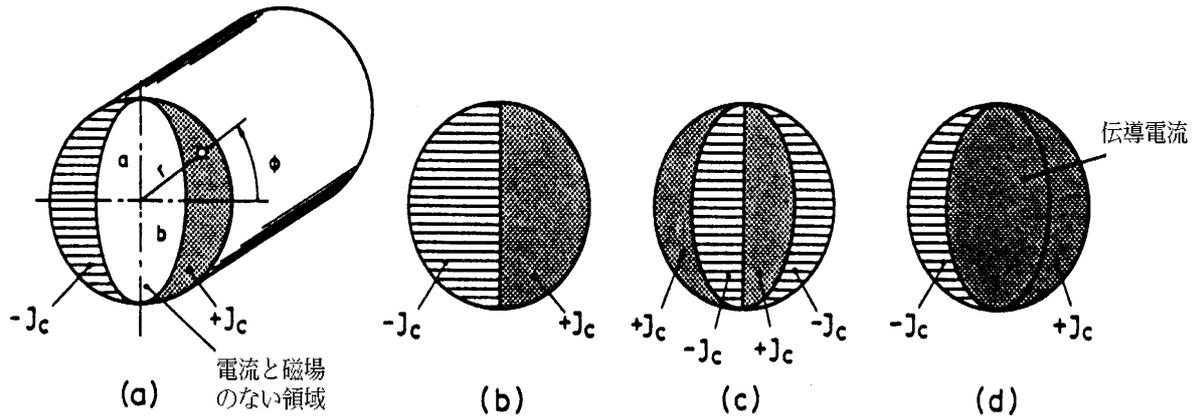


図 1 3 外部磁場による超伝導フィラメントに誘導される持続電流モデル、  
(a)外部磁場がゼロから侵入磁場より低い磁場まで増加（ $B_{ext} < B_p$ ）、  
(b)完全に侵入した状態（ $B_{ext} > B_p$ ）、  
(c)外部磁場を $B_p$ 以上に上げてから減少させた状態、  
(d)伝導電流のある(b)の場合。

フィラメントを流れる遮蔽電流による磁気モーメントを計算すれば、磁化の大きさが分かる。図1 3 (a)の状態において座標 $(+x, y)$ と $(-x, y)$ の面積要素を流れる電流による磁気モーメントは

$$dm_f = -J_c dx dy \cdot 2x \cdot l_f \quad (72)$$

ここで $l_f$ はフィラメントの長さである。

$$m_f = -2J_c l_f \int_{-a}^a dy \frac{v(y)}{u(y)} x dx = -\frac{4}{3} J_c l_f \varepsilon^2 r_f^3 \quad (73)$$

したがって、磁化  $M$  (単位体積あたりの磁気モーメント) は

$$M = -\frac{4}{3\pi} J_c r_f \varepsilon^2 \quad (74)$$

磁場が完全に侵入した状態 (図 1 3 (b)) で磁化はピークに達する。

$$M_p = |M|_{\max} = \frac{4}{3\pi} J_c r_f \quad (75)$$

外部磁場が増加すれば臨界電流密度は下がるので、磁化も減少する。

伝導電流  $I_t$  (transport current) が流れる場合は、フィラメント中心の楕円領域 (図 1 3 (d)) を流れる。平均の伝導電流密度を  $J_t$  とすれば

$$I_t = J_t \pi a^2 = J_c \pi a b \quad (76)$$

の関係から

$$\frac{b}{a} = \frac{J_t}{J_c} \quad (77)$$

すなわち、 $\varepsilon^2 = 1 - (J_t / J_c)^2$  となるため、伝導電流が増加すれば磁化が減少する。入射磁場付近では  $J_t \ll J_c$  であるため伝導電流の影響が無視できるが、高磁場では磁化はかなり減少する。

(70)と(75)から外部磁場の関数として磁化の様子が分かり、図 1 4 のように図示することができる。

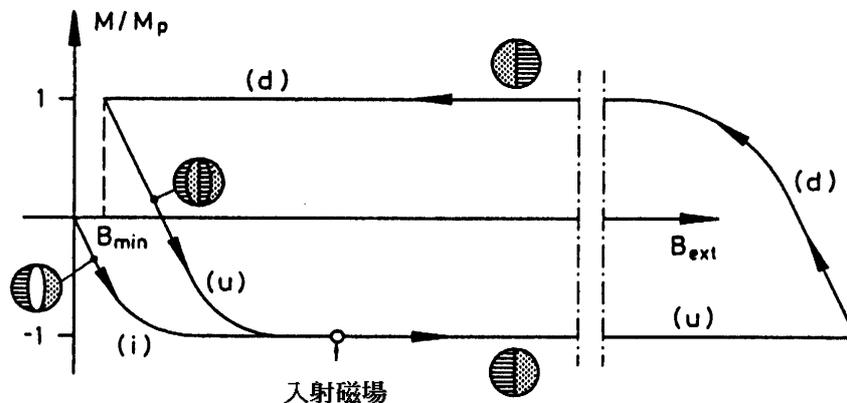


図 1 4 外部磁場の関数として表したNbTi フィラメントの磁化の様子。(i) 初期状態、(u) ランプアップ、(d) ランプダウン。

## 7 . 超伝導電磁石の渦電流

加速器用の超伝導電磁石はRutherfordケーブルから作られる。ケーブルは直径0.7~1.3 mmのストランド (strand) を20~40本より合わせて (transpose)、2レイヤーの平らなケーブルに成形される (図 2)。台形状の断面をもち厚さはストランド直径の2倍以下に圧縮される。交差点でストランドは凹み、かなり大きな接触面積をもつ。この交差点

の接触抵抗は数  $m$  程度で、渦電流 (eddy current) のループを形成する。異なるストランド間を流れる渦電流をケーブル渦電流と呼び、ストランド内の異なるフィラメント間を流れる渦電流を結合電流 (coupling current) と呼ぶ。

### 7.1 ストランド内の結合電流

ストランド内のフィラメントは銅マトリックスによって強く結合している。この結合を減らすために、ワイヤーに捻り (twist) を与えている。捻られたことによりフィラメントはピッチの短いループを形成する。これは超伝導 (フィラメント) と常伝導 (銅) を結ぶループで、隣合うループではお互いに逆向きの渦電流が流れる。外部磁場  $B_e$  のランプは一定として、フィラメントを流れる遮蔽電流は  $\cos\phi$  分布をもち、遮蔽磁場を  $B_s$  とする。フィラメント内の内部磁場を  $B_i (= B_e - B_s)$  とすれば、渦電流によるストランドの磁化は

$$M_s = \frac{2\dot{B}_i\tau}{\mu_0} = \frac{\ell_{twist} r_f \dot{B}_i}{2\rho_t} \frac{\ell_{twist} r_f}{\pi r_f^2 \ell_{twist}} \quad (78)$$

ここで  $\tau$  はストランドの捻りピッチ  $\ell_{twist}$  と NbTi-Cu 複合物の実効横方向抵抗  $\rho_t$  (effective transverse resistivity) に関する時定数である。

$$\tau = \frac{\mu_0}{2\rho_t} \frac{\ell_{twist}}{2\pi} \quad (79)$$

一般的に  $\ell_{twist} \approx 25\text{mm}$  である。単位体積当たり消費されるエネルギー  $P$  は

$$P dt = M_s dB_i = \frac{2\dot{B}_i\tau dB_i}{\mu_0} = \frac{2\dot{B}_i^2\tau}{\mu_0} dt \quad (80)$$

より、

$$P = \frac{2\dot{B}_i^2\tau}{\mu_0} \quad (81)$$

である。時定数は超伝導ケーブルによって異なるが、5~20 ms 程度であり、ストランド内の渦電流による磁化は短寿命で、これによる加速器の磁場歪みは持続電流に比べて無視できる。

ゼロ磁場から最大磁場  $B_m$  まで時間  $T_{ramp}$  でランプするとき、 $\dot{B}_i = \dot{B}_e = B_m / T_{ramp}$  である。ランプサイクル当たりのストランド内の渦電流損失は

$$Q_s = 2 \int_0^{T_{ramp}} \frac{2\dot{B}_i^2\tau}{\mu_0} dt = \frac{4B_m^2\tau}{\mu_0 T_{ramp}} \quad (82)$$

となり、電磁石の交流損失の一部をなす。

### 7.2 ケーブル渦電流 (1次元モデル)

Rutherfordケーブルを2層のワイヤー網で置き換え、クロスオーバー点に微小抵抗を考える。ストランドの総数を  $N$  本 (図15では6本) とすれば、 $N-1$  個の異なるループが構成される。ループ  $n$  ( $1 \leq n \leq N-1$ ) を通過する磁束を  $\Phi_n$  とする。 $n$  番目のトランジションにおける抵抗を  $R_n$ 、電流を  $i_n$  とすれば、

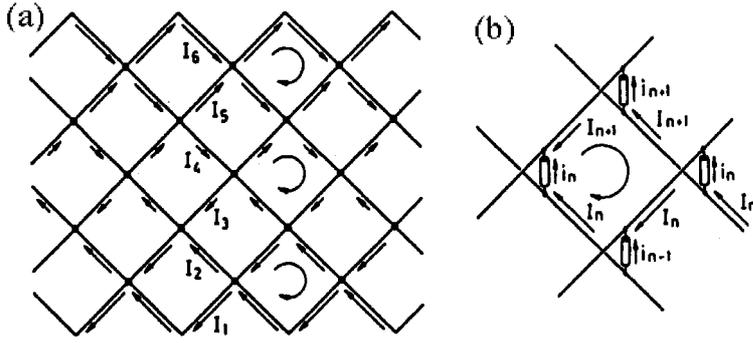


図 15 Rutherford ケーブルの等価抵抗回路網、(a) ストランド 6 本の場合の渦電流、接触抵抗と磁束変化は一樣であると仮定、(b) 1 つのループにおけるクロスオーバー電流  $i_n, i_{n-1}, i_{n+1}$ 。

$$\frac{d i_n}{dt} = 2R_n i_n - R_{n-1} i_{n-1} - R_{n+1} i_{n+1} \quad (83)$$

両端のストランドでは

$$\frac{d i_1}{dt} = 2R_1 i_1 - R_2 i_2 \quad (84)$$

$$\frac{d i_{N-1}}{dt} = 2R_{N-1} i_{N-1} - R_{N-2} i_{N-2} \quad (85)$$

の関係が成り立つ。 $I_n$  はクロスオーバー点  $n-1$  と  $n$  の間の誘導電流である。キルヒホッフの法則から

$$I_n = I_{n+1} + i_n \quad (86)$$

また、誘導電流の総和はゼロであるので、

$$\sum_{n=1}^N I_n = 0 \quad (87)$$

以上の方程式を解くことにより、

$$i_1 = \frac{1}{NR_1} \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{k=1}^m \frac{d i_k}{dt} \quad (88)$$

$$i_n = \frac{1}{R_n} [nR_1 i_1 - \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k=1}^m \frac{d i_k}{dt}] \quad (2 \leq n \leq N-1) \quad (89)$$

$R_n = R_c = \text{const}$ 、 $d i_n / dt = d i / dt = \text{const}$  を仮定すれば、

$$i_n = \frac{n}{2R_c} (N-n) \frac{d i}{dt} \quad (90)$$

$$I_n = \frac{1}{24R_c} [(N-1)N(N+1) - 2(n-1)n(3N-2n+1)] \frac{d i}{dt} \quad (91)$$

これは図 15 のように誘導電流が超伝導ケーブルのストランドをジグザグに流れる状態に相当する。この誘導電流は磁場の多極成分を発生する。また、トランスポーズのピッチを  $\ell_p$  とするとき接触抵抗のオーム損失によるケーブル 1m 当たりの発熱は、

$$G = \sum_{n=1}^{N-1} R_c i_n^2 N / \ell_p = \frac{N}{4R_c \ell_p} \frac{d i}{dt}^2 \frac{(N^4 - 1)N}{30} \quad (92)$$

である。これは変化磁場中における超伝導ケーブルの交流損失である。磁束の時間変化はケーブルの幅を  $w$  として、

$$\frac{d i}{dt} = \frac{w \ell_p}{N^2} \frac{dB}{dt} \quad (93)$$

$N \gg 1$  の場合、

$$G \frac{w^2 \ell_p N^2}{120 R_c} \frac{dB}{dt} \quad (94)$$

以上の解析は1次元モデルであるが、電磁石の軸方向に分流電流が変化してもよい場合に拡張すれば、分流電流にストランドのトランスポーズの周期性 $\ell_p$ が現れる。

### 7.3 磁場特性に及ぼす渦電流の影響

ストランドのクロスオーバー抵抗は一樣でないため、ケーブル渦電流はコイル巻線の対称性に従わない。このため、磁場のランプに伴いコイル対称性から許される成分は勿論、許されない多極磁場成分も現れる。SSCダイポールの測定からランプの速さに依存する4極、6極成分が観測されている(図16)。これ以外にもスキュー多極成分が観測されている。渦電流による6極成分は持続電流による磁化とは逆の極性をもつ。ノーマル4極磁場やスキュー多極磁場は本来は許されない成分であるが、これらは渦電流の非対称性に起因する。

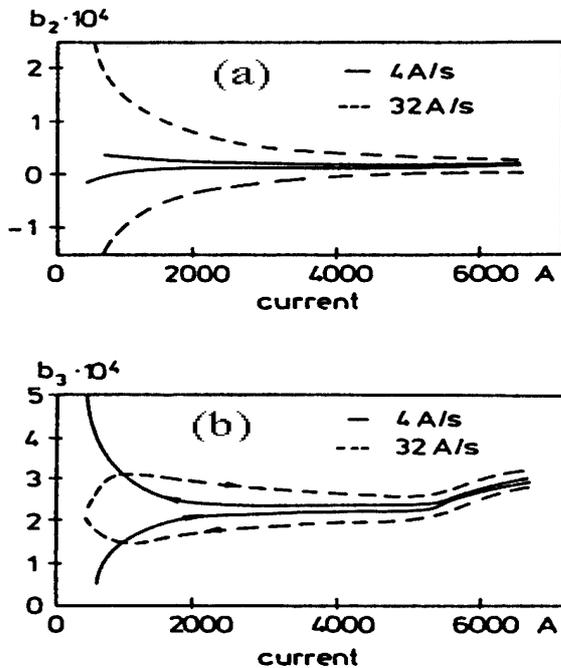


図16 4および32 A/secのランプ速さによるノーマル4極と6極成分のヒステリシス。(a)4極成分、(b)6極成分。矢印はランプの方向を示す。

## 8. 補正電磁石

超伝導シンクロトロンに必要な補正用電磁石は

- ・ 水平および垂直軌道補正用2極
- ・ ベータトロンチューン補正用4極
- ・ クロマティシティ補正用および持続電流による6極磁場成分補正用6極
- ・ Landauダンピング用8極
- ・ カップリング補正用スキュー4極
- ・ 10極、12極磁場の補正(入射磁場が低い場合)

などで、今までに設計された基本的な構造は図 1 7 に示すような

- ・糸巻き構造 (FNAL)

トレーニング現象やレイヤー間の相互の影響がある。ショートサンプル限界は達成できないが、安定に動作する。

- ・ビームパイプ構造 (BNL, HERA, RHIC)

スペース節約のため、メインコイルのビームパイプに取付ける構造。メインコイルのバックグラウンド磁場の影響を受ける。このため性能のよい超伝導ストランド線としっかりした固定が必要である。また、メインコイルの磁場により磁化電流が誘導される。逆の影響として、入射磁場のメインダイポールに対して補正 4 極コイルの漏れ磁場の影響により許されない  $n=1, 3, 5$  などの多極成分を誘導する。常伝導電磁石にくらべてコイルがコンパクトになり、磁場性能に優れる。

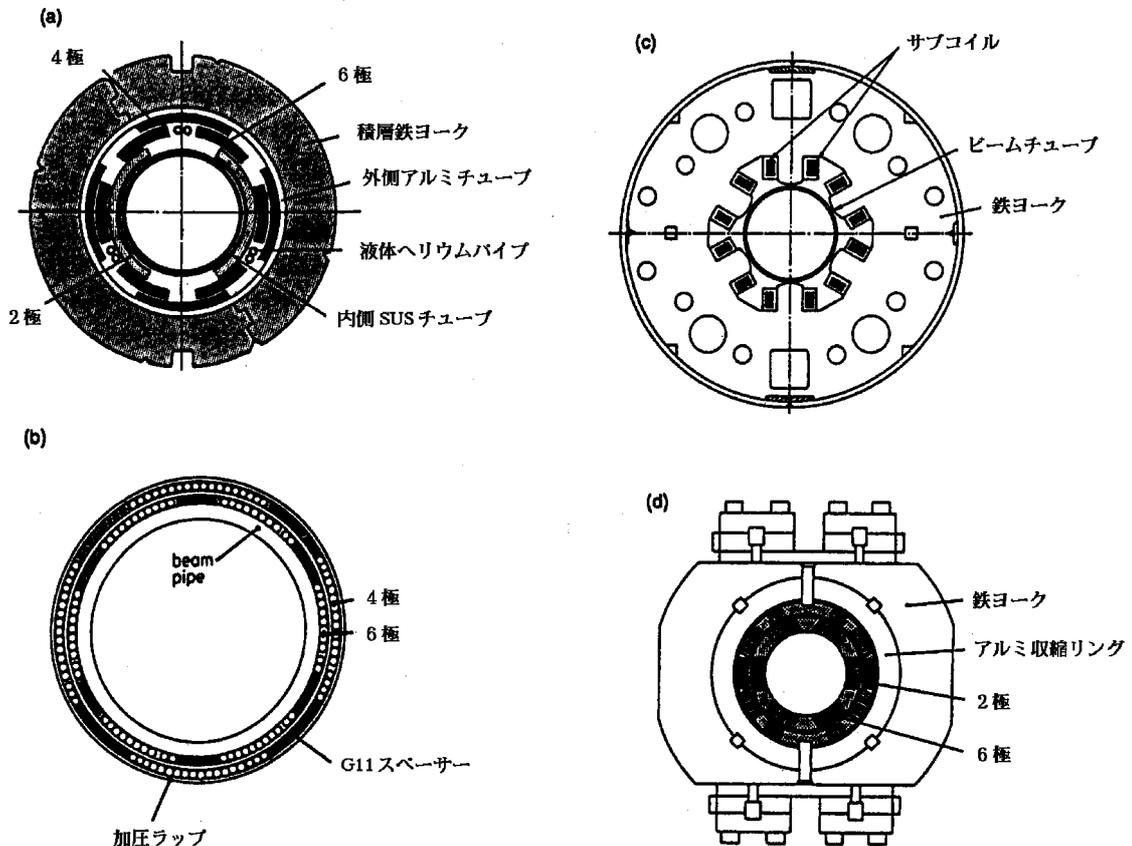


図 1 7 各種の補正超伝導コイルの構造、  
 (a)糸巻き構造、  
 (b)ビームパイプ構造、  
 (c)スーパーフェリック構造、  
 (d)リボンケーブル構造。

- ・リボンケーブル構造 (FNAL, LHC)  
メインコイルと同じフラットケーブルで作る。  
メインダイポールを高磁場までサイクルさせれば補正コイルによる磁化の記憶が書き換えられる。
- ・スーパーフェリック構造 (HERA, RHIC)  
鉄心と超電導コイルから構成される電磁石をスーパーフェリック電磁石と呼ぶ。

などがある。これらの補正用電磁石 (コイル) はメインの2極や4極のクライオスタットに挿入される。超伝導補正コイルはメイン電磁石とは設計が異なる。補正コイルは独立に励磁されるので、ターン数を多くして電流を少なくする設計が普通である。メインコイルほどではなくても、コイルの機械的位置精度は必要でありエポキシ含浸を施し、コイルが動かないようにアルミの収縮リングによるプリストレスを与える。

## 第8章 永久磁石とその材料

永久磁石にはいくつかの種類があるが、希土類コバルト (REC, Rare Earth Cobalt) と呼ばれる強力な永久磁石の登場によって加速器への応用が始まった。透磁率がほぼ1であるため検出器の磁場との干渉が殆どなく、高エネルギー物理実験の検出器に最も近く置かれるビーム収束用あるいは偏向用の磁石として使用されている。これらは小規模な応用例であるが、加速器における大規模な応用はFermilabのRecycler Ringである。それほど強い磁場を必要としないためSrフェライトと継鉄を組み合わせた構造のハイブリッド2極および4極磁石でリングを構成している。永久磁石を利用することによりコンパクトな磁石が製作できることと、製作コストが比較的安価であること、電源を必要としないため運転コストがかからないなどの利点を持つ。しかし、欠点は永久磁石の磁化の温度依存性と経時的変化である。

### 1. 永久磁石材料

永久磁石の基本的な特性はヒステリシス曲線の第2象限に相当する減磁曲線で与えられる。最も重要な性質は残留磁化と保磁力である。これらが共に大きければ、利用できる磁場は強くなる。永久磁石の動作点は磁気回路から決まる減磁曲線上の点(H, B)である。利用できる最大エネルギーは双曲線が減磁曲線に接する点のBH積 $(BH)_{\max}$ で与えられる (BH積の単位はMG・Oe)。 $(BH)_{\max}$ が大きいほど利用できるエネルギーは大きくなる。

永久磁石は金属合金、フェライト、希土類の3つに分類することができる。これらの磁氣的性質を表1に示す。アルニコは金属合金で最大エネルギー積は1.1~11 MGOeである。温度変化に対して優れた磁氣的安定性を示すので、磁石を利用する精密計器に使用される。

フェライトは酸化鉄 $Fe_2O_3$ を主成分とする複合酸化物で、 $MOFe_2O_3$ なる化学式を有する。MがCoであればコバルトフェライト、Baであればバリウムフェライト、Srであればストロンチウムフェライトと呼ばれる。この中で一般的なフェライトは安価で化学的に安定で、しかも大きな保磁力と比抵抗をもつSrフェライトである。その最大エネルギー積は2.0~4.8 MGOeであるが、温度に対する安定度は低い。

希土類の永久磁石である $SmCo_5$ と $Sm_2Co_7$ は非常に大きな最大エネルギー積をもち、その値は16~32 MGOeである。ただ、非常に高価であるため用途に限られる。加速器でも電子・陽電子コライダーの衝突点の近くでビームを絞る集束用4極磁石として利用されている。この他にさらに大きな最大エネルギー積 (23~49 MGOe) をもつネオジム鉄ボロン $Nd_2Fe_{14}B$ もあり、同じようにビームの最終集束用 (final focus) 4極磁石に利用されている。この永久磁石の成分はすべて安価なものばかりであるので、その生産量が増えれば安くて強力な磁石を作るのに向いている。

### 1.1 金属系磁石材料

アルニコ系（キュリー温度は850C）はAl+Ni+Co+Feを主成分とし、熱処理過程で生じる強磁性相と非磁性相のスピノダル分解（2成分混合系を高温から急冷して不安定状態においた場合に起こる2相分離）を利用して保持力を高めたものである。用途として温度変化をきらう精密計測機器、OA、FAおよびAV用モータなどがある。

同じく金属系のFe-Cr-Coはキュリー温度650 である。スピノダル分解によりFeとCoに富む強磁性相とCrに富む非磁性相に2相分離する。磁界中熱処理により強磁性相が磁化方向に伸びた組織が得られる。

表1 永久磁石の磁気特性

永久磁石	残留磁化 (kG)	保磁力 (kOe)	最大エネルギー積 (MG·Oe)	キュリー温度 (°C)
alnico	5.0~14.0	0.5~1.6	1.1~11	850
Fe-Cr-Co	8.0~14.5	0.4~0.8	1.1~7.0	670
Sr ferrite	3.0~4.5	1.6~3.95	2.0~4.8	450~460
SmCo	8.0~12.0	4.0~10.7	16~32	710~820
NdFeB	9.8~14.5	9.0~14.1	23~49	310

### 1.2 酸化物系（フェライト、酸化鉄Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>を主成分とする複合酸化物）

主成分の酸化鉄と2価の金属酸化物を混合して加圧成形した後で、900~1400 で焼結（ $MO + 6Fe_2O_3 \rightarrow MO \cdot 6Fe_2O_3$  [M = Ba, Sr, Pb]）したものである。金属元素のMによって、

- Coフェライト (CoO, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) 高価、機械的強度が低いこともあって生産中止。
- Baフェライト (BaO, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) BaをSrで置き換えたSrフェライトが圧倒的。
- Srフェライト 安価、保持力に優れる。電気抵抗大。化学的に安定。温度変化に弱い。用途はスピーカ、小型モータなど。

に分かれる。

### 1.3 希土類系

サマリウムコバルトは最大エネルギー積は20MGOeのSmCo<sub>5</sub>（1-5型）と30MGOeのSm<sub>2</sub>Co<sub>17</sub>（2-17型）がある。Sm<sub>2</sub>Co<sub>17</sub>だけでは高保持力が得られない。Cuを添加することによりCuを多く含むSm(Co, Cu)<sub>2</sub>相とCuの少ない主相Sm<sub>2</sub>(Co, Cu, Fe, M)<sub>17</sub>に2相分離する。この状態では主相がSm(Co, Cu)<sub>2</sub>相に取り囲まれる構造をもち、2-17相中の磁壁が1-5相によりピンング（pinning）されるため保持力が大きくなる。

最大エネルギー積が50MGOeもあるNd<sub>2</sub>Fe<sub>14</sub>Bは安価であるが、温度係数は比較的大きい。図1にこの種の永久磁石の減磁曲線とエネルギー積を示す。

### 1.4 永久磁石の減磁

永久磁石の減磁は温度変化や、外部磁界が作用したり機械的応力などが加われば減磁が起こる。温度による減磁は温度上昇によりスピンの配列が乱されることによる。キュリー温度から離れたところで、

$$B_r = B_0(1 + \alpha T)$$

ここで、 $\alpha$ は温度係数である。永久磁石はそれぞれ固有の温度係数を持っていて、アルニコは-0.02~-0.03%/、Fe-Cr-Coは-0.03~-0.05%/、フェライトは-0.18~-0.20%/、SmCoは-0.02~-0.043%/、NdFeBは-0.09~-0.13%/である。フェライトは大きな温度係数をもっているため、その利用にあたっては注意しなければならない。減磁には可逆的变化と組織の変化や不安定磁区に起因する不可逆的变化がある。使用中の不可逆減磁は、「熱枯らし(thermal seasoning)」処理(予め使用温度以上の加熱または以下に冷却)で対処できる。Srフェライトでは使用環境における最低温度に依存する減磁である。しかし、SmCoでは逆に最大温度に依存する。このため前者は予想される最低温度以下に一度だけ一定時間保持してやれば熱的な減磁は起こらなくなる。後者では予想される最高温度以上に一度保ってやればよい。

Fermilabでは反陽子を主リングから回収して再入射するためにRecycler Ringと呼ばれる新しいリングを作って主リングにおけるビーム強度を増強した。このリングには全面的にSrフェライトが利用されている。温度変化による磁場の強さの可逆的变化を補償するため、各磁石の長さ方向に永久磁石とキュリー温度の低い(50~70)70%Fe-30%Ni合金をサンドイッチ構造にして、温度によるFeNi合金の透磁率の変化が永久磁石の磁場変化を打ち消し0.01%/以下の温度安定度を達成している。

この他、時間的に組織が変化することによる減磁と磁気余効(磁化状態の不安定な部分が安定状態に移行する現象)とがある(経時的減磁)。これは着磁後に数%の強制減磁(knockdown)を与えることで安定化する。

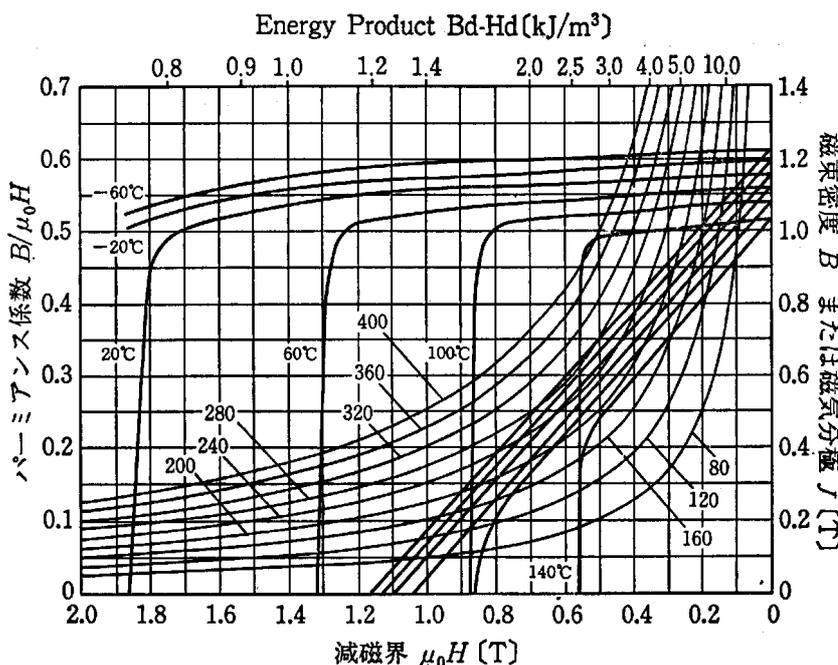


図1 ネオマックス 35 H の減磁曲線 (住友特殊金属)。

## 2. 永久磁石を利用する磁気回路

コイルの代わりに永久磁石で起磁力を与える磁気回路におけるアンペールの法則は

$$\oint H dl = 0 \quad (1)$$

である。永久磁石とヨーク（継鉄）で構成される図2の磁気回路において、

$$H_g h + H_i L_i + H_p d = 0 \quad (2)$$

ここで、 $H_g$ 、 $H_i$ 、 $H_p$ はそれぞれギャップ、ヨーク、永久磁石内の磁場の強さ、 $h$ 、 $L_i$ 、 $d$ はそれぞれの磁路長の半分である。永久磁石の動作点における磁束密度を $B_p$ として、磁束の連続性から

$$B_p A_p = \mu_i H_i A_i = \mu_0 H_g A_g \quad (3)$$

ここで、 $A_p$ 、 $A_i$ 、 $A_g$ はそれぞれ永久磁石、ヨーク、ギャップの断面積、 $\mu_i$ はヨークの透磁率である。(2)と(3)から、

$$H_p B_p = - \frac{(B_g A_g)(B_g h)(1 + \mu_0 L_i A_g / \mu_i h A_i)}{\mu_0 A_p d} \quad (4)$$

ここで、 $B_g$ はギャップの磁束密度である。分子に現れる $(1 + \mu_0 L_i A_g / \mu_i h A_i)$ はヨーク内における起磁力の低下に相当する補正を表すレクタンス係数 $\varepsilon$  ( $>1$ )である。この他にヨークからの磁束の漏れも起磁力の損失に寄与するのでこれを $\beta$ とすれば、全レクタンス係数は

$$\varepsilon = \frac{H_p d}{H_g h} = 1 + \frac{\mu_0 L_i A_g}{\mu_i h A_i} + \beta \quad (5)$$

で与えられる。 $A_g = A_p$ として加速器の磁石の場合には通常 $L_i/h \sim 10$ 、 $\mu_i/\mu_0 > 1000$ であるが、 $\varepsilon \sim 1.3$ である。

ギャップにおける磁束の漏れ係数 $f$  ( $>1$ )は

$$f = \frac{B_p A_p}{B_g A_g} \quad (6)$$

で定義される。(5)と(6)を(4)に代入すれば減磁曲線上の動作点を定める勾配 $s$

$$s \frac{B_p}{H_p} = - \frac{\mu_0 A_g d f}{A_p h \varepsilon} \quad (7)$$

が決まる。磁極形状が角形であるとすれば、ギャップのパーミアンスは近似的に

$$P_g = \mu_0 \left[ \frac{\ell w}{2h} + 0.264(2\ell + 2w) + 4 \times 0.077 \times 2h \right] \quad (8)$$

で与えられる。ここで、 $\ell$ と $w$ はそれぞれ磁極の長さ（ $A_g = \ell w$ ）である。ギャップ以外のパーミアンスへの寄与は小さいとすれば漏れ係数は

$$f = 1 + 1.056 \frac{h}{\ell} + \frac{h}{w} + 1.232 \frac{h^2}{\ell w} \quad (9)$$

である。加速器の電磁石では $h^2/\ell w \ll 1$ および $h/\ell \ll 1$ が成立するので、

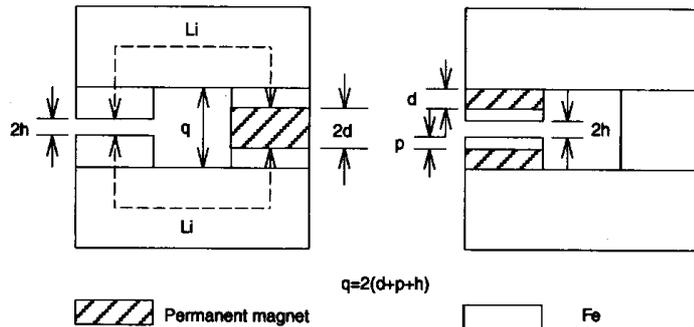


図2 ハイブリッド永久磁石の磁気回路の例。

$$f = 1 + 1.056 \frac{h}{w} \quad (10)$$

である。さらに、 $0.1 < h/w < 0.2$  であるので、 $1.1 < f < 1.2$  である。 $A_g = A_p$  を仮定すれば、図 2 に示した角型偏向永久磁石の動作点は

$$\frac{B_p}{\mu_0 H_p} = -0.885 \frac{d}{h} \quad (11)$$

ギャップの磁束密度は

$$B_g = \frac{B_p}{f} \quad (12)$$

と近似できる。ハイブリッド 4 極磁石についても同様な取り扱いが可能である。

Fermilab で使用されているハイブリッド 2 極および 4 極の永久磁石断面を図 3 に、Recycler Ring に設置されている様子を写真 1 に示す。

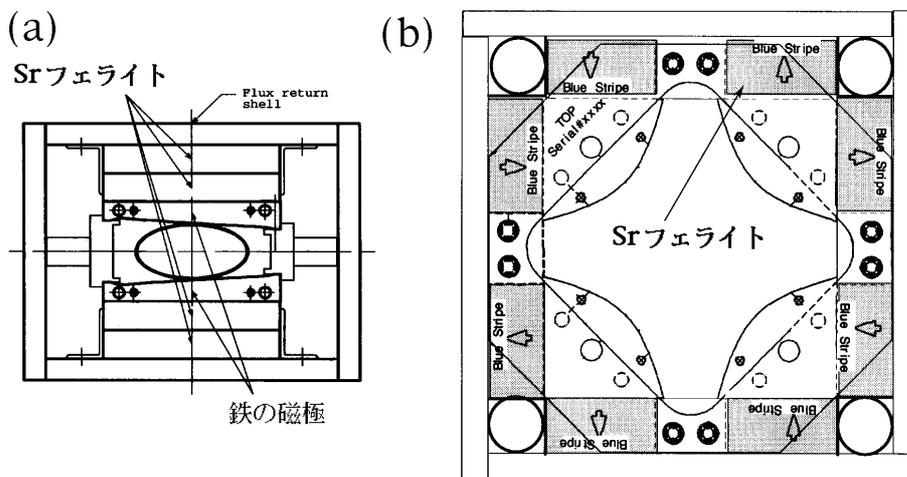


図 3 Fermilab で使用されている (a) ハイブリッド 2 極永久磁石と、(b) ハイブリッド 4 極永久磁石の断面構造。



写真 1 Fermilab の Recycler Ring と New Injector Ring の様子。

### 3 . REC永久磁石

#### 3 . 1 永久磁石の動作

永久磁石は磁化された結果として残る残留磁場を利用する。自分自身のもつN, S極によって外部に磁界を作ると共に、自分自身の中にも磁界を作る。後者の磁化は永久磁石に加わる反磁界であり、その強さによって動作点がきまる。反磁界と動作点の関係は減磁曲線と呼ばれ、図4に示すようにヒステリシスの第2象限で与えられる。反磁界を $H_d$ とすれば動作点は $B_d$ で与えられる。残留磁束密度 $B_r$ と保持力 $H_c$ が大きいものが優れた永久磁石であると言える。永久磁石または永久磁石と強磁性体を組み合わせて磁気回路を作り、反磁界を減らせば動作点は $B_r$ に近づく。

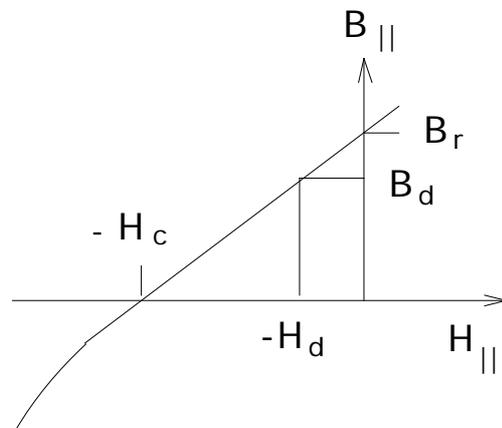


図4 永久磁石の磁化容易軸方向の減磁曲線と動作点。

REC永久磁石は残留磁束密度も保持力も大きく、加速器に要求される強い磁場の発生が可能である。現在、

$$B_r = 0.8 \sim 1.2 T$$

$$H_c = 300 \sim 750 \text{ kA/m}$$

の範囲のものが入手できる。永久磁石の磁気特性の優劣を簡単に判定する方法は $H_d B_d$ の最大値、すなわち最大エネルギー積を見ればよい。RECの場合、 $H_d B_d = 16 \sim 32 \text{ MGOe}$ である。フェライト系の永久磁石に比べて1桁も大きい。

#### 3 . 2 永久磁石の基本公式

2次元の計算では複素数が使用できるので、2次元座標を表す

$$z = x + iy = re^{i\varphi} \tag{13}$$

とその複素共役を

$$z^* = x - iy = re^{-i\varphi} \tag{14}$$

とする。2次元磁場はスカラーポテンシャル $V$ またはベクトルポテンシャル $A$ から

$$B_x = \partial A / \partial y = -\partial V / \partial x \tag{15}$$

$$B_y = -\partial A / \partial x = -\partial V / \partial y \tag{16}$$

$V$ と $A$ の関係は複素変数 $z$ の解析関数の実数部と虚数部のCauchy-Riemann条件と同じであるので、複素ポテンシャルとして $\underline{F}(z) = (A + iV)/2$ を定義することができる。

$\underline{B} = B_x + iB_y$ を2次元のベクトルとすれば、

$$\underline{B}^* = i \frac{dF}{dz} = (B_x - iB_y) \tag{17}$$

$z$ の位置にある電流フィラメント $I$ による $z_0$ における磁場は

$$\underline{B}^*(z_0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi i} \frac{1}{z_0 - z} \quad (18)$$

である。  $F$  と  $B^*$  のTaylor展開を

$$\underline{F}(z_0) = \sum_{n=1} a_n z_0^n \quad (19)$$

$$\underline{B}^*(z_0) = \sum_{n=1} b_n z_0^{n-1}, \quad b_n = i n a_n \quad (20)$$

とする。

### 3.3 RECのB-H特性

磁化容易軸方向の  $B_{\parallel}$  と  $H_{\parallel}$  の関係 (図4) は非常に広い範囲で勾配が一定で

$$dB_{\parallel} / dH_{\parallel} = \mu_{\parallel} \quad 1.04 \sim 1.08 \quad (21)$$

である。  $B_{\parallel}(H_{\parallel})$  曲線の原点からのズレは残留磁場であり、保磁力  $\mu_0 H_c$  は  $B_r$  より4%低い。

$B_{\parallel}(H_{\parallel})$  の関係は

$$B_{\parallel} = \mu_0 \mu_{\parallel} H_{\parallel} + B_r \quad (22)$$

または

$$H_{\parallel} = \gamma B_{\parallel} / \mu_0 - H_c \quad (23)$$

ただし  $\gamma_{\parallel} = 1/\mu_{\parallel}$  である。容易軸に垂直な方向の  $B(H)$  の関係はよい近似で

$$B = \mu_0 \mu H \quad (24)$$

ただし  $\mu = 1/\gamma = 1 + B_r / \mu_0 H_A$  である。ここで  $\mu_0 H_A$  は異方性磁界と呼ばれるもので、大きな値 (12~40 T) をもち、  $\mu = 1.02 \sim 1.08$  である。

$B_{\parallel}(H_{\parallel})$  と  $B(H)$  の関係をベクトルで表現すれば、

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (25)$$

$\mathbf{B}_r$  は大きさ  $B_r$  で方向は容易軸方向である。  $\mu \mathbf{H} = \mu H_{\perp} + \mu_{\parallel} H_{\parallel}$  であるので、  $\mathbf{H}$  についても同様に、

$$\mathbf{H} = \gamma \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{H}_c \quad (26)$$

である。  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  と  $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$  の関係から、

$$\text{div}(\mu_0 \mu \mathbf{H}) = \rho = -\text{div} \mathbf{B}_r \quad (27)$$

$$\text{rot}(\gamma \mathbf{B} / \mu_0) = \mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{H}_c \quad (28)$$

ここで実電流密度は  $\mathbf{J} = 0$  であるから、  $\mathbf{j}$  は見掛け上の電流密度である。すなわち、  $-\text{div} \mathbf{B}_r$  は見掛け上の磁荷密度であり、  $\text{rot} \mathbf{H}_c$  は見掛け上の電流密度である。比透磁率は非常に1に近いので  $\mu_{\parallel} = \mu = 1$  と仮定することができ、  $B_r$  と  $H_c$  は定数であるので、見掛け上真空中に磁荷または電流が存在し、それによる磁場が現れるものと解釈することができる。言い換えれば、磁化方向の異なる永久磁石のセグメントを空間に配置すれば、任意の点における磁場は個々の空間磁荷または空間電流の寄与が線形的に重畳したものとして計算できる。ただし、この場合、鉄のような磁性体が近くにはないものと仮定する。永久磁石のセグメント内で  $B_r$  と  $H_c$  が一様であれば、磁荷と電流は表面だけに現れる。

#### 4 RECによる磁場の計算

周囲に磁性体のないz方向に十分長いRECアセンブリーであれば、 $\mathbf{B}_r$ はz成分をもたないのでz方向だけの電流を考える。

$$j_z = (\text{rot} \mathbf{H}_c)_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial B_{rx}}{\partial y} \quad (29)$$

この電流による磁場は

$$\underline{B}^*(z_0) = \frac{\mu_0}{2\pi i} \frac{j_z}{z_0 - z} dx dy \quad (30)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \underline{B}^*(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z_0 - z} \frac{\partial B_{ry}}{\partial x} - \frac{\partial B_{rx}}{\partial y} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi i} \circ \frac{B_{ry} dy}{z_0 - x - iy} - \frac{B_{ry} dx dy}{(z_0 - z)^2} - \frac{1}{2\pi i} \circ \frac{B_{rx} dx}{z_0 - x - iy} - i \frac{B_{rx} dx dy}{(z_0 - z)^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi i} \circ \frac{\underline{B}_r dz}{z_0 - z} + \circ \frac{\underline{B}_r^* dz^*}{z_0 - z} - \frac{1}{2\pi i} \frac{B_{ry} dx dy}{(z_0 - z)^2} - i \frac{B_{rx} dx dy}{(z_0 - z)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\underline{B}_r dx dy}{(z_0 - z)^2} \end{aligned} \quad (31)$$

ここで  $\underline{B}_r = B_{rx} + iB_{ry}$ 、 $\underline{B}_r^* = B_{rx} - iB_{ry}$  である。xとyについて別々に積分を行い、それらを平均すれば複素線積分が得られる。

$$\underline{B}^*(z_0) = \frac{1}{2\pi} \frac{\underline{B}_r dx dy}{(z_0 - z)^2} = \frac{\underline{B}_r}{2\pi} \circ \frac{dy}{z_0 - z} = \frac{\underline{B}_r}{2\pi i} \circ \frac{dx}{z_0 - z} = \frac{\underline{B}_r}{4\pi i} \circ \frac{dz}{z_0 - z} \quad (32)$$

$1/(z_0 - z)$ の級数展開は磁石の内側 ( $|z_0| < |z|$ ) で、

$$\frac{1}{z_0 - z} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_0^{n-1}}{z^n} \quad (33)$$

外側 ( $|z_0| > |z|$ ) で

$$\frac{1}{z_0 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_0^{n-1}}{z^n} \quad (34)$$

微分して、磁石の内側で

$$\frac{1}{(z_0 - z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z_0^{n-1}}{z^{n+1}} \quad (35)$$

外側で

$$\frac{1}{(z_0 - z)^2} = - \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{n z_0^{n-1}}{z^{n+1}} \quad (36)$$

が得られる。磁石の内側におけるTaylor展開

$\underline{B}^*(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z_0^{n-1}$  の係数は、

$$b_n = \frac{n}{2\pi} \frac{\underline{B}_r}{z^{n+1}} dx dy \quad (37)$$

である。

同じ形状で同じ強さの永久磁石があり、図5に示すように角度 $\phi$ の方向における容易

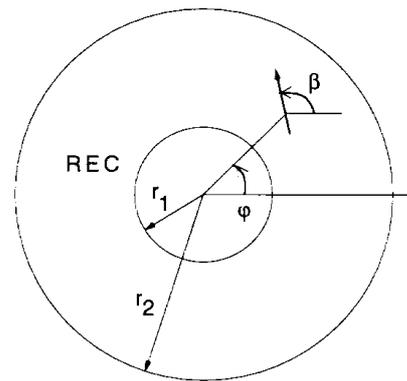


図5 REC内部の磁場計算のための積分領域。

軸が2次元平面内で角度 $\beta$ だけ回転しているとすれば、この回転しているセグメントによる磁場への寄与は $B_r = B_r e^{i\beta(\varphi)}$ 、 $z = r e^{i\varphi}$ として(37)から

$$b_n = \frac{n}{2\pi} \frac{B_r e^{i[\beta(\varphi)-(n+1)\varphi]}}{r^{n+1}} r dr d\varphi \quad (38)$$

この関係を利用すれば、2N極の磁場を発生させるためには、 $b_N$ を最大にして、それ以外の $b_n$ を最小にすればよいことが分かる。すなわち、

$$\beta(\varphi) = (N+1)\varphi \quad (39)$$

さらに、 $r \rightarrow 0$ とすれば $b_N$ は大きくなることも分かる。図5の積分路(内側と外側の円の半径をそれぞれ $r_1$ 、 $r_2$ として、2つの円の間はRECで満たされているものとする)に沿って積分すれば

$$b_N = \frac{1}{r_1^{N-1}} B_r \frac{N}{(N-1)} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^{N-1}, \quad N \geq 2 \quad (40)$$

$$b_N = B_r \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad N = 1 \quad (41)$$

すなわち、(20)のTaylor展開は2N極成分だけになって、

$$B_N^* = \frac{z_0}{r_1} \frac{N}{(N-1)} \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^{N-1}, \quad N \geq 2 \quad (42)$$

$$B_N^* = B_r \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad N = 1 \quad (43)$$

である。また、RECの外側では(35)の代わりに(36)を用いて計算すれば、磁場はゼロになる。

以上から、ドーナツ状のRECで(39)の関係を満足するように、磁化の方向が連続的に変化すれば、純粋な2N極成分だけが現れる。

## 5. 永久磁石による多極磁石

(39)の関係から、 $(r, \varphi)$ におけるRECの容易軸方向は $\varphi = 0$ 方向を基準にして角度 $(N+1)\varphi$ で与えられる。この関係をREC内部において連続的に成立させることはできないので、M個の形状の同じブロック(セグメント)に分割する。各ブロック内で容易軸方向は同じである。図6に示す4極磁石は16個のブロックで構成したもので、矢印は容易軸の方向である。ブロック間の容易軸の角度の変化は $2\pi(N+1)/M$ である。

基準ブロックとして $\varphi = 0$ に位置する1つのセグメントを考え、 $b_n$ への寄与を $c_n$ とする。この基準セグメントに関して $\varphi = \alpha = 2\pi m/M$ の角度に位置するセグメントからの寄与は

$$c_n e^{i\alpha(N+1)} e^{-i\alpha(n+1)} \quad (44)$$

ただし、

$$c_n = \frac{B_r}{2\pi} \frac{n}{z^{n+1}} dx dy \quad (45)$$

である。

指数関数の初めの項は容易軸の角度 $\alpha(N+1)$ の回転によるもので、2番目の指数関数

項は(37)の積分による。全部のセグメントからの寄与の合計は

$$b_n = \underline{C}_n \sum_{m=0}^{M-1} e^{i2\pi m(N-n)/M} = \underline{C}_n M, \quad (N-n)/M = \text{integer} \\ 0, \quad (N-n)/M \text{ integer} \quad (46)$$

したがって、

$$\underline{B}_n^* = M \underline{C}_n z_0^{n-1}; \quad n = N + \nu M \quad (47)$$

x軸で2等分される配置にある図7の台形状のブロックを考える。ブロックの角度を  $\varepsilon 2\pi/M$  として、台形について面積積分する。この積分をM倍して、 $N=2$  の場合、

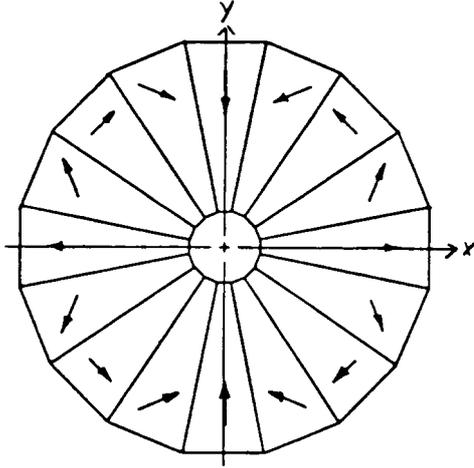


図6 REC 4極磁石 (16セグメント) の断面

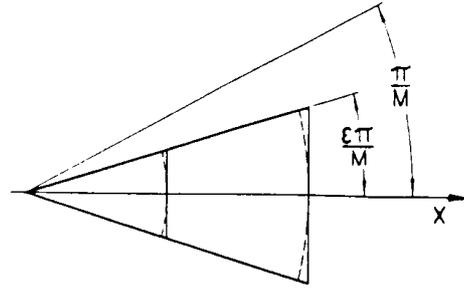


図7 REC多極磁石の1セグメント

$$\begin{aligned} \underline{B}^*(z_0) &= M \frac{B_r}{2\pi} \int_{\nu=0} \frac{n z_0^{n-1}}{z^{n+1}} dx dy \\ &= M \frac{B_r}{2\pi} \int_{\nu=0} n z_0^{n-1} \int_{r_1}^{r_2} dx \frac{x \tan(\varepsilon\pi/M)}{-x \tan(\varepsilon\pi/M)} \frac{1}{(x+iy)^{n+1}} dy \\ &= -M \frac{B_r}{2\pi} \int_{\nu=0} z_0^{n-1} \int_{r_1}^{r_2} dx \frac{1}{i} \left[ \frac{1}{(x+iy)^n} \right]_{-x \tan(\varepsilon\pi/M)}^{x \tan(\varepsilon\pi/M)} \\ &= -M \frac{B_r}{2\pi} \int_{\nu=0} z_0^{n-1} \int_{r_1}^{r_2} dx \frac{1}{i} \left[ \frac{1}{(x+ix \tan(\varepsilon\pi/M))^n} - \frac{1}{(x-ix \tan(\varepsilon\pi/M))^n} \right] \\ &= M \frac{B_r}{\pi} \int_{\nu=0} z_0^{n-1} \int_{r_1}^{r_2} dx \frac{\cos^n(\varepsilon\pi/M) \sin(n\varepsilon\pi/M)}{n x^n} \\ &= -M \frac{B_r}{\pi} \int_{\nu=0} z_0^{n-1} \frac{\cos^n(\varepsilon\pi/M) \sin(n\varepsilon\pi/M)}{n-1} \left[ \frac{1}{x^{n-1}} \right]_{r_1}^{r_2} \quad (48) \\ &= M \frac{B_r}{\pi} \int_{\nu=0} z_0^{n-1} \frac{\cos^n(\varepsilon\pi/M) \sin(n\varepsilon\pi/M)}{n-1} \left( \frac{1}{r_1^{n-1}} - \frac{1}{r_2^{n-1}} \right) \\ &= \underline{B}_r \int_{\nu=0} \frac{\cos^n(\varepsilon\pi/M) \sin(n\varepsilon\pi/M)}{n\pi/M} \frac{n}{n-1} \frac{(z_0)^{n-1}}{r_1} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^{n-1} \right] \end{aligned}$$

もし縁が点線の円 (扇形の場合) の場合は、面積積分すれば、 $N=2$  の場合、

$$\begin{aligned} \underline{B}^*(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\underline{B}_r dx dy}{(z_0 - z)^2} = -M \frac{\underline{B}_r}{2\pi} \int_{\nu=0} \frac{nz_0^{n-1}}{r^n e^{i(n+1)\varphi}} dr d\varphi \\ &= \underline{B}_r \int_{\nu=0} \left[ \frac{\sin(n+1)\varepsilon\pi/M}{(n+1)\pi/M} \frac{n}{n-1} \left(\frac{z_0}{r_1}\right)^{n-1} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n-1}\right] \right] \end{aligned} \quad (49)$$

以上まとめて、

$$\underline{B}^*(z_0) = \underline{B}_r \int_{\nu=0} \frac{n}{n-1} \left(\frac{z_0}{r_1}\right)^{n-1} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n-1}\right] K_n \quad (50)$$

$$n = N + \nu M \quad (51)$$

$$K_n = \frac{\cos^n(\varepsilon\pi/M) \sin(n\varepsilon\pi/M)}{n\pi/M} \quad (\text{台形の場合}) \quad (52)$$

$$K_n = \frac{\sin(n+1)\varepsilon\pi/M}{(n+1)\pi/M} \quad (\text{扇形の場合}) \quad (53)$$

どちらの場合も

$$\frac{n}{n-1} \left(\frac{z_0}{r_1}\right)^{n-1} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{n-1}\right] \approx \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (54)$$

である。

理想的な場合と比較すれば、セグメント構造の多極磁石は  $K_n$  の値だけ低下する。 $\varepsilon = 1$  のとき、一周期当たりのセグメントの数 ( $M/N$ ) が 8 以上の場合に理想的な強さに近づく。このような場合の永久磁石の構成を図 8 に示す

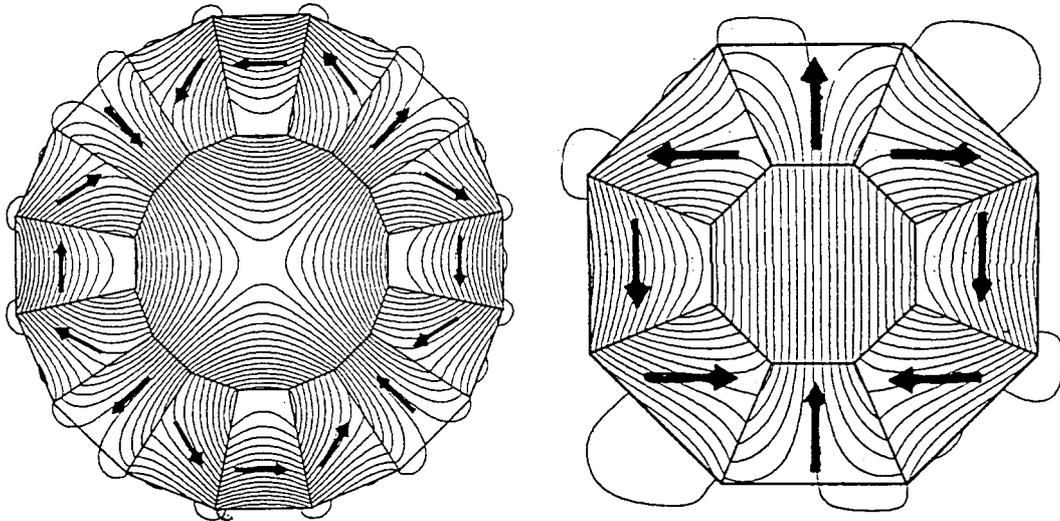


図 8 SLACのFinal IR QuadとDipoleの磁束パターン  
(理想的なセグメント数の場合、矢印は磁化容易方向を示す)。

## 6 . 4 極永久磁石

セグメント化することにより磁石の外側に磁場が漏れるが、この漏れ磁場はセグメントの数を多くすることで、無視できるくらい小さくなる。前節の式(50)からセグメント REC 4 極磁石の式は  $\varepsilon = 1$  として、

$$\underline{B}^*(z_0) = \frac{z_0}{r_1} \underline{B}_r 2 \left[ 1 - \frac{r_1}{r_2} \right] K_2 \quad (55)$$

$$K_2 = \frac{\cos^2(\pi/M) \sin(2\pi/M)}{2\pi/M} \quad (56)$$

この式に従って、Mの違いによる  $K_1$  と  $K_2$  の値を計算すれば図9のようになる。4極磁石の場合、セグメントの数として  $M=12$  または  $16$  を選択する。磁場の強さを数値的にみれば  $M=16$ 、 $r_2/r_1=4$ 、 $B_r=0.95[T]$  の場合、

$$\underline{B}^*(z_0) = \frac{z_0}{r_1} 1.34[T] \quad (57)$$

である。このようにアパーチャにおける磁場は  $B_r$  より大きくなる。セグメントにより  $K_2$  で与えられる割合で磁場は低下し、ハーモニクスが混入する ( $M=16$  の場合、 $n=N+vM=18, 34, \dots$ )。基本磁場に対するハーモニクスの大きさの比は

$$Q(v) = \frac{z_0}{r_1} \frac{v^M}{n-1} \frac{1 - (r_1/r_2)^{n-1}}{1 - (r_1/r_2)^{N-1}} \cos^{vM}(\pi/M) \quad (58)$$

で与えられる。  $n=18$  成分の基本磁場に対する割合は約6%である。  $n=34$  の割合は約2%である。モデルについての測定およびコンピュータによるシミュレーション(POISSONのPANDIRAコード)からは、  $n=6, 10, 14$  の成分が現れる。これは  $\mu_{||} = \mu_{\perp} = 1$  の仮定が厳密ではないことを示し、基本磁場に対する割合は、  $n=6$  で0.2%、  $n=10$  で0.1%以下、  $n=14$  で0.1%である。これらの割合は非常に小さく、実用上問題になるとは思われない。必要ならばセグメントの間に非磁性のスペーサーを入れて特定のハーモニクスを除去する設計も可能である。

このような4極永久磁石は小型で大きな磁場勾配が必要とされる線形加速器の収束用に適している。この例でアパーチャの半径を1cmとすれば、得られる磁場勾配は1.34[T/cm]である。また、REC磁石は他の電磁石の中に入れても、アパーチャ内で磁場が線形的に重畳されるだけで、他の磁場と殆ど干渉を引起さない。このため、衝突リングの検出器ソレノイドの中でビーム収束用 (final focus REC) に使用される。RECアンジュレータとして放射光や自由電子レーザーにも応用されている。

この他、SLACのDamping ringにおいてクロマティシティ補正用の6極磁石、入出射用のmatching用4極磁石にも使用されている。

4極磁石の強さを調節するために、幾つかの方法が考案されている。

- 1) 同じセグメント構造の2台の4極磁石を他方のボアーの中に同軸に挿入し、お互いに逆方向に回転させることにより、2つの磁場を重ね合わせる。この場合は端部磁場の方向が変化する。
- 2) セグメントを半径方向に動かす。

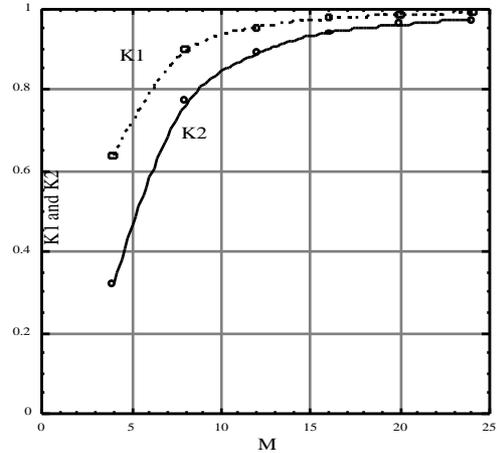


図9 Mの違いによる  $K_1$  と  $K_2$  の値。

- 3) 長さ方向にスライスし、カップリングを起させないような方法で回転させて実効長を調節する(写真1)。

端部磁場に関して、軸に垂直にカットした端部の多極永久磁石では、

- 1) 磁場実効長は物理的長さに等しい。
- 2) 2次元磁場に含まれない多極成分は、端部にも現れない。

SLACのFinal IR QuadとDipole(図8)はサマリウムコバルト(Sm<sub>2</sub>Co<sub>17</sub>)の台形状のセグメントから構成されている。図8の断面形状をもち、軸方向にスライスされた永久磁石が共通の枠に多数嵌め込まれている。B<sub>r</sub>=1.05[T]から生まれる磁気圧は非常に大きく、

$$P_{magnetic} = \frac{(1.05[T])^2}{2\mu_0} = 4.387 \times 10^6 [N/m^2] = 4.3 \text{気圧} \quad (59)$$

である。断面内では磁気圧は引力であるが、スライス面では同じ磁極が重なるため、軸方向に反発力が働き、スライスを面内で回転させる力も働く。このような反発力と回転力を押さえ込む非磁性の構造が必要である。

## 7. アンジュレータ (undulator)

電子蓄積リングにおける挿入光源または自由電子レーザー源として、アンジュレータは多くの研究機関で利用されている。これは放射光のスペクトルの特性を変えたり、光束や輝度を増加させる目的で電子リングの直線部に挿入される周期的磁場構造をもつ装置である。図10に示すようにアンジュレータはS極とN極を多数交互に短い周期

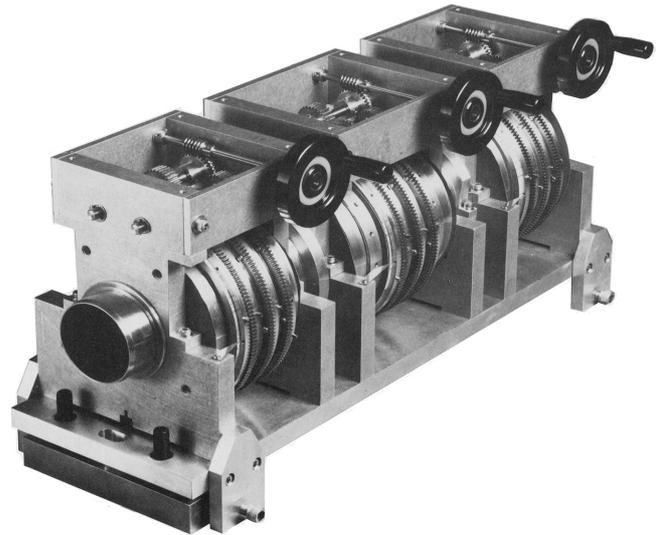


写真1 磁場強度可変トリプレット4極永久磁石の例(NEN社)。永久4極磁石のモジュールをギアで逆方向に回転させて、20~100%の範囲で可変。ビームパラメータのカップリングが最小限になるよう考慮されている。ボア直径7cm、全長20cm、重量14kg、磁場勾配7T/m。

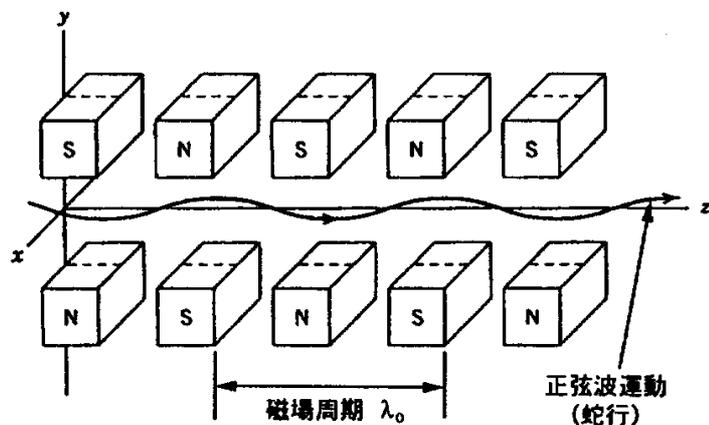


図10 アンジュレータの中における電子の蛇行運動。

で並べた構造をもち、この中を電子ビームが通過するとき磁場の周期に応じて水平面内で蛇行運動する。リングを構成する偏向電磁石からも放射光は得られが、アンジュレータは磁場を強くして偏向電磁石では得られない性質の放射光を発生させる。

この装置の多くはREC永久磁石による磁場を利用している。アンジュレータには2種類のタイプがある。「純RECアンジュレータ」と鉄を併用する「ハイブリッドアンジュレータ」である。後者の設計は鉄の非線形性を考慮しなければならないため複雑であるが、前者はRECの性質による磁場の線形的な重畳ができるので簡単である。図11に示す純RECアンジュレータの磁場は、RECの透磁率が1、各RECブロックの磁化は一樣であるという仮定により、RECの表面電流シートだけを考えればよい。

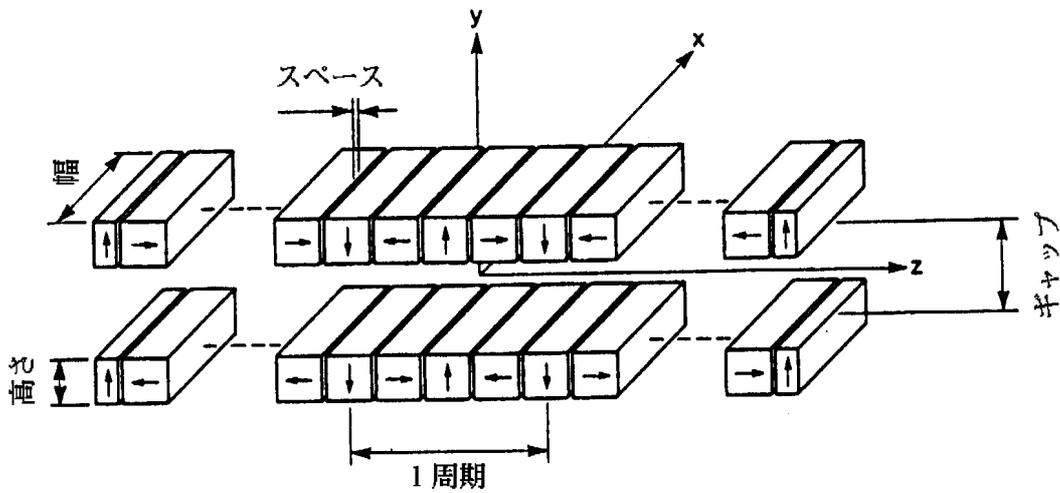


図11 アンジュレータにおけるRECブロックの座標の定義。

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$ より磁化電流密度は  $\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \mathbf{M}$  で与えられる。この電流密度に対してビオ・サバルの法則を適用すれば、

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{M} \times d\mathbf{A}) \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{M})d\mathbf{A} - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{A})\mathbf{M}}{r^3} \quad (60)$$

ここで  $\mathbf{M}$  は磁化の強さ、 $d\mathbf{A}$  はRECブロックの表面積要素で方向は面に垂直で外向き、 $\mathbf{r}$  はREC表面から磁場計算点までの位置ベクトルである。 $B_y$  成分について上の式を書き直せば、

$$\begin{aligned} B_y &= -\frac{1}{4\pi} \frac{(xM_x + yM_y + zM_z)dA_y - (xdA_x + ydA_y + zdAz)M_y}{r^3} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{(xM_x + zM_z)dA_y - (xdA_x + zdAz)M_y}{r^3} \end{aligned} \quad (61)$$

この式で  $x, y, z$  は循環変数であるので、一般的に表せば、

$$B_i = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^3 \frac{M_j x_j dA_i - M_i x_j dA_j}{r^3} \quad (62)$$

ここで、 $i, j = x, y, z$  である。図10のように  $\mathbf{M}$  が  $y, z$  方向の成分だけをもてば、 $y$  方向

(垂直方向)の磁場は

$$B_y = -\frac{1}{4\pi} M_z \frac{zdx dz}{r^3} - M_y \frac{xdy dz}{r^3} - M_x \frac{zdx dy}{r^3} \quad (63)$$

で与えられる。

-----ここでちょっとコーヒータイム-----

### 「希土類永久磁石の身近な応用」

希土類に属する元素はランタン（原子番号57）からルテチウム（原子番号71）までの15元素（総称してランタノイド）とこれにスカンジウム（原子番号21）とイットリウム（原子番号39）を加えた17元素である。希土類の語源は地球上希にしか存在しない鉱物中に金属酸化物として含まれていることからきている。しかし、この「希（まれ）」という言葉は必ずしも正確ではない。一般に希土類元素は融点が高く、単体に分離することが困難である。

サマリウム・コバルト（SmCo<sub>5</sub>、1-5系）と呼ばれる金属間化合物の希土類永久磁石は1967年アメリカで発明され、それまでの合金磁石やフェライト磁石を上回る強い磁気特性を持つことが確認された。それまで鉄属元素（Fe, Co, Ni）が主流であった強磁性の分野で希土類元素の磁性の研究が始まった。サマリウムコバルトの特性向上に貢献したのは日本の技術者で、2-17系と呼ばれるSm<sub>2</sub>Co<sub>17</sub>が開発された（1975年）。これら2種類のサマリウム・コバルトを希土類コバルト（rare earth cobalt）と言いその頭文字をとってREC永久磁石と呼ぶ。しかし、1980年代になってサマリウム・コバルトの性能を上回るネオジウム・鉄・ボロン（NdFeB）と呼ばれる希土類磁石が日本とアメリカで開発された。サマリウム・コバルトが希少金属であるコバルトを含むのに対し、新しい磁石の成分元素をみればすべて地球上に多く存在する元素で性能のよい永久磁石が安価にできることが期待できる。

SmCoとNdFeBの磁石の製法はそれぞれの成分元素の原料をアルゴン雰囲気中で溶解し、数ミクロンの微粒子に粉砕する。粉砕された原料を磁界中でプレス成形し、~1000以上で焼結する。さらに時効処理を行ったものを加工して製品にするが、この状態ではまだ磁化されていないので、出荷前または利用者側で強力な磁界中で着磁して初めて永久磁石になる。

永久磁石には合金（アルニコ）、フェライト、SmCo、NdFeBの4種類があるが、生産量が最も多いのは原料供給の安定性やコスト的に安いフェライト磁石である。アルニコ磁石は高価であるが、温度特性に優れるため精密機器に使用される。

永久磁石は身近なところで多く利用されている。例えば、自動車のアンチ・ロック・ブレーキ装置（ABS）のホイールセンサーである。雪道などの滑りやすい道路では路面とタイヤの間の摩擦力が小さいので、急ブレーキをかけるとタイヤの回転が止まり自動

車のもつ慣性力でロックしたタイヤが路面を滑る。このような状態になればハンドルが利かなくなり非常に危険である。ここに登場するのがタイヤの回転を見張る回転センサーである。ドライバーがブレーキを踏んでタイヤがロックしそうになったところを回転センサーが感知して、その信号を自動車のコントロールユニットに内蔵されているコンピュータに送る。コンピュータはその信号を判断してブレーキの油圧を下げ、ロック状態寸前のところでタイヤが回転し始める。ここでタイヤの回転を見張っているのがABSのホイールセンサーと呼ばれる回転センサーである。

ホイールセンサーはタイヤと一緒に回転する強磁性体のギアパルサーおよび一組の固定されたサマリウム・コバルト永久磁石と高透磁率の磁心に巻かれたコイルから構成されている。ギアパルサーはかみ合う相手のないギア（歯車）である。ギアの山が高透磁率の磁心の近くを通過するとき、永久磁石からの磁力線が通りやすくなる。逆にギアの谷になれば磁力線が通りにくくなる。タイヤの回転によって磁心の中の磁束が変化するので、これによってコイルに交流電流が流れる。これはファラデーの電磁誘導の原理を応用したものである。急ブレーキによって交流電流の周波数は急激に低下するので、この周波数の変化からコンピュータが危険状態を察知してタイヤのロック状態を解除する。ABS搭載車ではドライバーはただブレーキを踏み続ければよい。このときブレーキペダルにキックバックが発生するが、これに驚いてブレーキを離してはならない。ハイテク装備の自動車といってもドライバーにその知識がなければ「猫に小判」である。

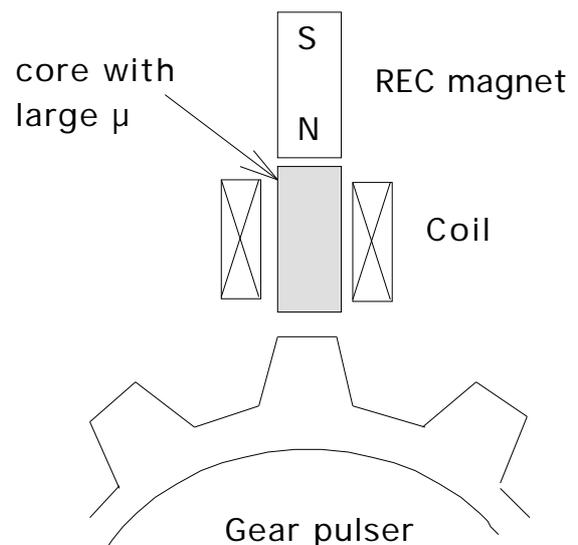


図 ABSのホイールセンサーの原理。

-----コーヒータイム、終わり-----

## 第9章 磁場計算の理論的基礎

磁場の数値計算の歴史は長く、SIBYL、LINDA、TRIMなどの初期の2次元磁場計算コードは何年にも亘って改良が重ねられ、測定値との比較から実用に耐えるものとして加速器の電磁石の設計に長年使用されてきた。これらはLaplace方程式あるいはPoisson方程式を有限差分方程式で近似するもので、SIBYLが最も古く、LINDAはその改良版である。これらが正方形（または長方形）メッシュを採用したのに対し、TRIMは3角メッシュを採用した差分近似法である。後者の長所は3角形メッシュの1辺を領域境界に沿わせることによって境界部分での接続誤差を減らすことができる。正方形メッシュの場合はメッシュを構成する4点が鉄と空気の媒質を異にする領域にまたがるため、境界におけるポテンシャルの計算に誤差が入りやすい。これらの計算アルゴリズムは磁場計算の初期において成功を納め、広く利用された。計算プログラムには磁束密度と透磁率の関係を表として入力できるので、鉄の非線形性を考慮した磁場計算が可能である。これらのプログラムでは逐次過大緩和法と呼ばれる繰り返し計算で収束解を得る。

現在では2次元磁場計算には入力データがより簡略化された3角メッシュのPOISSONコードが一般的に使用される。また、永久磁石や方向性鋼板のような異方性問題には、逐次近似ガウス直接解法によるPANDIRAコードが利用できる。

これらのプログラムは直交座標の2次元問題は勿論、2次元問題に帰着する回転対称（円柱座標）の磁場問題も扱うことができる。一般に2次元問題で処理するメッシュ点数は100×100程度であるが、3次元問題になれば2次元面に垂直な方向に更に100倍とはならない。計算時間や記憶容量の関係からメッシュ点数を減らし、精度はある程度犠牲にしなければならない。3次元問題には、イギリスで開発されたTOSCA、OPERA、KARMENなどの3次元磁場計算コードが利用できる。

### 1. 差分法によるアルゴリズム

有限差分法の基本的な仮定として、次のような規則を設けることにより有限差分方程式の誘導と境界条件の指定が簡単化できる。

- (1) 問題領域の境界およびサブ領域の境界は直線要素で近似できる。
- (2) 領域は三角メッシュ要素を張り巡らすことができる。
- (3) ベクトルポテンシャルの値は三角メッシュ要素の頂点で定義され、メッシュ内では線形的に変化する。
- (4) 磁気抵抗率と電流密度は各三角メッシュ内で一定と仮定する。
- (5) 三角メッシュはトポロジカルに規則的であり、正三角形メッシュ配列とトポロジカルに同等である。すなわち、領域内部の各メッシュ点には6個の三角形が結びついている。

#### 1.1 ベクトルポテンシャルによる定式化

差分法は四角メッシュによるアルゴリズムもあるが、ここでは磁場計算によく利用さ

れる POISSON を例にとり、三角メッシュによる差分アルゴリズムを扱う。このコンピュータコードは 2 次元の静的 Maxwell 方程式をある境界条件のもとで解くものである。磁場で基本になる方程式は、Ampere の法則に基づく式

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad \times \quad \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (1)$$

Gauss の法則に基づく式

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

および材料の種類による式

$$\text{等方性材料} \quad \mathbf{H} = \gamma(|\mathbf{B}|)\mathbf{B} / \mu_0 \quad (3)$$

$$\text{異方性材料} \quad \mathbf{H} = \gamma \mathbf{B} / \mu_0 \quad (4)$$

$$\text{異方性永久磁石材料} \quad \mathbf{H} = \gamma \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{H}_c \quad (5)$$

ここで、 $\gamma$  は磁気抵抗率 (reluctivity、比透磁率の逆数)、異方性材料に対する  $\gamma$  はテンソル (例えば、磁場と磁気誘導の方向が異なる) である。

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6)$$

を仮定することにより、一般化された Poisson 方程式が得られる。2 次元直交座標系の場合

$$\mathbf{A} = A_z \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\hat{\mathbf{e}}_z \text{ は } z \text{ 方向の単位ベクトル}) \quad (7)$$

から

$$H_x = \frac{\gamma}{\mu_0} \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial y} \quad H_y = -\frac{\gamma}{\mu_0} \frac{\partial A_z(x,y)}{\partial x} \quad (8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{e}}_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{e}}_z = \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \quad (9)$$

が得られるので、これを  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$  に代入すれば、一般化された Poisson 方程式として、

$$\frac{\partial}{\partial x} [\gamma(|\mathbf{B}(x,y)|) \frac{\partial}{\partial x} A_z(x,y)] + \frac{\partial}{\partial y} [\gamma(|\mathbf{B}(x,y)|) \frac{\partial}{\partial y} A_z(x,y)] = -\mu_0 J_z(x,y) \quad (10)$$

POISSON コードの基本的なアルゴリズムは位相幾何学的に一様な三角メッシュ点のポテンシャルを求めることである。位相幾何学的に一様ということは、メッシュ点が正三角形メッシュ (論理メッシュ) の点と 1 対 1 の対応が成立つことを意味する。磁場問題の物理的形状に合わせて論理メッシュ

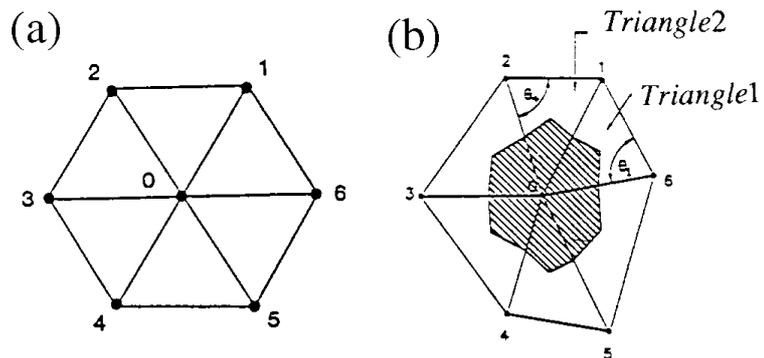


図1 (a) 論理メッシュと (b) 物理メッシュの関係

を歪めたものが物理メッシュである。この状態でも位相幾何学的には一様性が保たれている。各メッシュ点の周りには図 1 (a) の論理メッシュに示すように等距離にある最近接メッシュ点が 6 個ある。論理メッシュ点の番号により図 1 (b) の物理メッシュ点であ

る6個の最近接メッシュ点が識別される。図2の六角形の中心のベクトルポテンシャルを $A_0$ とし、最近接メッシュ点におけるポテンシャルを $A_i (i=1,2,\dots,6)$ とすれば Poisson 方程式が離散化され、

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^6 w_i A_i + \frac{\mu_0}{3} \sum_{i=1}^6 J_i a_i}{\sum_{i=1}^6 w_i} \quad (11)$$

ここで $a_i$ は各三角形の面積、結合係数 $w_i$ は次のように表される磁気抵抗率 $\gamma_i$ の線形関数である。

$$w_1 = \frac{1}{2} [\gamma_1 (|B|) \cos \theta_1 + \gamma_2 (|B|) \cos \theta_4], \quad w_2 = \frac{1}{2} [\gamma_2 (|B|) \cos \theta_3 + \gamma_3 (|B|) \cos \theta_6], \quad \text{etc.} \quad (12)$$

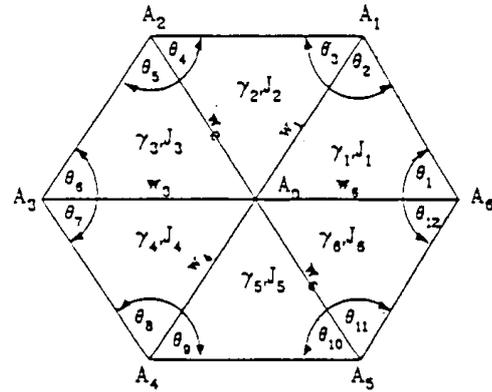


図2 三角メッシュにおける物理量の定義。  
 $A_i$ はメッシュ点 $i$ におけるベクトルポテンシャル、 $J_i$ は電流密度、 $\gamma_i$ は磁気抵抗率、 $w_i$ は結合係数

(11) 式を各メッシュ点に適用すれば1組の線形連立方程式が得られる。

### 1.2 差分方程式

2次元磁場問題における Ampere の法則はベクトルポテンシャルを用いて、次のように表現される。

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad \text{or} \quad \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_y \right) ds = \mu_0 \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (13)$$

ここで

$$\mathbf{B}(x, y) = \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_x + i \left( -\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{e}}_y \quad (14)$$

に複素共役な量として

$$\mathbf{B}^*(x, y) = \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_x - i \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_y \quad (15)$$

を考える。 $\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \hat{\mathbf{e}}_y$  を複素数  $a = a_x + ia_y$  として表現し、その複素共役を  $a^* = a_x - ia_y$  とすれば、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x - ia_y)(b_x + ib_y) = (a_x b_x + a_y b_y) + i(a_x b_y - a_y b_x)$$

すなわち2つのベクトルの内積と外積は複素数の演算で次のように表される。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \text{Re}\{a^* b\} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \text{Im}\{a^* b\}$$

ベクトル $ds$ は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot ds = \text{Re}\{B^* ds\} = \text{Re} \left\{ \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} + i \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) ds \right\} \quad (16)$$

ポテンシャル  $A_z$  は

$$A_z(x, y) = A_z(z, z^*) \quad (17)$$

$$z = x + iy, \quad z^* = x - iy \quad (18)$$

のように  $z$  と  $z^*$  の関数として表現できるので、

$$\frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial x} = \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial x} = \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z} + \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z^*} \quad (19)$$

$$\frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial y} = \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z^*} \frac{\partial z^*}{\partial y} = i \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z} - \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z^*} \quad (20)$$

すなわち、

$$\frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z^*} A_z(z, z^*) \quad (21)$$

$$\frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial y} = i \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z^*} A_z(z, z^*) \quad (22)$$

これらをまとめて、

$$B^*(x, y) = i \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z^*} + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z^*} A_z(z, z^*) = 2i \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z} \quad (23)$$

すなわち、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \text{Re}\{B^* ds\} = \text{Re} \left[ 2i \frac{\partial A_z(z, z^*)}{\partial z} ds \right] \quad (24)$$

図 1 (b) の三角メッシュの内部の点を考える。この六角形の代わりに図の斜線で示した 1 2 角形を定義する。この頂点は 1 つ飛びに隣り合う 3 角形の重心と辺の中点である。このようにして作られた 1 2 角形の 2 次メッシュラインで囲まれる面積は元の六角形の面積の 1/3 である。元の 3 角形の面積  $S$  は面積が  $a = S/3$  の 3 個の四辺形に分割される。

三角メッシュで作られる六角形におけるベクトルポテンシャルの計算に必要な記号を図 2 に示す。また、記号の簡単化のため、

$$A_i = A_z(z_i, z_i^*), \quad J_i = J_z(z_i, z_i^*) \quad (25)$$

とする。積分路は図 3 の隣合う三角形の共有する辺の中点と、三角形の重心を結ぶ 1 2 角形の辺に沿って行う。

複素数による図 4 の斜線部分の Ampere の法則は次式で与えられる。

$$\oint_C \gamma_2(|\mathbf{B}(\mathbf{r})|) \text{Re} \left[ 2i \frac{\partial A}{\partial z} ds \right] = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (26)$$

ここで積分路  $C$  は図 4 に示す  $p_0 p_1 p_2 p_3 p_0$ 、 $a_2$  は三角形 2 の面積、 $J_2$  は三角形 2 の電流密度である。

(26) の左辺を評価するために、三角形全体のポテンシャルを場所の関数として与える必要がある。すなわち、3 つの頂点におけるポテンシャルと座標から三角形内部のポテンシャルが場所に線形的に依存する式 (平面を表す方程式) を求める (図 5)。すなわち、

$$\begin{vmatrix} z - z_0 & z^* - z_0^* & A - A_0 \\ z_1 - z_0 & z_1^* - z_0^* & A_1 - A_0 \\ z_2 - z_0 & z_2^* - z_0^* & A_2 - A_0 \end{vmatrix} = 0$$

がポテンシャルの線形的変化を表す平面の方程式である。これを  $A$  について解けば、

$$A = A_0 + \frac{\{(z - z_0)(z_2^* - z_0^*) - (z_2 - z_0)(z^* - z_0^*)\} A_1}{(z_1 - z_0)(z_2^* - z_0^*) - (z_2 - z_0)(z_1^* - z_0^*)} + \frac{\{(z_1 - z_0)(z^* - z_0^*) - (z - z_0)(z_1^* - z_0^*)\} A_2}{(z_1 - z_0)(z_2^* - z_0^*) - (z_2 - z_0)(z_1^* - z_0^*)} \quad (27)$$

ただし、

$$A_1 = A_1 - A_0, \quad A_2 = A_2 - A_0 \quad (28)$$

$z_0$  と  $z_0^*$  を原点に選べば、

$$A = A_0 + \frac{A_1 z_2^* - A_2 z_1^*}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} z + \frac{A_2 z_1 - A_1 z_2}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} z^* \quad (29)$$

または、

$$A = A_0 + Cz - C^* z^* \quad (30)$$

ここで、

$$C = \frac{A_1 z_2^* - A_2 z_1^*}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*}, \quad C^* = \frac{A_1 z_2 - A_2 z_1}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} \quad (31)$$

である。この関係から

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{A_1 z_2^* - A_2 z_1^*}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} \quad (32)$$

これを (26) に代入して、

$$\circ_C \gamma_2 \operatorname{Re} 2i \frac{A_1 z_2^* - A_2 z_1^*}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} ds = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (33)$$

被積分項は  $z$  の関数ではなく、 $\gamma_2$  も三角形の中で一定であるため、積分の外に出せて、

$$\gamma_2 \operatorname{Re} 2i \frac{A_1 z_2^* - A_2 z_1^*}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} \circ_C ds = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (34)$$

あるメッシュ点の周りにこの積分を行えば、三角形の辺では隣合う三角形の積分方向が逆になるため、お互いにキャンセルし合い、12角形の辺の積分しか残らない。すなわち、積分で残る項は

$$\begin{aligned} \circ_C ds &= \frac{p_2}{p_1} ds + \frac{p_3}{p_2} ds = (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) \\ &= p_3 - p_1 = \frac{z_2 + z_0}{2} - \frac{z_1 + z_0}{2} = \frac{z_2 - z_1}{2} \end{aligned} \quad (35)$$

したがって、(34) は

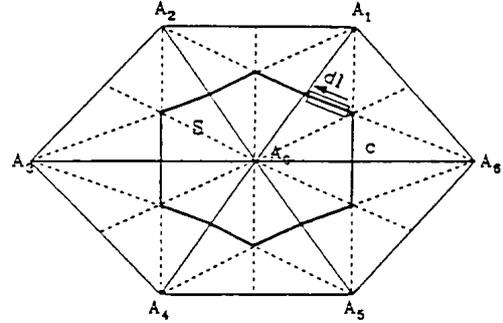


図3 12角形の辺に沿う積分路。

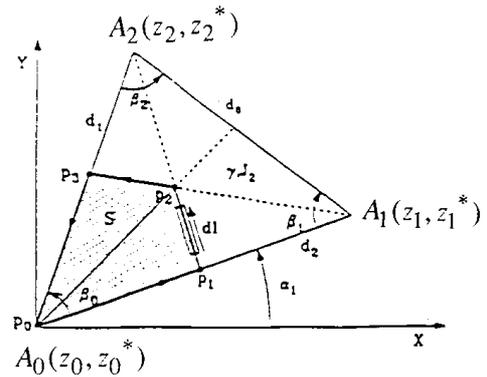


図4 Ampereの法則の経路積分における積分路。

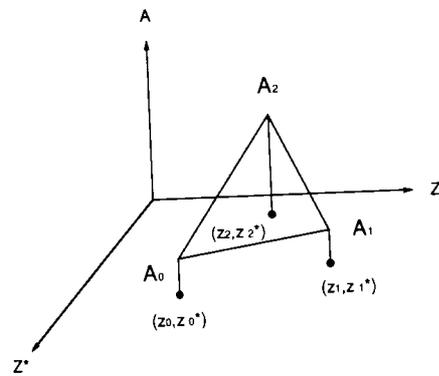


図5 三角メッシュ内の位置の線形関数としてベクトルポテンシャルを表す平面。

$$\gamma_2 \operatorname{Re} i \frac{(A_1 z_2^* - A_2 z_1^*)(z_2 - z_1)}{z_1 z_2^* - z_2 z_1^*} = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (36)$$

この式の計算は、

$$\begin{aligned} z_1 &= d_2 e^{i\alpha_1} & z_1^* &= d_2 e^{-i\alpha_1} \\ z_2 &= d_1 e^{i(\alpha_1 + \beta_0)} & z_2^* &= d_1 e^{-i(\alpha_1 + \beta_0)} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} z_1 z_2^* - z_2 z_1^* &= d_1 d_2 (e^{-i\beta_0} - e^{i\beta_0}) = -i 2 d_1 d_2 \sin \beta_0 \\ z_2 - z_1 &= d_1 e^{i(\alpha_1 + \beta_0)} - d_2 e^{i\alpha_1} = -d_0 \cos(\beta_1 - \alpha_1) + i d_0 \sin(\beta_1 - \alpha_1) = d_0 e^{i(\pi + \alpha_1 - \beta_1)} \\ z_1^* (z_2 - z_1) &= -d_0 d_2 e^{-i\beta_1} \\ z_2^* (z_2 - z_1) &= d_0 d_1 e^{i\beta_2} \end{aligned}$$

したがって、(36) は

$$\gamma_2 \operatorname{Re} - \frac{(A_1 d_0 d_1 e^{i\beta_2} + A_2 d_0 d_2 e^{-i\beta_1})}{2 d_1 d_2 \sin \beta_0} = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (37)$$

これより

$$-\gamma_2 \frac{A_1 d_0 \cos \beta_2}{2 d_2 \sin \beta_0} + \frac{A_2 d_0 \cos \beta_1}{2 d_1 \sin \beta_0} = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (38)$$

これに  $\frac{d_0}{\sin \beta_0} = \frac{d_1}{\sin \beta_1} = \frac{d_2}{\sin \beta_2}$  の関係を用いて、

$$-\frac{\gamma_2}{2} [A_1 \cot \beta_2 + A_2 \cot \beta_1] = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (39)$$

故に、

$$-\frac{\gamma_2}{2} [(A_1 - A_0) \cot \beta_2 + (A_2 - A_0) \cot \beta_1] = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (40)$$

整理して、

$$\frac{\gamma_2}{2} [A_0 (\cot \beta_1 + \cot \beta_2) - (A_1 \cot \beta_2 + A_2 \cot \beta_1)] = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (41)$$

図 2 のように  $\beta$  から  $\theta$  に角度を変更すれば、

$$\frac{\gamma_2}{2} [A_0 (\cot \theta_3 + \cot \theta_4) - (A_1 \cot \theta_4 + A_2 \cot \theta_3)] = \mu_0 J_2 \frac{a_2}{3} \quad (42)$$

が得られる。図 3 の積分路に対して、

$$\sum_{i=1}^6 (w_i A_0 - w_i A_i) = \frac{\mu_0}{3} \sum_{i=1}^6 J_i a_i \quad (43)$$

$$w_i = \frac{1}{2} (\gamma_i \cot \theta_{\text{MOD}(2i-1,12)} + \gamma_{\text{MOD}(i+1,6)} \cot \theta_{\text{MOD}(2i+2,12)}) \quad (44)$$

ここで、 $w_i$  は結合係数 (coupling coefficient) である。添え字の  $\text{MOD}(a,b)$  は  $a > b$  の場合、 $a$  を  $b$  で割ったときの余りを意味する。(43) を書き換えて、

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^6 w_i A_i + \frac{\mu_0}{3} \sum_{i=1}^6 J_i a_i}{\sum_{i=1}^6 w_i} \quad (45)$$

ここで  $\theta_1$  と  $\theta_4$  は図 1 (b) に示す角度でもある。このような方程式が各メッシュ点について得られる。これらは 1 組の線形連立方程式を構成する。 $\gamma_i$  は  $A_i$  の関数であるため、非線形問題を逐次過大緩和法 (SOR, Successive Over Relaxation) で解き、収束解が得られる

ように計算の途中で $\gamma_i$ を変化させる。ベクトルポテンシャルの収束解が得られたならば、これから磁束密度や磁場勾配が計算できる。

## 2. ハーモニックス解析

磁場のハーモニックス解析により電磁石ギャップ内の磁場の多極成分を求めることができる。ハーモニックス解析を行う座標（一般にギャップ中心点）を指定し、その点を中心とする半径 $r$ （鉄領域およびコイル領域を含まない半径）の円周上で解析を行う。ベクトルポテンシャルは複素関数 $F(z) = A(x,y) + iV(x,y)$ （ただし、 $z=x+iy$ ）の実数部分として与えられるので、 $F(z)$ を級数展開して、

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n / r_{norm}^n) z^n \quad (46)$$

ここで、 $r_{norm}$ は規格化半径である。

$$c_n = a_n + ib_n \quad (47)$$

$$z^n = u_n + iv_n \quad (48)$$

と置けば、ベクトルポテンシャルは

$$A(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n u_n - b_n v_n) / r_{norm}^n \quad (49)$$

$u_n$ と $v_n$ はハーモニック多項式と呼ばれるもので、表1に最初の10項を与える。

$u_n(x,y)$ は多極磁場成分のノーマル成分、 $v_n(x,y)$ はスキュー成分に相当する。 $a_n$ および $b_n$ を求めれば、それぞれの多極成分に分解できたことになる。指定した半径 $r$ を用いて、複素平面で極座標を用いて行う。

$$z = r e^{i\phi}, \quad c_n = |c_n| e^{i\alpha_n} \quad (50)$$

と置けば、

$$\begin{aligned} A(x,y) &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{r_{norm}^n} |c_n| e^{i\alpha_n} e^{in\phi} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{r_{norm}^n} |c_n| \cos(\alpha_n + n\phi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{r_{norm}^n} |c_n| \{ \cos\alpha_n \cos(n\phi) - \sin\alpha_n \sin(n\phi) \} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r}{r_{norm}^n} \{ a_n \cos(n\phi) - b_n \sin(n\phi) \} \end{aligned} \quad (51)$$

これは変数 $\phi$ で表したFourier級数である。すなわち、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(r,\phi) d\phi, \quad b_0 = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \frac{r_{norm}^n}{r} \int_0^{2\pi} A(r,\phi) \cos(n\phi) d\phi \end{aligned} \quad (52)$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \frac{r_{norm}}{r} \int_0^{2\pi} A(r, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi$$

積分には鉄やコイルを含んではいけない。何故なら、複素ポテンシャル  $F(z)$  の仮定に反するからである。

電磁石に対称性のある場合は、円を一周積分しなくてもよい。 $\varphi = \phi_z$  から  $\varphi = \phi$  までの積分で対称性が得られるならば、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\phi - \phi_z} \int_{\phi_z}^{\phi} A(r, \varphi) d\varphi, \quad b_0 = 0 \\ a_n &= \frac{2}{\phi - \phi_z} \frac{r_{norm}}{r} \int_{\phi_z}^{\phi} A(r, \varphi) \cos(n\varphi) d\varphi \\ b_n &= -\frac{2}{\phi - \phi_z} \frac{r_{norm}}{r} \int_{\phi_z}^{\phi} A(r, \varphi) \sin(n\varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (53)$$

Fourier 係数は上の式で数値計算される。このときの積分の角度ステップは

$$\varphi = \frac{\phi - \phi_z}{N_{pic} - 1} \quad (54)$$

である。ここで  $N_{pic}$  は半径  $r$  の円弧を等間隔に分割する点の数である。分割点でベクトルポテンシャルが内挿される。

表 1 ハーモニック多項式 (直交座標の場合)

n	$u_n(x, y)$
1	x
2	$x^2 - y^2$
3	$x^3 - 3xy^2$
4	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4$
5	$x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$
6	$x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6$
7	$x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6$
8	$x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8$
9	$x^9 - 36x^7y^2 + 126x^5y^4 - 84x^3y^6 + 9xy^8$
10	$x^{10} - 45x^8y^2 + 210x^6y^4 - 210x^4y^6 + 45x^2y^8 - y^{10}$
n	$v_n(x, y)$
1	y
2	2xy
3	$3x^2y - y^3$
4	$4x^3y - 4xy^3$
5	$5x^4y - 10x^2y^3 + y^5$
6	$6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5$
7	$7x^6y - 35x^4y^3 + 21x^2y^5 - y^7$
8	$8x^7y - 56x^5y^3 + 56x^3y^5 - 8xy^7$
9	$9x^8y - 84x^6y^3 + 126x^4y^5 - 36x^2y^7 + y^9$
10	$10x^9y - 120x^7y^3 + 252x^5y^5 - 120x^3y^7 + 10xy^9$

### 3. 境界条件

2次元の磁場問題に現れる2階の偏微分方程式の解は境界条件を設けることによって一義的に決定される。しかし、境界条件を任意に設定することはできない。許される境界条件は微分方程式のタイプによって決まる。ベクトルポテンシャルを扱う Poisson 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \gamma(A) \frac{\partial A}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \gamma(A) \frac{\partial A}{\partial y} \right\} + \mu_0 J(x, y) = 0 \quad (55)$$

で与えられる楕円型微分方程式である。この方程式の一般的な境界条件は

$$aA + b \left\{ n_x \frac{\partial A}{\partial x} + n_y \frac{\partial A}{\partial y} \right\} = c \quad (56)$$

である。a, b, c は境界上の座標の関数である。 $n_x$  と  $n_y$  は境界から内側に向かう単位法線ベクトルの各成分である。c は通常はゼロであるが、b と c は境界上でどちらかがゼロである。通常使用される境界条件として、

- ・ Dirichlet - 境界上で  $A(x, y)$  を指定
- ・ Neumann - 境界上で  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A}$  を指定

境界における単位法線ベクトル ( $\hat{\mathbf{n}} = n_x \hat{\mathbf{e}}_x + n_y \hat{\mathbf{e}}_y = -t_y \hat{\mathbf{e}}_x + t_x \hat{\mathbf{e}}_y$ ) と接線方向の単位ベクトル ( $\hat{\mathbf{t}} = t_x \hat{\mathbf{e}}_x + t_y \hat{\mathbf{e}}_y = n_y \hat{\mathbf{e}}_x - n_x \hat{\mathbf{e}}_y$ ) から、Dirichlet 条件に対して、 $A(x, y) = \text{一定}$  であるので、境界の接線方向の磁場成分はゼロである。

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{A} = n_y \frac{\partial A}{\partial x} - n_x \frac{\partial A}{\partial y} = -(n_x B_x + n_y B_y) = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (57)$$

すなわち、磁場は境界に平行である。

Neumann 条件に対して、 $A(x, y)$  の法線方向の微分はゼロである。

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{A} = n_x \frac{\partial A}{\partial x} + n_y \frac{\partial A}{\partial y} = t_x B_x + t_y B_y = \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (58)$$

すなわち、磁場は境界に垂直である。

### 4 三角メッシュの発生

問題領域全体に不規則なメッシュを発生するため、トポロジカルには正三角形の配列に等しく(論理メッシュ)、各サブ領域(鉄、コイル、空隙など)が実際の形状と配置をもつように三角メッシュを変形させて張り詰める(物理メッシュ)。外部境界に沿う三角メッシュは直線を決めるために2つの頂点を境界上におく。問題領域内部のどのメッシュ点も6個の三角形の頂点で共有される。どのような多角形でも三角メッシュで埋めることができるので、境界やサブ領域の境界はメッシュライン上に乗せることができる。磁束密度が大きいところはメッシュを細かくするよう工夫する必要がある。このように

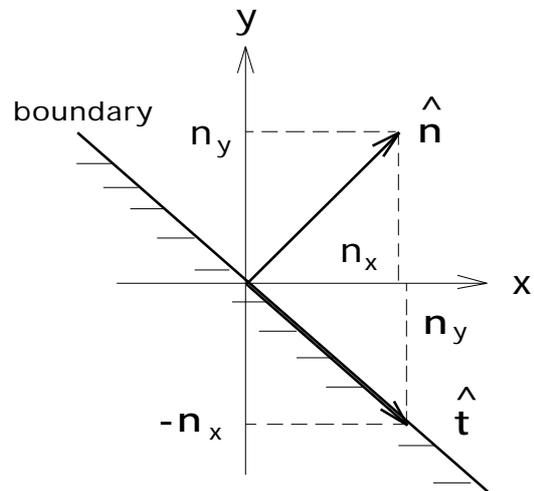


図6 境界における単位法線ベクトルと単位接線ベクトル。

して得られる論理メッシュと物理メッシュの対応を図7に示す。

正三角形のメッシュ座標上で、メッシュラインに沿って、問題領域とサブ領域の境界を定義する。境界上のメッシュ点に物理座標（直交座標系では  $x, y$  座標、円柱座標系では  $r, z$  座標）を定義する。定義された座標が物理座標系で正しい位置に来るように三角メッシュを変形させる。この方法による三角メッシュの発生の理論的根拠を説明するため、図8に示す正三角形メッシュ座標を考える。お互いに60度で交差する2組の直線群  $\chi(x, y)$  と  $\psi(x, y)$  は Laplace 方程式を満足する。

$$\nabla^2 \chi(x, y) = 0 \quad (59)$$

$$\nabla^2 \psi(x, y) = 0 \quad (60)$$

この方程式を解くことにより、 $\chi = \text{一定}$ 、 $\psi = \text{一定}$  の等ポテンシャル線および  $\chi$  と  $\psi$  の交点を連ねる第3の直線群（点線）が得られ、必要な三角メッシュが形成される。これらの方程式は  $x, y$  を  $\chi$  と  $\psi$  の関数として書き換えることにより数値的に解くことができる。

$$u = \chi(x, y) \quad (61)$$

$$v = \psi(x, y) \quad (62)$$

これらの逆関数が存在するものとして、 $x, y$  を  $\chi$  と  $\psi$  の関数として求める。

$$x = f(u, v) \quad (63)$$

$$y = g(u, v) \quad (64)$$

とすれば、

$$x = f(\chi(x, y), \psi(x, y)) \quad (65)$$

$$y = g(\chi(x, y), \psi(x, y)) \quad (66)$$

が得られる。  $u, v$  に関して微分すれば、

$$1 = f_\chi \chi_x + f_\psi \psi_x \quad (67)$$

$$0 = f_\chi \chi_y + f_\psi \psi_y \quad (68)$$

$$0 = g_\chi \chi_x + g_\psi \psi_x \quad (69)$$

$$1 = g_\chi \chi_y + g_\psi \psi_y \quad (70)$$

これより、  $f_\chi, g_\chi, f_\psi, g_\psi$  として、

$$\chi_x = -\frac{1}{J} \psi_y, \psi_x = \frac{1}{J} y_\chi, \chi_y = \frac{1}{J} x_\psi, \psi_y = -\frac{1}{J} x_\chi \quad (71)$$

ここで  $J = x_\psi y_\chi - x_\chi y_\psi$ （ヤコビアン）である。

さらに (67) (70) を  $x, y$  で偏微分して (71) の関係を代入すれば、次の逆変換 Laplace 方程式が得られる。

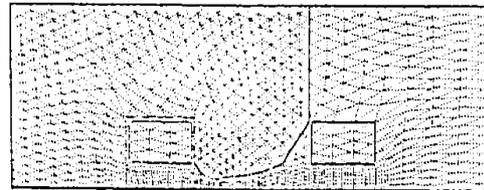
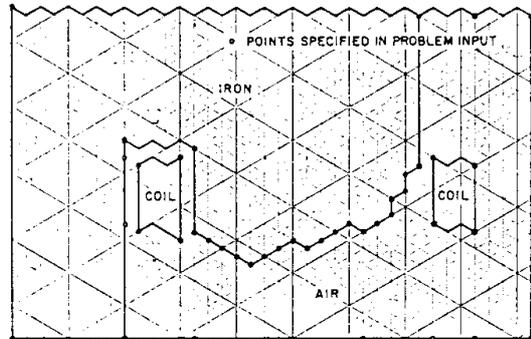
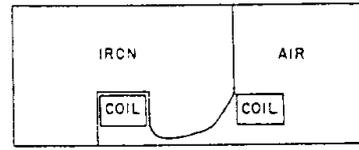


図7 論理メッシュと物理メッシュの対応。

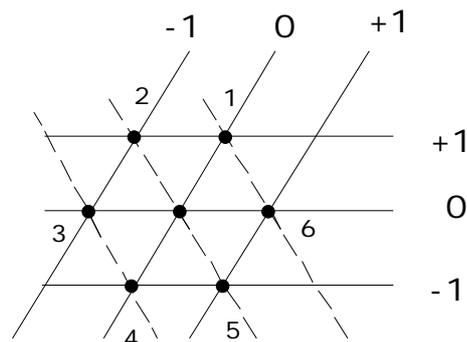


図8 ( , ) 平面における6個の最近接三角形と頂点(点1~6)。

$$\alpha x_{\chi\chi} - 2\beta x_{\chi\psi} + \gamma x_{\psi\psi} = 0 \quad (72)$$

$$\alpha y_{\chi\chi} - 2\beta y_{\chi\psi} + \gamma y_{\psi\psi} = 0 \quad (73)$$

が得られる。ここで

$$\alpha = x_{\psi}^2 + y_{\psi}^2, \beta = x_{\chi}x_{\psi} + y_{\chi}y_{\psi}, \gamma = x_{\chi}^2 + y_{\chi}^2 \quad (74)$$

である。(72) (74) の偏微分を有限差分方程式 (FDE's) に直す。このためには、 $x, y$  を三角メッシュの6角形の中心にある頂点  $(x, y)$  の周りに  $\chi, \psi$  で展開する。

$$x_i = x + x_{\chi}\chi + x_{\psi}\psi + \frac{1}{2}x_{\chi\chi}\chi^2 + x_{\chi\psi}\chi\psi + \frac{1}{2}x_{\psi\psi}\psi^2 + O(\chi^3) \quad (75)$$

$$y_i = y + y_{\chi}\chi + y_{\psi}\psi + \frac{1}{2}y_{\chi\chi}\chi^2 + y_{\chi\psi}\chi\psi + \frac{1}{2}y_{\psi\psi}\psi^2 + O(\psi^3) \quad (76)$$

ただし  $i = 1, 2, \dots, 6$  である。また、6角形の各頂点の  $\chi$  と  $\psi$  の隣合う値は1ずつ異なるので、 $\chi, \psi = -1, 0, 1$  である。頂点の番号  $i = 1, 2, \dots, 6$  に合わせて (75), (76) の  $\chi, \psi$  の値を選択する。

$$\begin{aligned} x_1 &= x + x_{\chi} + \frac{1}{2}x_{\chi\chi} \\ x_2 &= x + x_{\chi} - x_{\psi} + \frac{1}{2}x_{\chi\chi} - x_{\chi\psi} + \frac{1}{2}x_{\psi\psi} \\ x_3 &= x - x_{\psi} + \frac{1}{2}x_{\psi\psi} \\ x_4 &= x - x_{\chi} + \frac{1}{2}x_{\chi\chi} \\ x_5 &= x - x_{\chi} + x_{\psi} + \frac{1}{2}x_{\chi\chi} - x_{\chi\psi} + \frac{1}{2}x_{\psi\psi} \\ x_6 &= x + x_{\psi} + \frac{1}{2}x_{\psi\psi} \end{aligned}$$

これらの式からつぎの関係が得られる。

$$\begin{aligned} x_{\chi} &= \frac{1}{6}\{(x_2 + 2x_1 + x_6) - (x_3 + 2x_4 + x_5)\} \\ x_{\psi} &= \frac{1}{6}\{(x_1 + 2x_6 + x_5) - (x_2 + 2x_3 + x_4)\} \\ x_{\chi\chi} &= x_1 - 2x + x_4 \\ x_{\chi\psi} &= \frac{1}{2}\{(x_1 + x_6 + x_3 + x_4) - (x_2 + x_5 + 2x)\} \\ x_{\psi\psi} &= x_6 - 2x + x_3 \end{aligned}$$

$y$  についても同様の式が得られる。これらの式を (72) (74) に代入すれば、

$$\sum_{i=1}^6 c_i(x_i - x) = 0, \quad \sum_{i=1}^6 c_i(y_i - y) = 0 \quad (77)$$

ここで、

$$c_1 = c_4 = \alpha - \beta \quad c_2 = c_5 = \beta \quad c_3 = c_6 = \gamma - \beta \quad (78)$$

である。(77) を SOR 法で数値的に解けば問題領域全体の物理的メッシュ点座標が得られる。結合係数  $c_i$  は  $(x, y)$  には依存しないで、 $(x_i, y_i)$  にのみに依存する。すなわち、

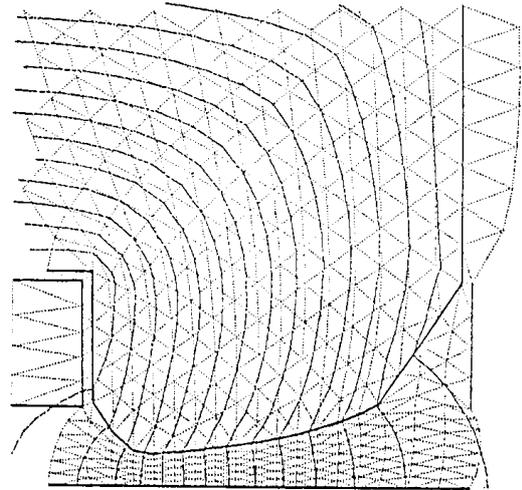
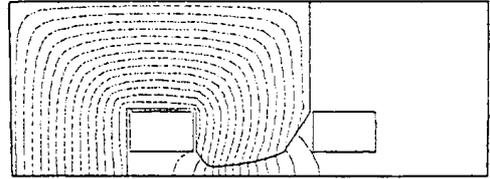


図9 CPSの機能結合型電磁石の磁力線。

$$x = \frac{\sum_i c_i x_i}{\sum_i c_i} \quad \text{および} \quad y = \frac{\sum_i c_i y_i}{\sum_i c_i} \quad (79)$$

を連続的に評価することになる。(79)を逐次過大緩和法で数値的に解けば問題領域全体の物理的メッシュ点座標が得られる。図7のメッシュで計算されたCPSの機能結合型電磁石の磁力線の様子を図9に示す。

## 5. 異方性のある静磁場問題

磁気異方性 (magnetic anisotropy) は磁化の方向が磁場の方向と異なる現象である。これは磁性体の結晶の方向によって磁化されやすい方向 (磁化容易軸) とこれと直交する磁化されにくい方向 (磁化困難軸) があるためである。ケイ素鋼板では、一方向に大きな透磁率を得るため磁化容易軸を揃えた所謂 Goss 組織を有する方向性ケイ素鋼板がある。このような鋼板を採用する電磁石では異方性の取り扱いが必要である。

逐次過大緩和法によるプログラムでは収束が思わしくないので、直接解法による PANDIRA コードを用いる。磁気抵抗率テンソル  $\gamma$  を導入することにより、

$$\mathbf{H} = \gamma \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{H}_c \quad (80)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\parallel} + \mathbf{H} \quad (81)$$

$$\mathbf{H}_{\parallel} = \gamma_{\parallel} \mathbf{B}_{\parallel} / \mu_0 - \mathbf{H}_c \quad (82)$$

$$\mathbf{H} = \gamma \mathbf{B} / \mu_0 \quad (83)$$

ここで、 $\mathbf{H}_{\parallel}$ 、 $\mathbf{B}_{\parallel}$ 、 $\gamma_{\parallel}$  は容易軸に平行な磁場、磁束密度、磁気抵抗率である。また、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\gamma$  は困難軸方向の磁場、磁束密度、磁気抵抗率である。容易軸方向に保持力  $\mathbf{H}_c$  と残留磁場  $\mathbf{B}_r$  が現れる。電磁石において、ある方向に容易軸を揃えた問題では、磁場  $\mathbf{B}$  は2つの座標系で

$$\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{e}}_x + B_y \hat{\mathbf{e}}_y = B_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + B \hat{\mathbf{e}} \quad (84)$$

と表され、単位ベクトルの座標変換 (図10) として、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} &= \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin\phi \hat{\mathbf{e}}_y \\ \hat{\mathbf{e}} &= -\sin\phi \hat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_y \end{aligned} \quad \text{または} \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_x &= \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} - \sin\phi \hat{\mathbf{e}} \\ \hat{\mathbf{e}}_y &= \sin\phi \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + \cos\phi \hat{\mathbf{e}} \end{aligned} \quad (85)$$

を用いれば、

$$\mathbf{H} = (\gamma_{\parallel} B_{\parallel} / \mu_0 - H_c) \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + (\gamma B / \mu_0) \hat{\mathbf{e}} = H_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + H \hat{\mathbf{e}} \quad (86)$$

これに座標変換を行えば、

$$\mathbf{H} = (H_{\parallel} \cos\phi - H \sin\phi) \hat{\mathbf{e}}_x + (H_{\parallel} \sin\phi + H \cos\phi) \hat{\mathbf{e}}_y \quad (87)$$

また、逆変換により  $\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{e}}_x + B_y \hat{\mathbf{e}}_y$  から

$$\mathbf{B} = (B_x \cos\phi + B_y \sin\phi) \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + (-B_x \sin\phi + B_y \cos\phi) \hat{\mathbf{e}} \quad (88)$$

$H_x$ 、 $H_y$  をそれぞれ  $B_x$  と  $B_y$  で表現すれば、

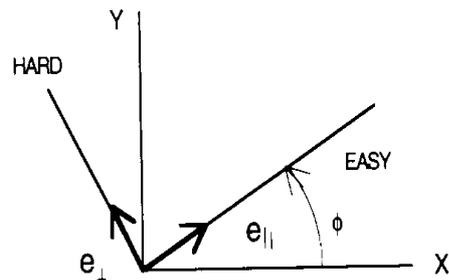


図10 単位ベクトルの座標変換。

$$H_x = (\gamma_{\parallel} \cos^2 \phi + \gamma \sin^2 \phi) B_x / \mu_0 + \sin 2\phi (\gamma_{\parallel} - \gamma) B_y / (2\mu_0) - H_c \cos \phi \quad (89)$$

$$H_y = \sin 2\phi (\gamma_{\parallel} - \gamma) B_x / (2\mu_0) + (\gamma_{\parallel} \sin^2 \phi + \gamma \cos^2 \phi) B_y / \mu_0 - H_c \sin \phi \quad (90)$$

書き換えて、

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \gamma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_{cx} \\ H_{cy} \end{pmatrix} \quad (91)$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \gamma_{xx} &= \gamma_{\parallel} \cos^2 \phi + \gamma \sin^2 \phi, & \gamma_{xy} &= \sin 2\phi (\gamma_{\parallel} - \gamma) / 2, & \gamma_{yy} &= \gamma_{\parallel} \sin^2 \phi + \gamma \cos^2 \phi \\ H_{cx} &= H_c \cos \phi, & H_{cy} &= H_c \sin \phi \end{aligned} \quad (92)$$

である。

## 6 容易軸が場所の関数である場合

磁化方向の異なる永久磁石を組み合わせる場合、容易軸を場所の関数として表現する。図11の磁石は永久磁石の楔型ブロックを組み合わせたものである。円の中心の周りの角度の関数として磁化方向が決まる場合、PANDIRAコードで扱うことができる。円の中心が座標系の中心である必要はない。容易軸の方向は図12のように3つのパラメータ( $X_A, Y_A, \phi_A$ )で決定される。このような単位ベクトル( $\hat{e}_{\xi}, \hat{e}_{\eta}$ )をもつ座標系を考えれば、この座標系で $\hat{e}_{\xi}$ と角度 $\phi_A$ をなす方向が容易軸方向である。したがって、

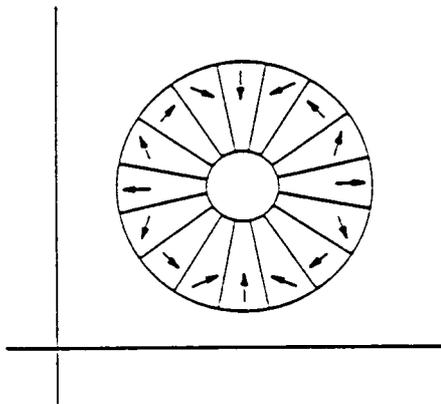


図11 磁化方向の異なる永久磁石ブロックの組み合わせた磁石。

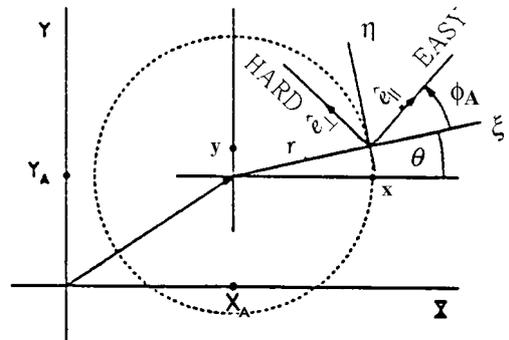


図12 座標系の中心が円の中心と異なる異方性材料のパラメータ。

$$(\hat{e}_{\xi}, \hat{e}_{\eta}) \quad (\hat{e}_{\parallel}, \hat{e}_{\perp})$$

の変換は(85)に対応する。また、 $(\hat{e}_{\xi}, \hat{e}_{\eta}) \quad (\hat{e}_x, \hat{e}_y)$ の変換は通常の変換

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_{\xi} \\ \hat{e}_{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix} \quad (93)$$

である。また、 $(\hat{e}_{\parallel}, \hat{e}_{\perp}) \quad (\hat{e}_x, \hat{e}_y)$ の座標変換は

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_{\parallel} \\ \hat{e}_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_A + \theta) & \sin(\phi_A + \theta) \\ -\sin(\phi_A + \theta) & \cos(\phi_A + \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{pmatrix} \quad (94)$$

である。図 1 2 の座標で考える場合、(91)における磁気抵抗テンソル $\gamma$ と保持力 $H_c$ の角度 $\phi$ を $\phi_A + \theta$ に置き換える必要がある。永久磁石の場合、

$$\gamma_{\parallel} = \mu_0 H_c / B_r, \quad \gamma = \mu_0 H / B \quad (95)$$

である。Ampere の法則を永久磁石の三角メッシュに適用すれば、

$$\oint_c [\gamma_{\parallel} \times \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{H}_c] ds = \mu_0 \mathbf{J} da \quad (96)$$

直交座標系で  $\mathbf{A} = 0$ なる Coulomb ゲージを選べば、 $\mathbf{A} = A_z \hat{e}_z$ 、 $J_x = J_y = 0$ となる。従って、解くべき方程式は(91)により次のようになる。

$$\oint_c \left\{ (\gamma_{xx} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \gamma_{xy} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \mu_0 H_{cx}) dx + (\gamma_{xy} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \gamma_{yy} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \mu_0 H_{cy}) dy \right\} = \mu_0 A_z J_z dx dy \quad (97)$$

微小領域では $\gamma$ と $J_z$ は一定で、ベクトルポテンシャル

$$A_z = -b_y x + b_x y + a_0 \quad (98)$$

は $x$ と $y$ の線形関数で近似できるので、

$$(\gamma_{xx} \circ dx + \gamma_{xy} \circ dy) b_x + (\gamma_{xy} \circ dx + \gamma_{yy} \circ dy) b_y = \mu_0 \{ J_z A - H_{cx} \circ dx - H_{cy} \circ dy \} \quad (99)$$

のように簡単化できる。 $\gamma$ は $B_x$ と $B_y$ の非線形関数であり、繰り返し直接解法で解くことができる。(99)の $A$ は三角メッシュの面積、 $b_x, b_y$ はベクトルポテンシャルの微分から得られる磁場成分である。

## 7. 磁場に蓄積されるエネルギー

電磁場中の体積 $V$ に蓄えられたエネルギーは

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv \quad (100)$$

ここでは静磁場問題だけを考察するので $\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ 項はゼロである。 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を代入して、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_V \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{H} dv = \frac{1}{2} \int_V [ (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) ] dv \quad (101)$$

ここで Gauss の定理と  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ により、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \oint_A (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} + \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dv \quad (102)$$

図 1 3 に示す直交座標で 2 次元の任意の体積 ( $z$  方向には長さ $\ell$ で、同じ断面形状と正面と後面の断面積は $a_1$ 、側面の面積は $a_2$ である)

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \oint_{a_2} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} + \frac{\ell}{2} \int_{a_1} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) da \quad (103)$$

リボン状の側面の面積は

$$d\mathbf{a} = ds \times d\ell \hat{z} \quad (104)$$

ベクトル $ds$ は面積 $a_1$ を反時計周りに取り囲む曲線 $C$ に沿う長さの要素である。

$$\varepsilon = \frac{\ell}{2} \oint_C (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot (ds \times \hat{z}) + \int_{a_1} A_z J_z da \quad (105)$$

右辺第 1 項は

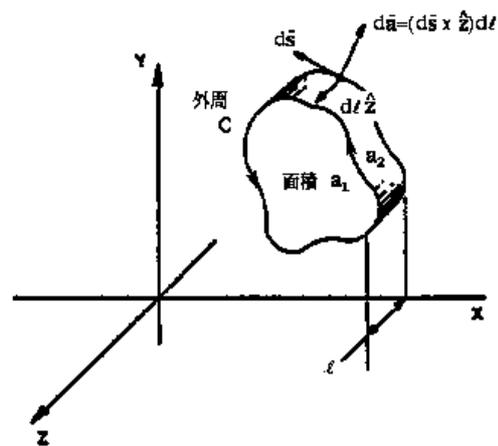


図 1 3 2 次元問題における任意の体積要素。断面積 $a_1$ で側面の面積は $a_2$ 。

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot (d\mathbf{s} \times \hat{\mathbf{z}}) &= (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \times d\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{z}} = (d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{z}}) - (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s})\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}} \\
&= -(\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s})\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{z}} = -A_z \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s}
\end{aligned} \tag{106}$$

したがって、

$$\varepsilon = \frac{\ell}{2} \left[ -\oint_C A_z \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} + \int_{a_1} A_z J_z da \right] = \frac{\ell}{2} \left[ -\oint_C A_z H_x dx - \oint_C A_z H_y dy + \int_{a_1} A_z J_z dx dy \right] \tag{107}$$

ところが、(103) の

$$\oint_{a_2} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_0 d\ell \oint_C d\mathbf{s} (\mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \tag{108}$$

において、磁場問題の境界条件は純 Dirichlet ( $A_z=0$ ) または純 Neumann ( $\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{t}}=0$ ) であることから、この積分はゼロになる。メッシュ要素間の境界ではお互いの積分方向が逆になるため消去し合う。そのため問題領域の外周部の積分が残るが、Dirichlet 境界または Neumann の条件から積分への寄与はない。したがって、単位長さ当たりのエネルギーは

$$\varepsilon / \ell = \frac{J}{2} \left[ \oint_{coil} A_z da \right] \tag{109}$$

である。すなわち、電流が存在するコイル領域におけるベクトルポテンシャルの積分の  $J/2$  倍である。永久磁石の蓄積エネルギーは、この場合は電流密度は存在しないが、永久磁石を取り囲む面の積分（全領域の境界積分ではない）で与えられる。

円柱座標系（回転対称）の場合は、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{a_2} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} + \pi \int_{a_1} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}) r dr dz \tag{110}$$

$$d\mathbf{a} = r d\theta ds \hat{\mathbf{n}} = r d\theta \hat{\theta} \times d\mathbf{s} \tag{111}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\theta} \times d\mathbf{s} &= -(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \times d\mathbf{s} \cdot \hat{\theta} = (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s})\mathbf{A} \cdot \hat{\theta} - (d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{H} \cdot \hat{\theta}) \\
&= (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{s})\mathbf{A} \cdot \hat{\theta} = A_\theta H_r dr + A_\theta H_z dz
\end{aligned} \tag{112}$$

したがって、

$$\varepsilon = \pi \oint_C (A_\theta H_r r dr + A_\theta H_z r dz) + \pi \int_{a_1} (J_\theta A_\theta) r dr dz \tag{113}$$

である。直交座標の場合の議論と同じく、全領域の境界条件から第 1 項の積分の寄与はなくなるので、

$$\varepsilon = \pi \int_{a_1} (J_\theta A_\theta) r dr dz \tag{114}$$

である。

## 第10章 磁場計算コードの実際

1962年にBlewettは著書"Particle Accelerator"の中で"The day appears not far distant when a magnet design can be completed without approximation by purely computational techniques."と述べている。高エネルギー物理学研究所（現高エネルギー加速器研究機構）の最初の加速器である陽子シンクロトロン（KEK-PS）の電磁石設計が始まったのは、昭和39年（1964年）頃である。このときはまだ磁場計算プログラムはLBLやCERNにおいて開発途中であり、計算に代わる実験的方法として電気抵抗を正方形メッシュ状に接続して電位分布から機能結合型の磁極形状を決める作業が実施された。しかし、この方法では鉄の飽和特性を考慮することが困難で、最終的には実物大モデルを製作して磁極形状を決めなければならなかった。電磁石の場合、実物大であることが重要で、予算の都合で小型モデルに置き換えて検討することは多くの場合不正確であり、危険である。

"SIBYL"、"LINDA"、"TRIM"などの2次元計算コードが日本に導入されたのは昭和41年（1966年）のことである。実測値に基づく鉄の飽和を考慮した磁場を数値的に扱うため、計算の信頼性は非常に高く、高工研のシンクロトロンの偏向用および収束用電磁石は"LINDA"を用いて設計された。昭和42～45年（1967～1970年）のことである。このときはまだ2次元計算であったが、Blewettの予言から5年後のことである。日本国内で初めて数値計算による電磁石の設計ということで、慎重を期して電磁石の量産を始める前に時間を置いて2台を試作し、磁場測定で性能が確認できたならこの試作品を量産台数に含めることとした。計算では予期できない僅かの不一致があったものの、幸いにも加速器の性能の上で問題になる程度ではなかった。この不一致は採用した鉄（方向性鋼板）の特性によるもので、初期の計算コードでは鉄の磁気特性の方向依存性が正確には考慮できなかったことによる。この方向依存性は鋼板の製造過程で圧延方向に優れた磁気特性が現れることを利用して製造された鋼板に現れる。圧延方向に最も優れた磁気特性が得られ、圧延方向を0度として角度が増加するにつれて特性が下がり、約55度方向でもっとも悪い。このような方向性鋼板で電磁石を製作した場合、磁束の向きは鉄心の場所によって様々な角度で鋼板を横切るの、それぞれの角度に応じた磁気特性を反映させなければならない。

世界的に見て、KEK-PSの偏向および収束電磁石は方向性鋼板を採用した第1号である。磁極部分の磁束の方向に鋼板の圧延方向を選ぶことによって高磁場特性が改善される。方向性鋼板を初めてシンクロトロンに採用するという外国からの助言や警告もあったが、素粒子研究所準備室およびKEKにおける数年にわたる電磁石の開発研究の成果を伝えたところ、その後は以前とは逆に激励されることになった。磁場計算コードに方向依存性を考慮するルーチンを追加したのもこの頃のことであった。

### 1. 2次元磁場計算コード

コンピュータの環境もKEK-PS時代から大いに変化し、以前は大型コンピュータの領域であった磁場数値計算も現在ではワークステーションやパソコンで実行可能である。

大型コンピュータでは不便であった可視化技術は、この種の計算にとっては非常に重要で、計算結果のグラフ化や彩色表示はワークステーションやパソコンの得意とする領域である。シンクロトロン電磁石は多くの場合そのギャップ寸法に比べて長さが長いので、2次元的な計算で十分である。3次元磁場計算の場合でも記憶容量や計算時間の制約からメッシュサイズが制限されて十分精度のある結果が得られないので、磁場測定は不可欠である。磁場測定結果はシンクロトロンの運転パラメータに反映され、ビームのエネルギーに応じたそれぞれの励磁電流が決められる。また、基本電磁石である偏向および収束電磁石の磁場測定から補正電磁石に必要な強さが推定できる。

磁場計算には磁場計算アルゴリズムの理解が必要である。その基礎になる方程式は電磁気学のMaxwell方程式から導かれるPoisson方程式である。第9章で扱った磁場計算の理論的基礎がそれである。

現在よく利用される2次元磁場計算コードは"POISSON"であるが、以前は"LINDA"や"TRIM"が汎用的に利用されていた。研究機関独自の"MARE" (CERN)、"GRACY" (BNL)、"NUTCRACKER" (SLAC)、"GFUN" (Rutherford)などもある。

"POISSON"は"TRIM"から発展したもので、Poisson方程式を三角メッシュ上で離散化(差分方程式)したものである。これに対し、"LINDA"("SIBYL"が発展したもの)は四角格子のメッシュによる差分方程式を扱っている。四角メッシュはその形状を自由に変更することができないので、磁極の複雑な曲線を近似する精度が足りない。ところが、三角メッシュの場合はメッシュ点の移動により隣り合う三角形を変形させることが容易であるため、磁極形状を正確に表現できる。

シンクロトロン電磁石の設計には差分方程式による計算コードが主流であるが、もう一つの主流として有限要素法によるものもある。三角メッシュを扱う"POISSON"や"TRIM"を有限要素法として紹介している教科書があるが、これは間違いである。三角メッシュ以外のメッシュも可能であり、その変形も自由であるため、"ANSYS"のような構造解析にも磁場解析にも利用できる汎用プログラムがある。有限要素法はもともと構造解析分野で発展してきた手法であるが、計算の進行に応じて必要ならばメッシュをさらに細分化してサブメッシュを作り、精度を上げながら計算を続行するような芸当も可能である。これは有限要素法の計算アルゴリズムが比較的簡単であることによる。

## 2. 2次元差分法による計算例(常伝導電磁石)

KEK-PSは図1に示す磁気特性の方向性ケイ素鋼板を使用して製作された。

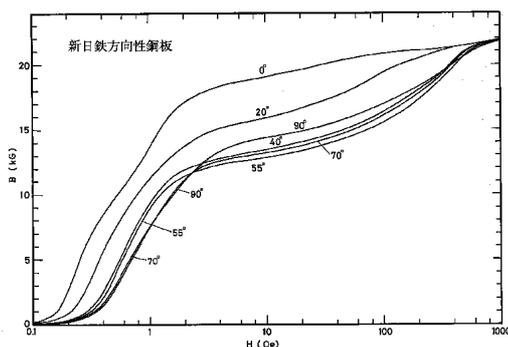


図1 新日鉄方向性ケイ素鋼板の磁気特性。

図1は圧延方向が0度、直角方向が90度である。磁界の強さによって悪い方向が入れ替わるが概ね55度方向に最も悪い特性を示す。この図を透磁率の逆数を角度の関数で表したものが図2である。

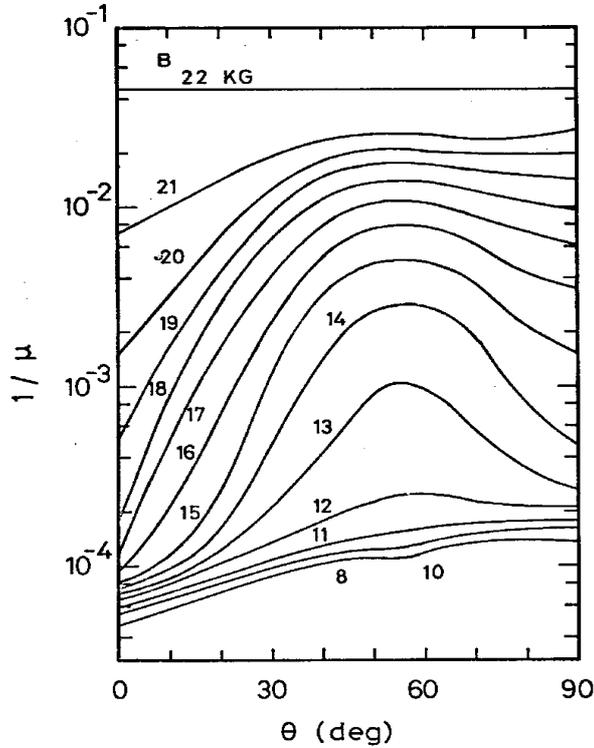


図2 磁束密度をパラメータとして透磁率 $\mu$ の逆数を角度の関数で表した。 $1/\mu$ が小さいほど特性が良い。

1) 偏向電磁石

図3、図4はそれぞれLINDAによって形状および磁極の詳細を決めたKEK-PSの偏向電磁石である。

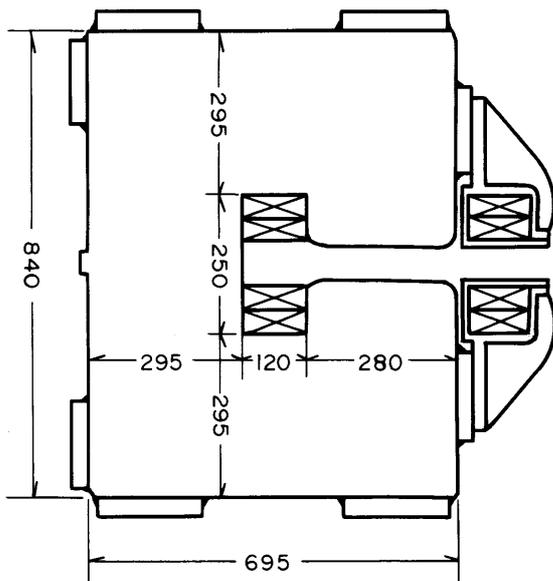


図3 KEK-PS偏向電磁石の断面。

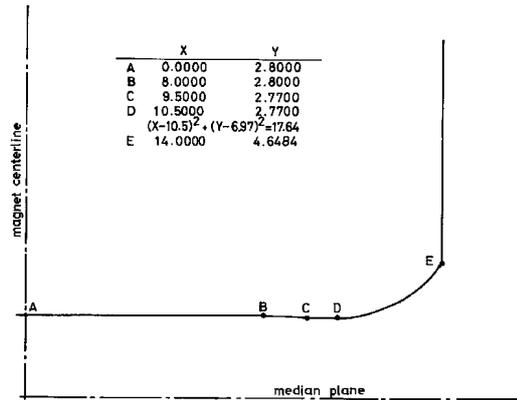


図4 KEK-PS 偏向電磁石の磁極形状、左右対称。

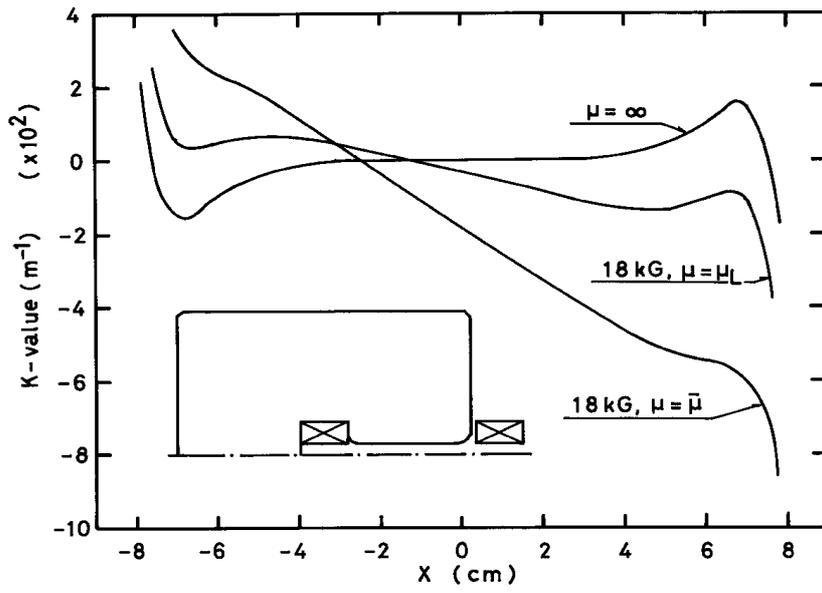


図5 透磁率の相違による磁場分布への影響。中心磁場が18 kGのとき鉄の飽和の違いにより磁場勾配が大きく異なる。

磁場計算の結果を図5に示す。図中 $\mu_L$ 、 $\bar{\mu}$ とあるのはそれぞれ透磁率を圧延方向の測定値、圧延方向とその直角方向の平均値で計算した場合の違いを示す。

磁極形状を最終的に決める上で磁極両側につけるシムの位置と高さを変えて調べたものが図6である。メッシュを1 cmと0.5 cmにした場合の計算結果の違いを併記しているが、最終形状を決めるためにはメッシュサイズを小さくして計算誤差を小さくしなければならない。どれくらい小さくすればよいかの目安は電磁石の製作上避けられない公差である。

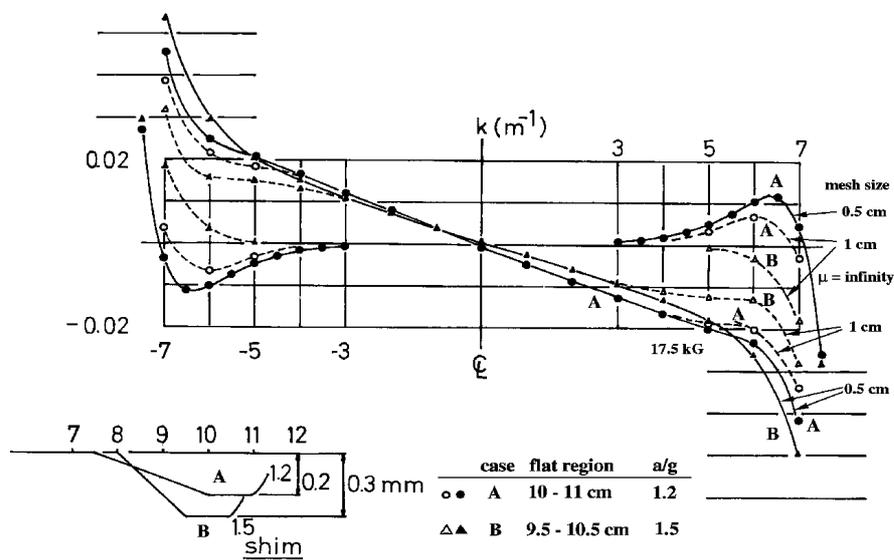


図6 シム形状A、Bによる磁場への影響。実線は0.5cmメッシュ、点線は1.0cmメッシュの場合を表す。また、○と印はシムA、△と印はシムBの場合である。

図3に示したようにC型の偏向電磁石であるため、鉄の飽和の影響で磁場に勾配や6極成分が現れる。透磁率が無限大の場合または無限大と見なせる低い磁場では飽和がないためこのような誤差磁場は現れない。磁場勾配は使用する鋼板の磁気特性が揃っていれば系統的な磁場誤差になるため、機能分離型の特徴を生かして収束電磁石による補正が可能である。シムに水平な直線部をつける意義は鋼板の積層・溶接段階でこの部分を

積層の基準面として利用して磁極平面を保証するためである。

H型の偏向電磁石もKEK-PSの設計段階で検討された。図7はそのときの磁場計算結果である。C型に比べて磁場が高いのは、電磁石の構造の違いによる。C型の場合、磁極開口部からのコイルの挿入が可能で、「く」の字に並べた鉄心2台を一つのコイルで励磁できる。しかし、H型の場合、半割りにしない限りこのようなことはできないので鉄心1台に一つのコイルとなり、電磁石の長さが短くなる結果として磁場を強くしなければならぬことによる。

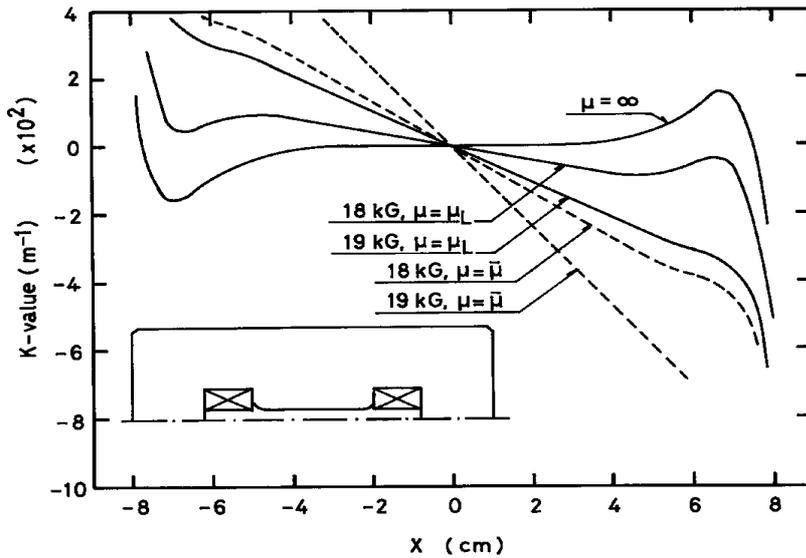


図7 H型偏向電磁石についての磁場計算結果。H型の場合、磁束分布が左右対称になるため磁場勾配は現れないが、6極成分は現れる。

図8は上の述べたC型とH型の偏向電磁石のKEK-PSに要求される磁場範囲について、現れる多極誤差磁場成分を比較したものである。6極成分はどちらの場合も同程度の大きさをもつが、4極と8極成分はC型にしか現れない。磁場計算だけから言えば、H型の磁場性能は優れている。しかし、現実問題として電磁石のギャップには真空チェンバーを挿入しなければならないので、アクセスビリティ (accessibility) とメンテナンスの利便性の上からC型が選択された。

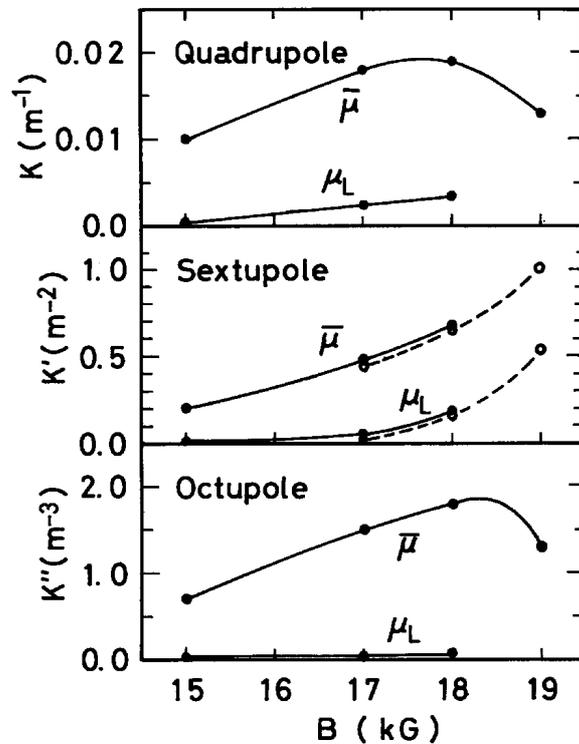


図8 H型(点線)とC型(実線)偏向電磁石の多極磁場成分。

## 2) 4極電磁石

図9にKEK-PSの収束電磁石について、方向性を考慮して計算した結果と磁場測定値を比較する。 $\mu = {}^2\mu$ は方向性をテンソルとして扱った計算結果で、実測値との一致は極めて良い。しかし、 $\mu = \mu(\theta, H)$ として関数近似した計算結果の一致はよくない。

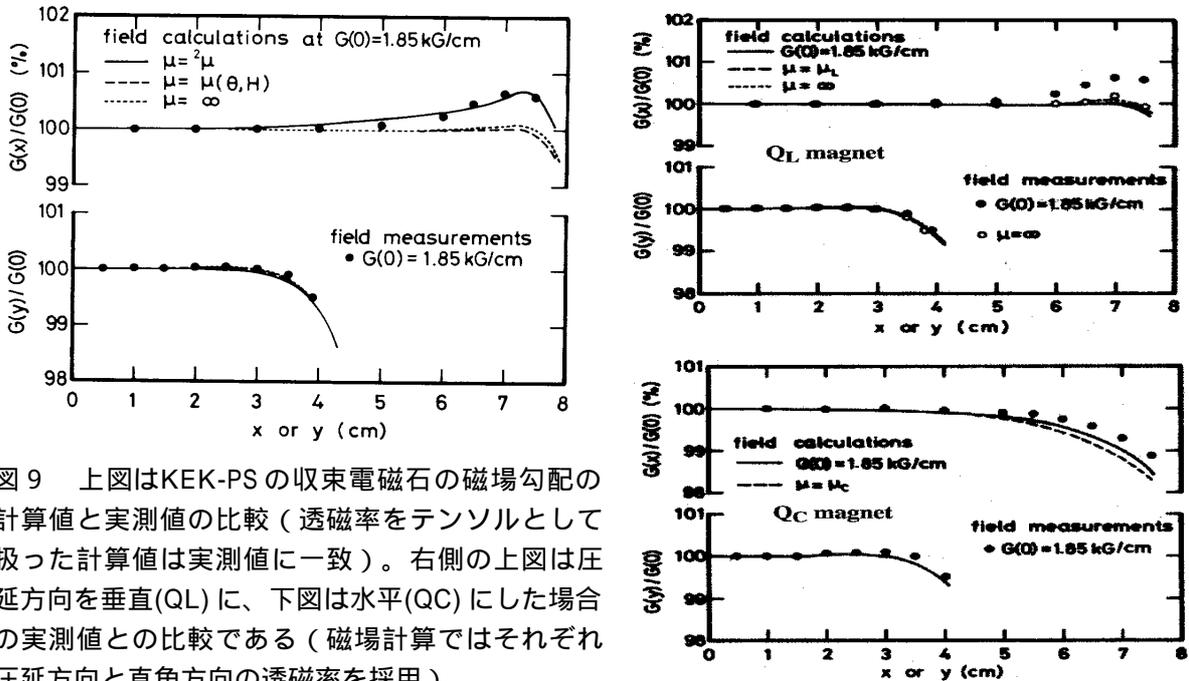


図9 上図はKEK-PSの収束電磁石の磁場勾配の計算値と実測値の比較（透磁率をテンソルとして扱った計算値は実測値に一致）。右側の上図は圧延方向を垂直(QL)に、下図は水平(QC)にした場合の実測値との比較である（磁場計算ではそれぞれ圧延方向と直角方向の透磁率を採用）。

方向性を考慮した場合としない場合で鉄心中の磁束の流れはどのようになっているであろうか。図10、図11は上の計算で得られた鉄心中の等ベクトルポテンシャル線である。

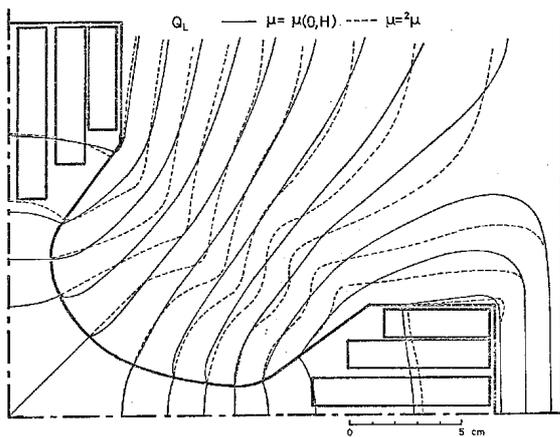


図10 鉄心中の磁束の流れを表す等ベクトルポテンシャル線。点線が透磁率をテンソルとして扱った場合である。縦方向が圧延の方向に一致して、磁束はできるだけこの方向に向こうとしている様子がわかる。

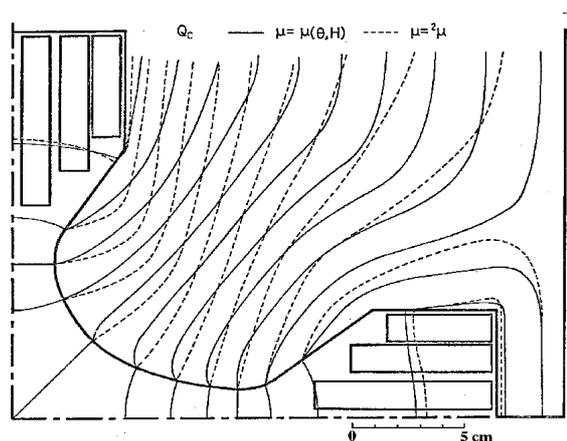


図11 比較のために圧延の方向を水平方向にした場合の磁束の流れ。この場合磁束はできるだけ水平になるようになっている様子がわかる。

KEK-PSの収束電磁石の磁極形状はもともと方向性を考慮しないで設計されたもので

ある。方向性による影響を圧延方向(L方向)とそれに直角な方向(C方向)の磁気特性から、鉄心中の平均的な透磁率 $\bar{\mu}$ として

$$\frac{2}{\bar{\mu}} = \frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\mu_C}$$

から求めた値を利用したものである。このため高磁場でアパーチャ周縁部において1%以下の磁場勾配の実測値との不一致が現れた。この透磁率を使用して設計された収束電磁石の1/4形状を図12に示す。

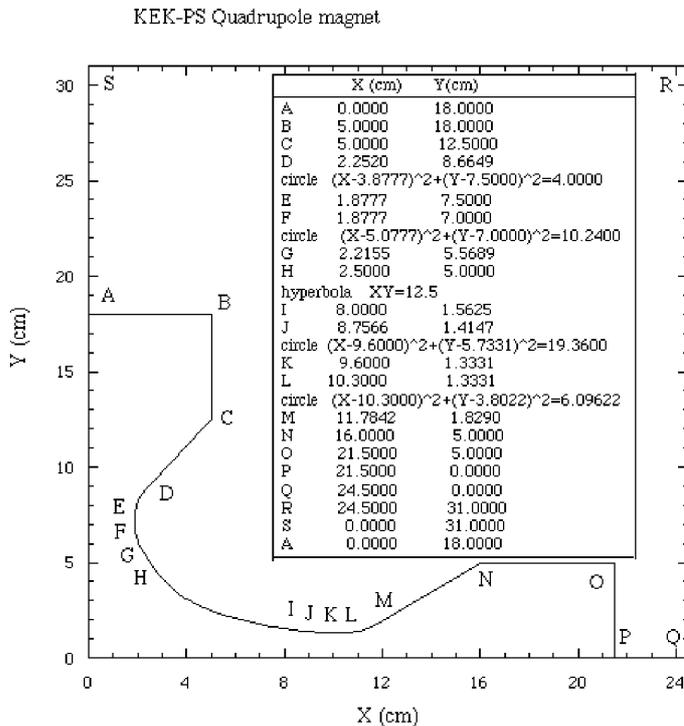


図12 KEK-PS収束電磁石の磁極形状。A,B,C,...の順に直線で結び、DとEの間は円弧で接続する。以下同様。

磁極面は図12に示した様に大部分は双曲線であるが、それ以外に部分的に円弧でつないでいる。LINDAの場合には磁場計算には5mm間隔の正方形メッシュを採用し、曲線がこの5mmメッシュと交差する座標を求めて直線でつなく。POISSONの場合には双曲線や円は関数のまま入力できる。次に両者の場合の入力データを与える。

### 3-1) LINDAの場合の入力データ

LINDAの場合、四角メッシュで扱うため縦横のメッシュ線と交差する座標データを1ミクロン精度で与える。以下のデータで\$xb\$と\$yb\$のコメントが付いている行からそれぞれx座標、y座標が1対1に対応する。\$CO\$はコイルの位置と電流のデータ、\$TBSQ\$と\$TGAM\$が鉄の磁気特性を与え、それぞれ磁場の2乗と透磁率の逆数である。これ以外にも電磁石の形状に関するデータ入力が必要である。

```

1      +0 S                                $ INTAPE $
2      *16+0. +0. *37+0.97 *60+0.72184 *126+3 *140+3 *142+160 $ XCTL $ 0.97はパッキング
3      *178+0 *180+5 *181+17 +31 +31 +17 +21 +7 +13 +11 +9 +19      ファクター。
4      *198+0 S
5      *1+29 +0 +32765 *4+1033 S          $ ICTL $      出力制御パラメータ。
6      *1+0.0 0.0 24.5 31.0 0 0 1 1      $ PRBCON $      *23と*24でx,yメッシュ

```

7	*19+1. *23+0.5 +0.5 *20+0.0 +4.0 S							サイズを0.5cm。
8	0.0 5.0 5.0 2.2520 2.1457					\$ xb \$		x 座標。
9	2.0 1.9412 1.8777 1.8777 1.9170							x, y座標の単位は
10	2.0 2.0380 2.2155 2.5							すべて cm である。
11	2.7778 3.0 3.1250 3.5 3.5714							
12	4.0 4.1667 4.5 5.0 5.5							
13	6.0 6.25 6.5 7.0 7.5							
14	8.0 8.7566 9.0 9.5 9.60							
15	10.3 10.5 11.0 11.1922 11.5							
16	11.7842 16.0 21.5 21.5 24.5							
17	24.5 0.0 0.0 C							
18	18.0 18.0 12.5 8.6649 8.5					\$ yb \$		y 座標。
19	8.1886 8.0 7.5 7.0 6.5							
20	6.1238 6.0 5.5689 5.0							
21	4.5 4.1667 4.0 3.5714 3.5							
22	3.125 3.0 2.7778 2.5 2.2727							
23	2.0833 2.0 1.9231 1.7857 1.6667							
24	1.5625 1.4147 1.3511 1.3342 1.3331							
25	1.3331 1.3413 1.4345 1.5 1.6444							
26	1.8290 5.0 5.0 0.0 0.0							
27	30.0 30.0 18.0 C							
28	+0.R70 C					\$ VB \$		
29	0.4 1.7 9.9 17.8 +0.4167					\$ CO \$		コイルの座標と電流値。
30	2.1 3.4 11.5 17.8 +0.3333							Xmin, Xmax, Ymin, Ymax,
31	3.5 4.8 13.1 17.8 +0.2500							currentの順。
32	13.4 21.3 0.4 1.7 -0.4167							
33	15.0 21.3 2.1 3.4 -0.3333							
34	16.6 21.3 3.5 4.8 -0.2500 C							
35	0.0 0.25E+8 0.36E+8 0.49E+8 0.64E+8					\$ TBSQ \$		B <sup>2</sup> の値。
36	0.81E+8 1.00E+8 1.21E+8 1.44E+8 1.69E+8							
37	1.96E+8 2.25E+8 2.56E+8 2.89E+8 3.24E+8							
38	3.61E+8 4.00E+8 4.41E+8 4.6225E+8 4.84E+8							
39	5.29E+8 5.76E+8 6.25E+8 25.00E+8 100.0E+8							
40	C					\$ 25 ENTRIES \$		
41	4.00E-5 4.30E-5 4.40E-5 4.64E-5 4.81E-5					\$ TGAM \$		1/μの値。
42	5.11E-5 5.80E-5 6.64E-5 7.83E-5 9.08E-5							
43	1.03E-4 1.19E-4 1.36E-4 1.68E-4 2.36E-4							
44	4.79E-4 1.30E-3 5.00E-3 1.40E-2 3.64E-2							
45	7.82E-2 1.17E-1 1.52E-1 5.75E-1 7.94E-1							

### 3 - 2 ) POISSONの場合のLATTICE入力データ

POISSONの計算コードはメッシュを作るAUTOMESHとLATTICE、磁場を計算するPOISSONに分かれている。以下のデータはAUTOMESHで前処理するためのデータである。上のLINDAで扱ったものと全く同じ形状の4極電磁石について三角メッシュを発生する。AUTOMESHの出力がLATTICEの入力データになる。前処理データを利用するこ

とで座標入力が少し簡単化される。それにしても加速器の電磁石の精密設計にはこのような細かなデータが必要である。座標精度は1ミクロンである。LATTICEからの出力をPOISSONに入力して磁場計算を実行する。

### 3 - 2 - 1 ) AUTOMESH入力データ

1	Q-magnet for KEK-PS, 2000/7/31	タイトルカード	
2	\$reg nreg=6, npoint=5	問題領域の分割数は8で、座標データ数は5。	
3	xmin=.000000,xmax=24.500000,dx=.50000,ymin=.000000,ymax=31.000000 \$end		
4	\$po x=0.000000, y=0.000000 \$end	問題全領域のx, y座標の最大・最小値。	
5	\$po x=24.500000,y=0.000000 \$end	メッシュサイズはdx=0.4cm。	
6	\$po x=24.500000,y=31.000000 \$end	4行から順に8行まで1つの領域の直線で結ぶ	
7	\$po x=0.000000, y=31.000000 \$end	コーナー座標を与える。x, y座標の単位は	
8	\$po x=0.000000, y=0.000000 \$end	すべてcmである。	
9	\$reg npoint=20,mat=3 \$end	鉄心形状の座標データ、材料番号mat=3。	
10	\$po x=0.000000, y=18.000000 \$end	10行から順に29行まで1つの領域の直線で結ぶ	
11	\$po x=5.000000, y=18.000000 \$end	コーナー座標を与える。以下同じ。	
12	\$po x=5.000000, y=12.500000 \$end		
13	\$po x=2.252000, y=8.664900 \$end		
14	\$po nt=2,r=2.00000,theta=180.0000 ,x0=3.8777000,y0=7.500000 \$end	円弧	
15	\$po x=1.877700,y=7.000000 \$end		
16	\$po nt=2,r=3.20000,theta=206.565051 ,x0=5.0777000,y0=7.000000 \$end	円弧	
17	\$po x=2.500000,y=5.000000 \$end		
18	\$po nt=3,x=8.000000,y=1.562500,r=5.00000 \$end	双曲線	
19	\$po x=8.756600,y=1.414700 \$end		
20	\$po nt=2,r=4.40000,theta=270.0000 ,x0=9.6000000,y0=5.7331000 \$end	円弧	
21	\$po x=10.300000,y=1.333100 \$end		
22	\$po nt=2,r=2.46905200,theta=306.9487860 ,x0=10.30000,y0=3.802200 \$end	円弧	
23	\$po x=16.000000,y=5.000000 \$end		
24	\$po x=21.500000,y=5.000000 \$end	(注) 各領域の間隔とメッシュ寸法の関係は	
25	\$po x=21.500000,y=0.000000 \$end	最小メッシュ間隔 > 指定メッシュ寸法 / 2	
26	\$po x=24.500000,y=0.000000 \$end	である。指定メッシュ寸法を小さくすれば、	
27	\$po x=24.500000,y=31.000000 \$end	計算時間が長くなる。	
28	\$po x=0.000000,y=31.000000 \$end		
29	\$po x=0.000000,y=18.000000 \$end		
30	\$reg npoint=5,mat=1,cur=416.70 \$end	コイル# 1 形状の座標と電流値	
31	\$po x=0.400000,y=9.900000 \$end		
32	\$po x=1.600000,y=9.900000 \$end		
33	\$po x=1.600000,y=17.60000 \$end		
34	\$po x=0.400000,y=17.60000 \$end		
35	\$po x=0.400000,y=9.900000 \$end	コイル# 2 形状の座標と電流値	
36	\$reg npoint=7,mat=1,cur=583.30 \$end		
37	\$po x=2.100000,y=11.500000 \$end		
38	\$po x=3.400000,y=11.500000 \$end		
39	\$po x=3.400000,y=13.100000 \$end		
40	\$po x=4.500000,y=13.100000 \$end		
41	\$po x=4.500000,y=17.600000 \$end		

```

42 $po x=2.100000,y=17.600000 $end
43 $po x=2.100000,y=11.500000 $end
44 $reg npoint=5,mat=1,cur=-416.70 $end
45 $po x=13.400000,y=0.400000 $end
46 $po x=21.100000,y=0.400000 $end
47 $po x=21.100000,y=1.600000 $end
48 $po x=13.400000,y=1.600000 $end
49 $po x=13.400000,y=0.400000 $end
50 $reg npoint=7,mat=1,cur=-583.30 $end
51 $po x=15.000000,y=2.100000 $end
52 $po x=21.100000,y=2.100000 $end
53 $po x=21.100000,y=4.500000 $end
54 $po x=16.600000,y=4.500000 $end
55 $po x=16.600000,y=3.400000 $end
56 $po x=15.000000,y=3.400000 $end
57 $po x=15.000000,y=2.100000 $end

```

コイル# 3形状の座標と電流値

コイル# 4形状の座標と電流値

### 3 - 2 - 2 ) LATTICE入力データ

```

1 s
2 *46 6 *21 0 1 0 1 s

```

マグネットタイプの指定と境界条件を  
\*21の後に上、下、右、左の順に指定。

### 3 - 2 - 3 ) POISSON入力データ

```

1 0
2 *6 0 *18 1 *8 7218.40 *40 9 1 s

```

LATTICE出力のダンプ番号  
\*40 \*41で指定するメッシュ座標における  
磁束密度を\*8で指定する。すなわち、(9, 1)  
において7218.40Gauss。\*18は次に読み込む  
磁気特性表の数として1を指定。

```

3 3 0.97 1

```

材料番号mat=3に対する磁気特性を次行から与  
える。0.97は鋼板のスタッキングファクター、  
1は磁気特性を(B,1/μ)で与えることを指示する。  
4~28行が磁気特性データ。

```

4 0.00000 0.00004000
5 5000.00 0.00004300
6 6000.00 0.00004400
7 7000.00 0.00004640
8 8000.00 0.00004810
9 9000.00 0.00005110
10 10000.00 0.00005800
11 11000.00 0.00006640
12 12000.00 0.00007830
13 13000.00 0.00009080
14 14000.00 0.00010300
15 15000.00 0.00011900
16 16000.00 0.00013600
17 17000.00 0.00016800
18 18000.00 0.00023600
19 19000.00 0.00047900

```

20 20000.00 0.00130000  
 21 21000.00 0.00500000  
 22 21500.00 0.01400000  
 23 22000.00 0.03640000  
 24 23000.00 0.07820000  
 25 24000.00 0.11700000  
 26 25000.00 0.15200000  
 27 50000.00 0.57500000  
 28 100000.00 0.79400000 c  
 29 1  
 30 \*18 0 \*55 24.5 \*30 0 \*110 10 10 4.0 90. 1.0 s

cは入力した磁気特性の終わりを指示する。  
 POISSON計算結果の出力番号。

s x軸上24.5cmまでの計算結果の出力を指示。  
 \*110の後の5個の値はハーモニック解析で求める  
 磁場係数の数(10)、指定半径上に等間隔で計算す  
 るベクトルポテンシャルの点数(10)、指定の半径  
 (4.0cm)、0度からの円弧の角度(90.0度)、ハーモニッ  
 ク解析の規格化半径(1.0cm)。  
 POISSONの計算終了を指示。

31 -1

#### 4 ) LINDAの計算結果

計算結果の一部 ( 主要部分のみ ) と磁場勾配のプロットを図 1 3 に示す。全出力は数  
 1 0 0 ページにも及ぶ膨大なものである。

表2 LINDAの計算結果 ( 主要部分のみ )

(DELX=4cmにおける値=BMID= .721840, GMID= .180444)

X (cm)	By (T)	dBy/dx (T/m)	K (1/m)	G/Gmid (%)
0.0000	0.0000	18.049	25.003	100.02
0.50000	0.090242	18.048	25.003	100.02
1.0000	0.18048	18.048	25.002	100.02
1.5000	0.27072	18.047	25.001	100.01
2.0000	0.36095	18.046	25.000	100.01
2.5000	0.45118	18.045	24.998	100.00
3.0000	0.54140	18.044	24.997	99.997
3.5000	0.63162	18.044	24.997	99.996
4.0000	0.72184	18.044(Gmid)	24.998	99.997
4.5000	0.81206	18.045	24.999	100.00
5.0000	0.90229	18.047	25.001	100.01
5.5000	0.99253	18.050	25.005	100.03
6.0000	1.0828	18.057	25.015	100.07
6.5000	1.1731	18.074	25.039	100.16
7.0000	1.2636	18.110	25.089	100.36
7.5000	1.3542	18.170	25.172	100.70
8.0000	1.4449	18.136	25.124	100.50
8.5000	1.5333	16.878	23.382	93.534
9.0000	1.6079	11.724	16.242	64.972
9.5000	1.6463	3.8697	5.3609	21.445
10.000	1.6454	-4.2736	-5.9205	-23.683

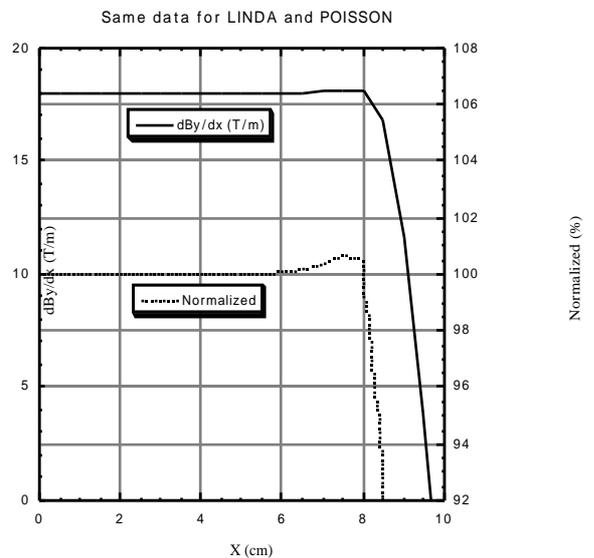


図 1 3 LINDAで計算した磁場勾配。

出力としてアンペアファクターAMPFAC=1.0048 (=TOTNI/AMPTRN) が得られる。これは鉄の透磁率を無限大として計算したコイルの電流値をAMPFAC倍した値が、指定した座標における磁場を発生するために必要な電流値である。この例では、透磁率は通常のものより優れた鉄の特性（方向性鋼板の圧延方向の磁気特性）で計算しているためAMPFACは小さくなっている。AMPFACは鉄の飽和の程度を示す。AMPFAC=1.0048であれば飽和は0.48%である。実際のAMPFACは1.05程度（飽和5%）、あるいはそれ以上である。透磁率が無限大のときのコイルの磁極当たりのアンペアターンは

$$\text{AMPTRN} = \text{GRAD} \cdot R^2 / 2 / \mu_0 = 18.046 \cdot (0.05)^2 / 2 / \mu_0 = 17950 \text{ AT}$$

磁場計算によるアンペアターンはTOTNI=18036.25ATであるので、AMPFACは

$$\text{AMPFAC} = \text{TOTNI} / \text{AMPTRN} = 1.0048$$

とである。

磁場勾配の指定は、例えば、X=4cmにおける磁束密度0.72184T（18.046T/mに相当する）として与える。

#### 5) POISSONの計算結果

##### 5 - 1) LATTICEとPOISSONの出力結果（磁極まわりのプロット）

メッシュ寸法を5mmとしてLATTICEで計算したメッシュ形状とPOISSONで計算した等ベクトルポテンシャル線（磁力線）を図14に示す。また、LINDAとPOISSONで求めた磁場勾配を図15に比較する。

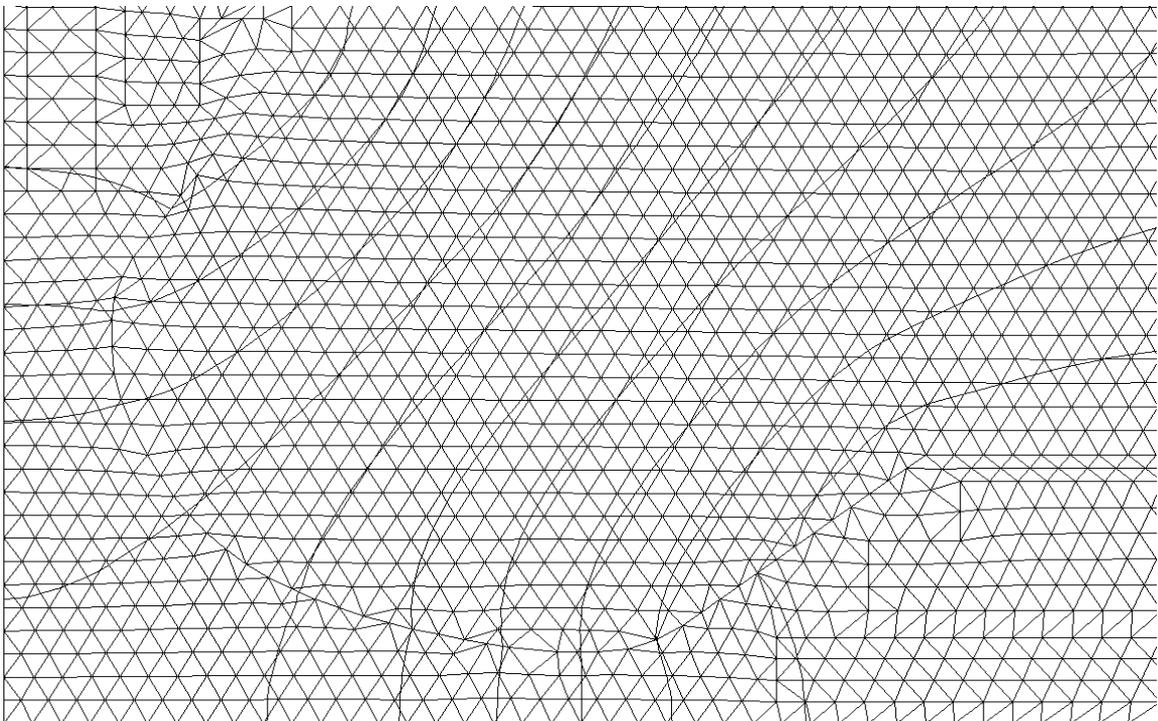


図14 LATTICEで求めたメッシュとPOISSONで計算した磁力線のプロット。

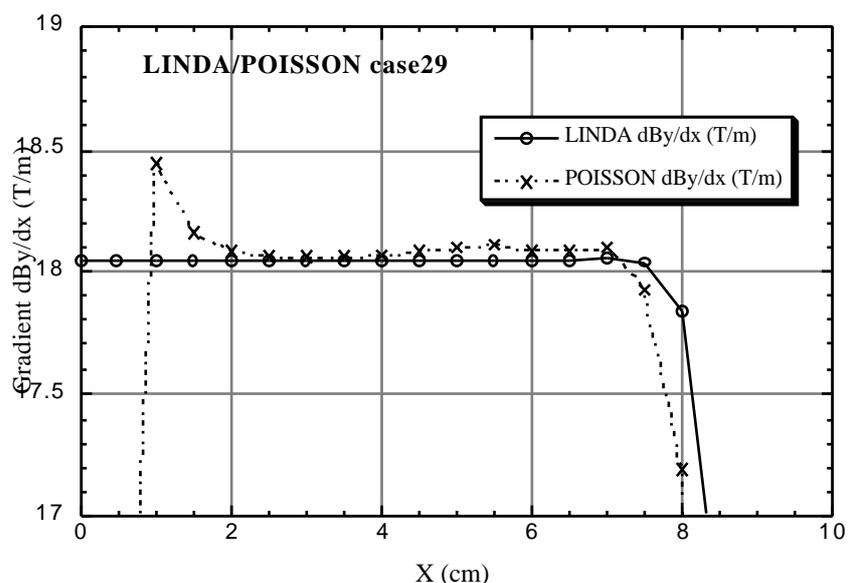


図 1 5 LINDAとPOISSONで求めた磁場勾配の比較。POISSONはX=0.0 近傍で磁場勾配が大きく変動するが、勾配を求める式においてX<0.0 側のベクトルポテンシャルを考慮していないためである。両者の結果は厳密には一致しないが、計算コードによってこの程度の相違がある。

POISSONで得られた磁極当たりのアンペアターンはAMPTRN=18050 ATである。LINDAのそれは18036 ATであった。

### 5 - 2 ) コイルのインダクタンスと形状

POISSONの計算で電磁石に蓄えられる全エネルギーが計算されるので、これからインダクタンス  $L$  を求めることができる。電磁石に蓄えられるエネルギーは

$$E = \frac{1}{2} LI^2 [J]$$

ただし、単位として  $L$  は[H]、 $I$  は[A]である。POISSONの結果は2239.7 J/mである。これは4極電磁石の対称性を考慮して入力したのは1/4電磁石であったので、この4倍が長さ1 mの電磁石一台あたりの蓄積エネルギーである。すなわち、

$$\frac{1}{2} LI^2 = 4 \times 2239.7$$

磁極当たりのコイルの巻数は図 1 6 に示すように12ターンであるので、電流値は  $I=18050\text{AT}/12\text{T}=1504.17\text{ A}$  である。これから、 $L=7.919\text{mH/m}$  である。これは1 m当たりのインダクタンスであるので、実際の電磁石長を0.6m (KEK-PSの4極電磁石の場合) とすれば、

$$L(0.6\text{m長})=7.919 \times 0.6=4.75\text{ mH}$$

である。

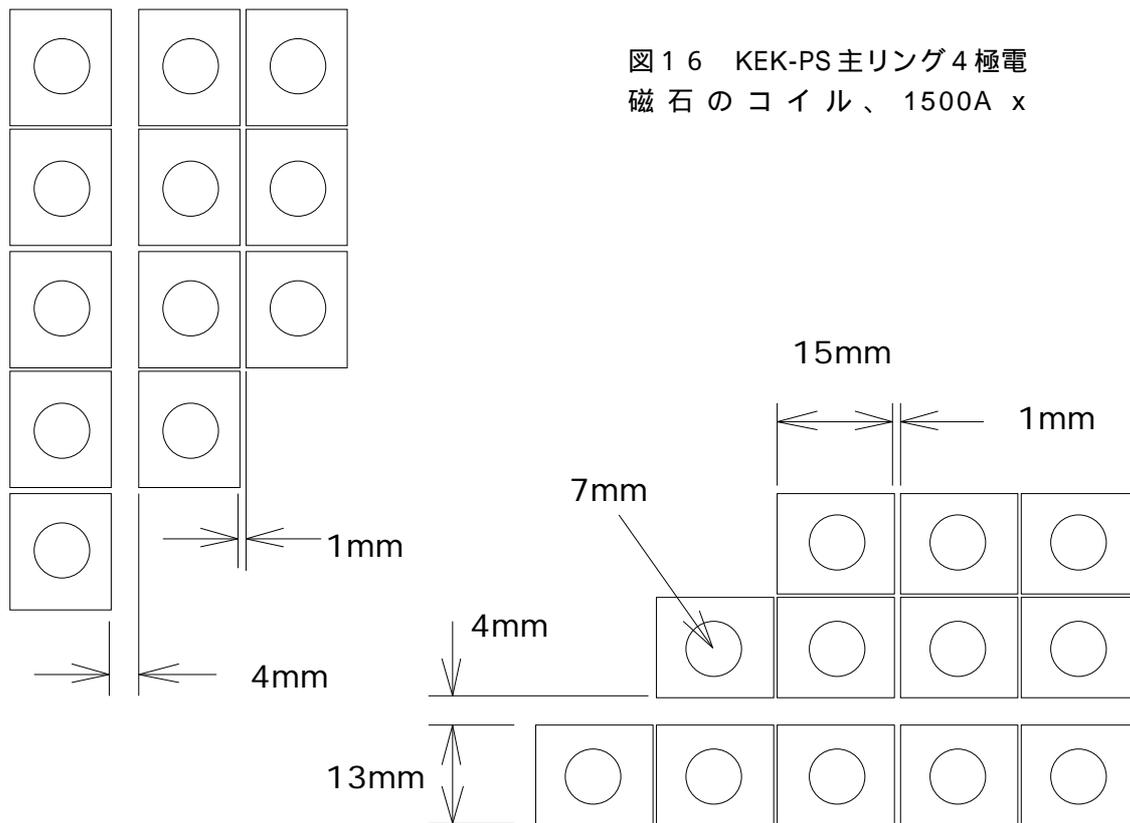


図16 KEK-PS主リング4極電  
磁石のコイル、1500A x

#### 6) LINDAの計算で得られた磁場および透磁率の分布

LINDAでは四角メッシュで計算するため計算の過程で求めた磁場や透磁率の分布をプロットすることが容易である。膨大な出力ファイルの中からプロットしたい磁場および透磁率の2次元テーブルを抜き出して別のデータファイルとして保存する。ここでは手続きの説明のためそれぞれB.dat、R.datとしよう。Mathematicaを起動し、この2次元テーブルをFileメニューの下にあるimport...コマンドでMathematicaに取り込む。さらに、Save AsコマンドでそれぞれB.nb、R.nbの名前でMathematicaフォルダーに保存する。これで磁場データと透磁率データがMathematicaに取り込まれたことになる。

次に、MathematicaのFileメニューのNewコマンドで新しい入力ウィンドウを開き、

```
<<Graphics`Graphics` [enter]キーを押す ([return]キーは不可)。
```

としてグラフィックのパッケージを呼びだしてから

```
t = ReadList["B.nb", Number] [enter]キー
```

```
s = Partition[t, 49] [enter]キー
```

として、B.nbファイルの2次元データを1次元配列の変数tに代入する。さらに、tを49個ずつの成分に分割して、2次元配列sを作る。配列の大きさはLINDAの計算から決まり、ここでは60行49列である。次に、

```
ContourGraphics[s] [enter]キー
```

```
Show[%, ContourShading -> False] [enter]キー
```

と入力すれば、図17の分布を表す等高線が得られる。最後の行で、Show[%]とすれば

濃淡のついた分布図が得られる。

分布図のプロットにMathematicaを利用したが、このような可視化 (visualization) はこの他にもAVS、PV-WAVE、IDL、Mapleなどの汎用ソフトを利用して可能である。

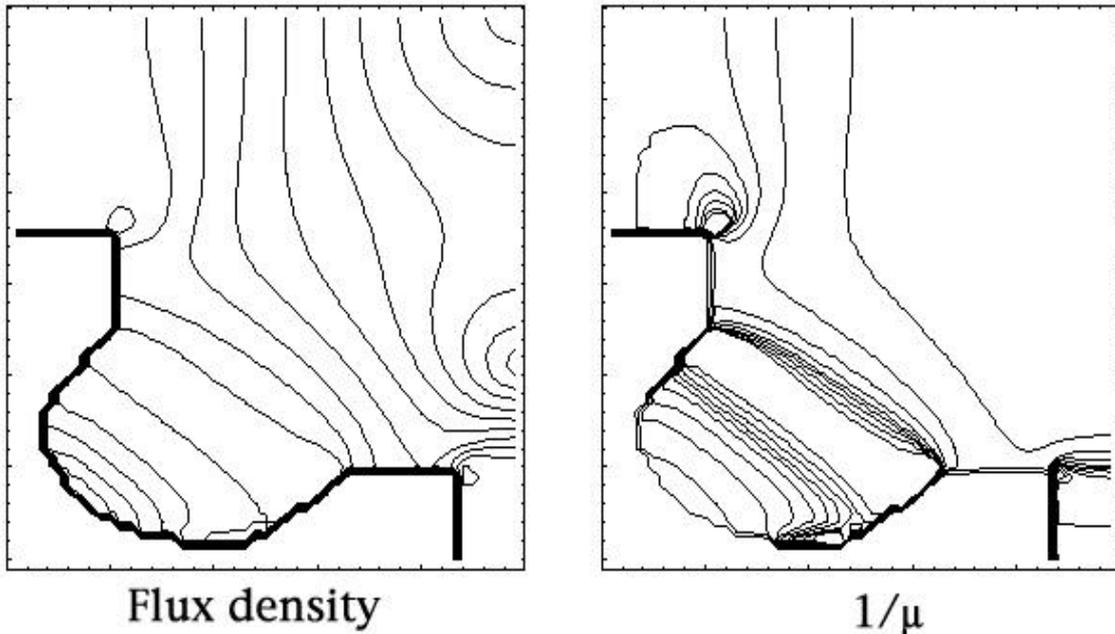


図 1 7 磁束密度 (左) と透磁率の逆数 (右) の分布図 (等高線プロット)。

### 3 . 永久磁石の磁場解析

次にPOISSONコードに含まれる永久磁石の磁場計算コードPANDIRAを用いる計算例を示す。例題として永久磁石のセグメントの磁化方向を考慮して組み合わせると、第 8 章に示したように 2 極磁場や 4 極磁場を発生することができる。ここでは 4 極磁場を発生するためリング状に 16 個のセグメントを組み合わせた磁場について考える。対称性を考慮して第 1 象限だけを取り出して、図 1 8 のように磁化の方向を決める。この方向は各セグメントの中心軸の角度を基準にして求めることができる。

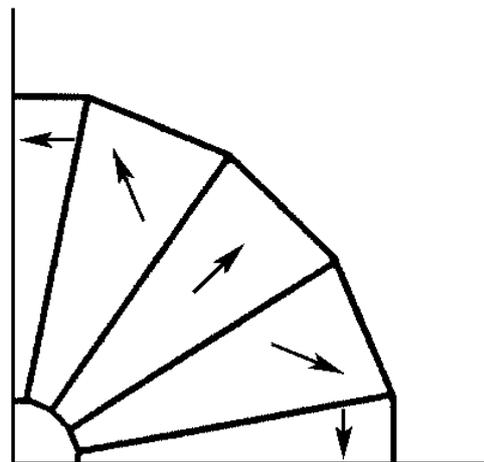


図 1 8 REC 4 極磁石の 1 / 4 形状と磁化方向。

#### 1 ) AUTOMESHの入力データ

図 1 8 のように永久磁石をリング状に配置した 4 極磁石の入力データを次に与える。対称性を考慮して 1 / 4 形状について入力すればよい。

1	REC ring quadrupole permanent magnet	
2	\$reg nreg=7, dx=.25, dy=.25, xmax=12.0, ymax=12.0, npoint=5 \$end	問題領域 # 1 とメッシュ寸法の指定。 x, y座標の単位はすべて cm である。
3	\$po x=0.0000, y=0.000 \$end	
4	\$po x=12.000, y=0.000 \$end	
5	\$po x=12.000, y=12.00 \$end	
6	\$po x=0.0000, y=12.00 \$end	
7	\$po x=0.0000, y=0.000 \$end	
8	\$reg mat=6, npoint=5 \$end	領域 # 2 (永久磁石番号 # 6 )
9	\$po x=5.00000, y=0.00000 \$end	永久磁石番号は 6 ~ 11 の範囲。
10	\$po x=9.80790, y=0.00000 \$end	
11	\$po x=9.80790, y=1.95090 \$end	
12	\$po x=5.00000, y=0.99460 \$end	
13	\$po x=5.00000, y=0.00000 \$end	
14	\$reg mat=7, npoint=5 \$end	領域 # 3 (永久磁石番号 # 7 )
15	\$po x=5.00000, y=0.99460 \$end	
16	\$po x=9.80790, y=1.95090 \$end	
17	\$po x=8.31470, y=5.55570 \$end	
18	\$po x=4.23880, y=2.83230 \$end	
19	\$po x=5.00000, y=0.99460 \$end	
20	\$reg mat=8, npoint=5 \$end	領域 # 4 (永久磁石番号 # 8 )
21	\$po x=4.23880, y=2.83230 \$end	
22	\$po x=8.31470, y=5.55570 \$end	
23	\$po x=5.55570, y=8.31470 \$end	
24	\$po x=2.83230, y=4.23880 \$end	
25	\$po x=4.23880, y=2.83230 \$end	
26	\$reg mat=9, npoint=5 \$end	領域 # 5 (永久磁石番号 # 9 )
27	\$po x=2.83230, y=4.23880 \$end	
28	\$po x=5.55570, y=8.31470 \$end	
29	\$po x=1.95090, y=9.80790 \$end	
30	\$po x=0.99460, y=5.00000 \$end	
31	\$po x=2.83230, y=4.23880 \$end	
32	\$reg mat=10, npoint=5 \$end	領域 # 6 (永久磁石番号 # 10 )
33	\$po x=0.99460, y=5.00000 \$end	
34	\$po x=1.95090, y=9.80790 \$end	
35	\$po x=0.00000, y=9.80790 \$end	
36	\$po x=0.00000, y=5.00000 \$end	
37	\$po x=0.99460, y=5.00000 \$end	
38	\$reg mat=1, cur=20., npoint=2 \$end	領域 # 7 (仮の電流を与える)
39	\$po x=8.31470, y=5.55570 \$end	
40	\$po x=5.55570, y=8.31470 \$end	

## 2 ) LATTICEの入力データ

1	s	
2	*81 0 *101 1 *21 0 1 0 1 s	*21に続く値は境界条件 *101の後の1で永久磁石問題を指定。

### 3) PANDIRAの入力データ

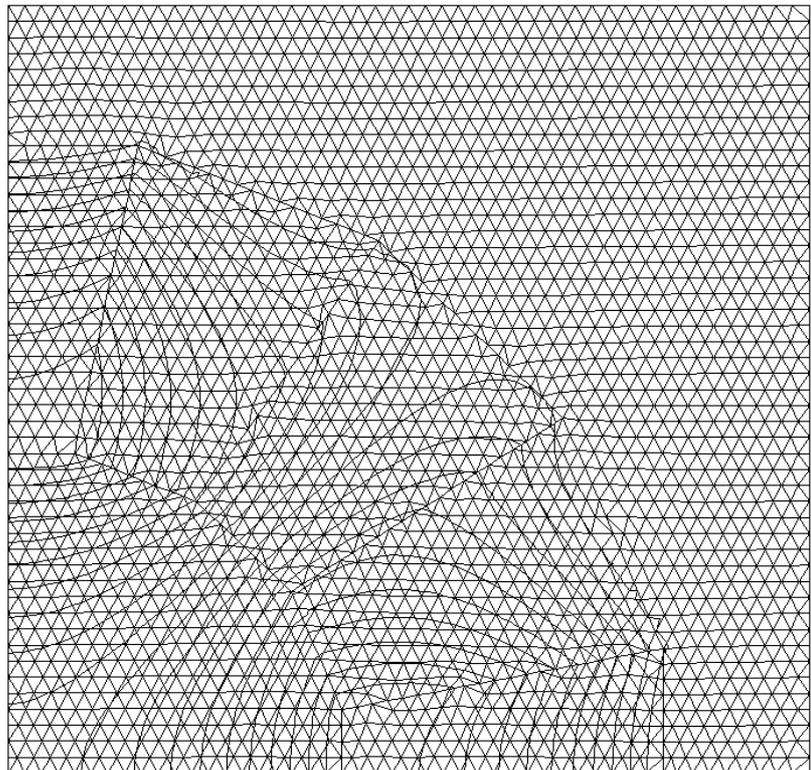
コイルの代わりに永久磁石を起磁力とする磁石の磁場計算にはPANDIRAコードを使用する。第2象限の減磁特性を直線で近似し、横軸と縦軸の交点（それぞれ、保持力と残留磁束密度）を永久磁石の磁気特性として与える。

1	0	
2	*18 5 *6 0 s	*18の後の5は入力する磁気特性の数。
3	6 1. -1.	(永久磁石番号 # 6)
4	-90.0 1.0 s	磁化の方向-90度、スタッキングファクター1.0
5	-10500. 11000.	減磁特性のH軸との交点（保持力HcをOeの単位）とB軸との交点（残留磁束密度BrをGauss単位）をこの順に与える。以下同様。
6	7 1. -1.	(永久磁石番号 # 7)
7	-22.50 1.0 s	
8	-10500. 11000.	
9	8 1. -1.	(永久磁石番号 # 8)
10	45.0 1.0 s	
11	-10500. 11000.	
12	9 1. -1.	(永久磁石番号 # 9)
13	112.50 1.0 s	
14	-10500. 11000.	
15	10 1. -1.	(永久磁石番号 # 10)
16	180.0 1.0 s	
17	-10500. 11000.	
18	-1	PANDIRAの計算を終了する。

### 4) LATTICEとPANDIRA の出力

図19にREC4極電磁石の1/4についてメッシュと磁力線を示す。

図19 LATTICEとPANDIRAの出力プロット。



計算で得られた磁場勾配は次表に示すように非常に強く、ボア半径5 cmの空間で19 T/m以上である。外径は10 cmであるので、永久磁石を利用することによりコンパクトな磁石で大きな磁場勾配が得られることが理解できる。この表の値を図20にプロットする。

表 PANDIRAの出力

X (cm)	By (Gauss)	dBy/dx (T/m)
0.0000	7.2790	19.574
0.25000	497.92	19.608
0.50000	987.86	19.714
0.75000	1481.5	19.740
1.0000	1975.5	19.748
1.2500	2469.3	19.750
1.5000	2963.2	19.751
1.7500	3457.0	19.750
2.0000	3950.6	19.748
2.2500	4444.2	19.743
2.5000	4937.6	19.736
2.7500	5430.7	19.724
3.0000	5923.3	19.702
3.2500	6415.1	19.657
3.5000	6905.1	19.554
3.7500	7390.9	19.309
4.0000	7866.7	18.722
4.2500	8319.3	17.376
4.5000	8721.4	14.583
4.7500	9032.1	9.6391
5.0000	0.0000	0.0000

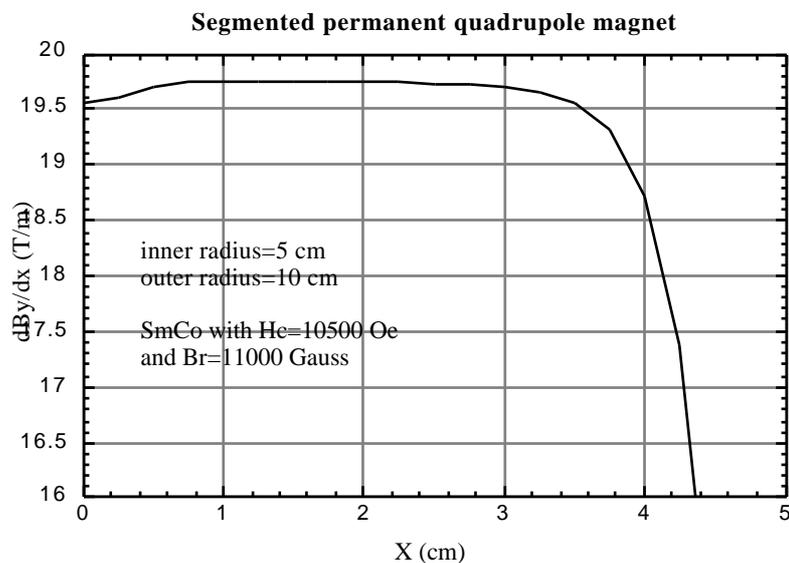


図20 PANDIRAで計算した永久4極磁石（内径5 cm, 外径10 cm）の磁場勾配。

## 4 . ハイブリッド永久磁石の磁場解析

永久磁石を起磁力とする鉄心を有する磁石がハイブリッド永久磁石である。磁場分布は主として磁極の形状で決まるので磁場性能のよい磁石ができる。永久磁石の体積と共に磁場は増加するが、あるところで飽和する。以下では簡単な断面形状の4極磁石と2極磁石について、永久磁石としてSrフェライトまたはRECを利用したときの磁場計算を行い、その結果を示す。

### 4 - 1 ) ハイブリッド4極永久磁石

#### 4 - 1 - 1 ) AUTOMESHの入力データ

1	Hybrid permanent Quad	プロブレム名
2	\$reg nreg=6, dx=.2, dy=.2, xmax=10.0, ymax=10.0, npoint=4 \$	
3	\$po x=0.00, y=0.00 \$	全体領域、メッシュパラメータの指定。
4	\$po x=10.0, y=0.00 \$	x, y座標の単位はすべて cm である。
5	\$po x=10.0, y=10.0 \$	
6	\$po x=0.00, y=0.00 \$	
7	\$reg mat=7, npoint=5 \$	永久磁石領域の指定 ( mat=7 )
8	\$po x=4.00 , y=0.500 \$	厚さは 2 cm を仮定した。
9	\$po x=6.00 , y=0.500 \$	
10	\$po x=6.00 , y=4.00 \$	
11	\$po x=4.00 , y=4.00 \$	
12	\$po x=4.00 , y=0.500 \$	
13	\$reg mat=2, npoint=5 \$	鉄領域の指定、 mat=2は組込みB-H曲線使用。
14	\$po x=6.00 , y=0.00 \$	
15	\$po x=8.00, y=0.00 \$	
16	\$po x=8.00, y=8.00 \$	
17	\$po x=6.00 , y=6.00 \$	
18	\$po x=6.00 , y=0.00 \$	
19	\$reg mat=1, npoint=4 \$	空気領域の指定
20	\$po x=4.00 , y=4.00 \$	
21	\$po x=6.00 , y=4.00 \$	
22	\$po x=6.00 , y=6.00 \$	
23	\$po x=4.00 , y=4.00 \$	
24	\$reg mat=2, npoint=4 \$	鉄領域の指定。 mat=2は組込みB-H曲線使用。
25	\$po x=1.414, y=1.414 \$	
26	\$po nt=3, x=4.00, y=0.500, r=2.000 \$	双曲線の指定
27	\$po x=4.00 , y=4.00 \$	
28	\$po x=1.414 , y=1.414 \$	
29	\$reg mat=1, cur=20., npoint=2 \$	磁場計算のためのダミー電流の指定。
30	\$po x=6.00, y=0.500 \$	
31	\$po x=6.00, y=4.00 \$	
32	\$reg npoint=4, ibound=0 \$	4 5 度対称ラインの指定。これによって
33	\$po x=0.000, y=0.000 \$	4 極電磁石の計算領域は1/8になる。
34	\$po x=1.414, y=1.414 \$	
35	\$po x=4.000, y=4.000 \$	

36 \$po x=10.00, y=10.00 \$

#### 4 - 1 - 2 ) LATTICEの入力データ

1 s  
2 \*81 0 \*101 1 s 永久磁石問題の指定。対称4極磁石1/8形状の入力では境界条件の指定は不要。

#### 4 - 1 - 3 ) PANDIRAの入力データ (Srフェライトの場合)

1 0 dump番号。  
2 \*18 1 \*6 0 s  
3 7 1. -1 mat=7の領域の磁気特性データ  
4 180. 1.0 s 磁化方向とパッキングファクターの指定  
5 -3350. 3500. 保持力と残留磁束密度の指定 (Srフェライトのデータ)。  
6 -1 計算の終了。

#### 4 - 1 - 4 ) LATTICEとPANDIRAの出力プロット (Srフェライトの場合)

図2-1はLATTICEで計算したメッシュ形状と永久磁石としてSrフェライトを使用した場合のPANDIRAで計算した磁力線 (等ベクトルポテンシャル線) をプロットしたものである。

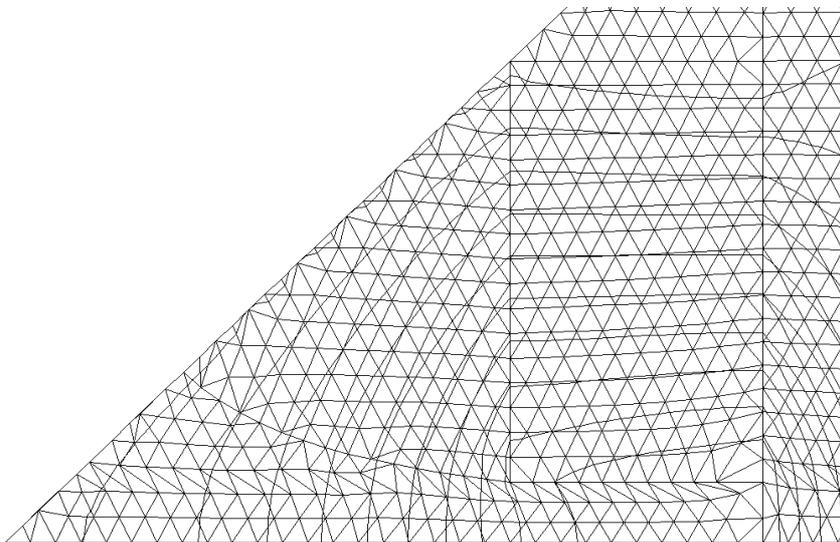


図 2 1 LATTICE と PANDIRAの出力。メッシュと磁力線の主要部分のみを示す。永久磁石はSrフェライトの場合。

#### 4 - 1 - 5 ) PANDIRAの出力データ (Srフェライトの場合)

x (cm)	By (Gauss)	dBy/dx (T/m)
0.0000	-112.97	
0.20000	-178.14	-8.8731
0.40000	-351.54	-8.9422
0.60000	-529.02	-8.9232
0.80000	-707.25	-8.8351
1.0000	-883.49	-8.8378

1.2000	-1059.9	-8.8584
1.4000	-1236.5	-8.8641
1.6000	-1413.2	-8.8728
1.8000	-1589.9	-8.8787
2.0000	-1766.7	-8.8767
2.2000	-1943.6	-8.8810
2.4000	-2120.8	-8.8947
2.6000	-2298.1	-8.8759
2.8000	-2473.9	-8.7671
3.0000	-2647.1	-8.5635
3.2000	-2814.5	-8.0548
3.4000	-2964.4	-6.4985
3.6000	-3060.6	-2.0768
3.8000	-3006.9	8.2819
4.0000	-2700.8	21.730
4.2000	-2198.6	25.889
4.4000	-1710.3	22.455
4.6000	-1307.5	17.708
4.8000	-989.85	14.121
5.0000	-731.30	11.789
5.2000	-509.22	10.498
5.4000	-308.33	9.6948
5.6000	-131.05	7.4790
5.8000	-25.008	2.8596
6.0000	0.0000	0.0000

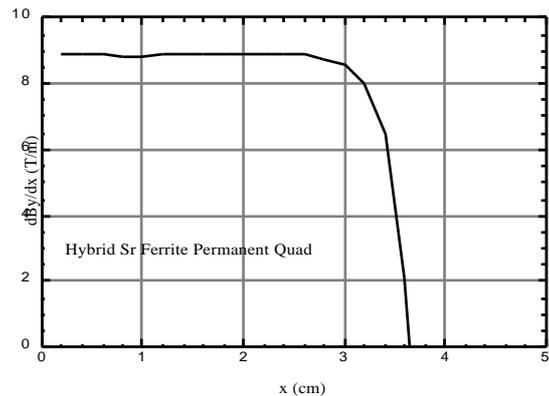


図 2 2 ハイブリッド Sr フェライト永久 4 極磁石の磁場勾配分布。  
左の表で磁場勾配の符号を反転させてプロットした。

#### 4 - 1 - 6 ) PANDIRAの入力データ (RECの場合)

1	0	dump番号。
2	*18 1 *6 0 s	
3	7 1. -1	mat=7の領域の磁気特性データ。
4	180. 1.0 s	磁化方向とパッキングファクターの指定。
5	-10500. 11000.	保持力と残留磁束密度の指定 (RECのデータ)。
6	-1	計算の終了。

#### 4 - 1 - 7 ) LATTICEとPANDIRA の出力プロット (RECの場合)

図 2 3 はLATTICEで計算したメッシュ形状とREC永久磁石を使用した場合のPANDIRAで計算した磁力線 (等ベクトルポテンシャル線) をプロットしたものである。メッシュ形状は図 2 1 と同じである。

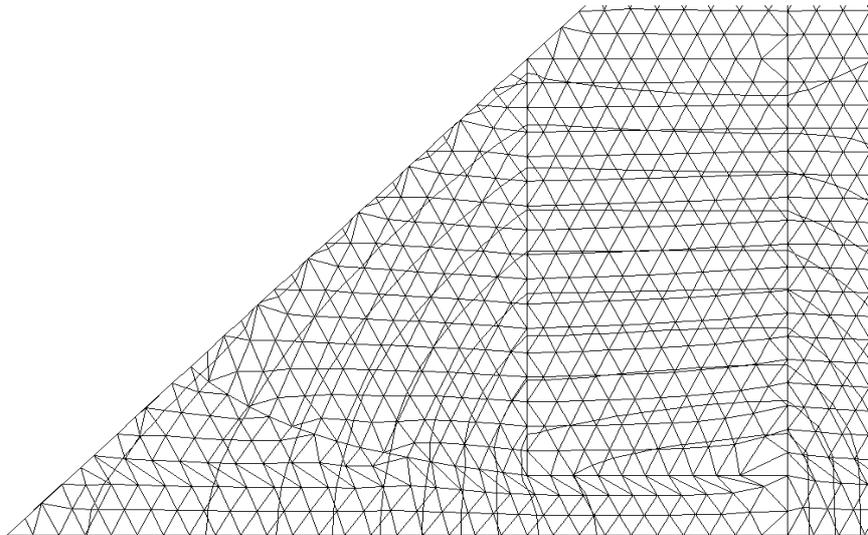


図 2 3 LATTICE と PANDIRAの出力。メッシュと磁力線の主要部分のみを示す。永久磁石はRECの場合。

4 - 1 - 8 ) PANDIRAの出力データ ( RECの場合 )

x (cm)	By (Gauss)	dBy/dx (T/m)
0.0000	-354.70	
0.20000	-559.32	-27.860
0.40000	-1103.8	-28.077
0.60000	-1661.0	-28.017
0.80000	-2220.6	-27.740
1.0000	-2774.0	-27.749
1.2000	-3327.9	-27.813
1.4000	-3882.5	-27.831
1.6000	-4437.1	-27.857
1.8000	-4992.0	-27.875
2.0000	-5546.9	-27.867
2.2000	-6102.2	-27.879
2.4000	-6658.6	-27.920
2.6000	-7215.0	-27.857
2.8000	-7766.8	-27.513
3.0000	-8310.1	-26.868
3.2000	-8835.5	-25.264
3.4000	-9305.6	-20.369
3.6000	-9606.4	-6.4784
3.8000	-9439.5	26.017
4.0000	-8477.5	68.165
4.2000	-6901.9	81.215
4.4000	-5369.3	70.477
4.6000	-4104.2	55.608
4.8000	-3106.5	44.367
5.0000	-2294.0	37.059

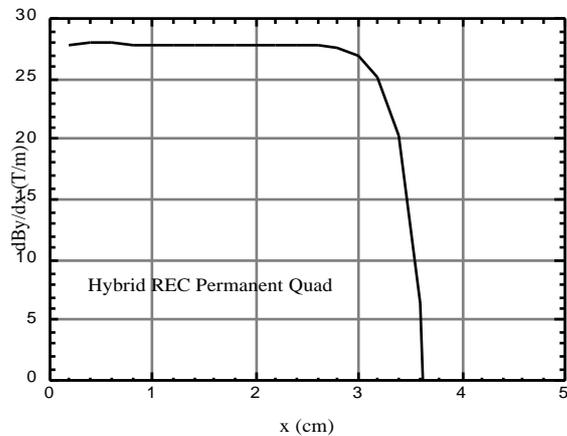


図 2 4 ハイブリッドREC永久4極磁石の磁場勾配分布。左の表で磁場勾配の符号を反転させてプロットした。

5.2000	-1595.5	33.018
5.4000	-963.38	30.499
5.6000	-406.43	23.527
5.8000	-72.489	8.9887
6.0000	0.0000	0.0000

#### 4 - 2 ) ハイブリッドH型2極永久磁石

##### 4 - 2 - 1 ) AUTOMESHの入力データ

1	Hybrid permanent bending magnet	プロブレム名。
2	\$reg nreg=5, dx=.2, dy=.2, xmax=20.0, ymax=11.0, npoint=5 \$	
3	\$po x=0.000, y=0.000 \$	問題領域とメッシュパラメータの指定。
4	\$po x=20.00, y=0.000 \$	x, y座標の単位はすべて cm である。
5	\$po x=20.00, y=11.00 \$	
6	\$po x=0.000, y=11.00 \$	
7	\$po x=0.000, y=0.000 \$	
8	\$reg mat=2, npoint=5 \$	鉄領域の指定 ( mat=2 )。
9	\$po x=0.000, y=2.000 \$	
10	\$po x=8.000, y=2.000 \$	
11	\$po x=8.000, y=4.000 \$	
12	\$po x=0.000, y=4.000 \$	
13	\$po x=0.000, y=2.000 \$	
14	\$reg mat=7, npoint=5 \$	永久磁石領域 ( mat=7 )。
15	\$po x=0.000, y=4.000 \$	
16	\$po x=8.000, y=4.000 \$	
17	\$po x=8.000, y=6.000 \$	
18	\$po x=0.000, y=6.000 \$	
19	\$po x=0.000, y=4.000 \$	
20	\$reg mat=2, npoint=7 \$	鉄領域の指定 ( mat=2 )。
21	\$po x=15.00, y=0.000 \$	
22	\$po x=18.00, y=0.000 \$	
23	\$po x=18.00, y=9.000 \$	
24	\$po x=0.000, y=9.000 \$	
25	\$po x=0.000, y=6.000 \$	
26	\$po x=15.00, y=6.000 \$	
27	\$po x=15.00, y=0.000 \$	
28	\$reg mat=1, cur=20., npoint=2 \$	磁場計算のためのダミー電流の指定。
29	\$po x=0.000, y=6.000 \$	
30	\$po x=8.000, y=6.000 \$	

##### 4 - 2 - 2 ) LATTICEの入力データ

1	s	
2	*81 0 *101 1 s	永久磁石問題の指定。

##### 4 - 2 - 3 ) AUTOMESHの入力データ ( Srフェライトの場合 )

1	0	dump番号。
---	---	---------

2	*18 1 *6 0 s	
3	7 1. -1	mat=7の領域の磁気特性データ。
4	-90. 1.0 s	磁化方向とパッキングファクターの指定。
5	-3350. 3500.	保持力と残留磁束密度の指定 (Srフェライトのデータ)。
6	-1	計算の終了。

5 - 1 - 4 ) LATTICEとPANDIRAの出力プロット (Srフェライトの場合)

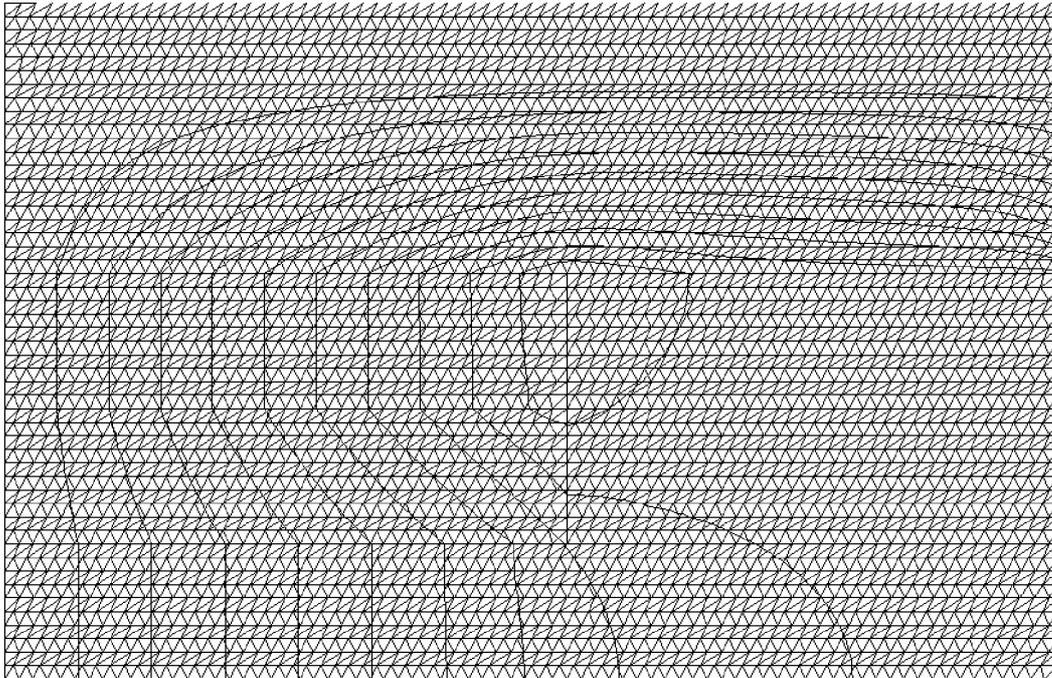


図 2 5 LATTICEとPANDIRAの出力。メッシュと磁力線。永久磁石はSrフェライトの場合。

4 - 2 - 5 ) PANDIRAの出力データ (Srフェライトの場合)

x (cm)	By (Gauss)	dBy/dx (G/cm)
0.0000	-1415.5	-1.9142e-05
0.20000	-1415.5	0.016700
0.40000	-1415.5	0.035223
0.60000	-1415.5	0.050106
0.80000	-1415.5	0.066573
1.0000	-1415.4	0.086516
1.2000	-1415.4	0.10677
1.4000	-1415.4	0.13121
1.6000	-1415.4	0.15173
1.8000	-1415.3	0.17781
2.0000	-1415.3	0.21070
2.2000	-1415.3	0.24707
2.4000	-1415.2	0.29596
2.6000	-1415.1	0.34915

2.8000	-1415.1	0.41696
3.0000	-1415.0	0.51450
3.2000	-1414.9	0.63736
3.4000	-1414.7	0.79045
3.6000	-1414.5	1.0006
3.8000	-1414.3	1.2996
4.0000	-1414.0	1.6940
4.2000	-1413.6	2.2258
4.4000	-1413.1	2.9472
4.6000	-1412.4	3.9179
4.8000	-1411.5	5.2446
5.0000	-1410.3	7.0226
5.2000	-1408.7	9.4679
5.4000	-1406.5	12.756
5.6000	-1403.5	17.199
5.8000	-1399.5	23.167
6.0000	-1394.1	31.044
6.2000	-1386.9	41.463
6.4000	-1377.3	55.019
6.6000	-1364.7	72.316
6.8000	-1348.1	93.986
7.0000	-1326.8	120.34
7.2000	-1299.8	151.05
7.4000	-1266.2	185.55
7.6000	-1225.5	221.88
7.8000	-1177.5	257.38
8.0000	-1122.7	289.51
8.2000	-1062.0	315.58
8.4000	-996.93	333.33
8.6000	-929.17	342.37
8.8000	-860.46	342.75
9.0000	-792.46	336.01
9.2000	-726.40	323.63
9.4000	-663.25	307.13
9.6000	-603.68	288.39
9.8000	-548.01	268.25
10.000	-496.41	247.92

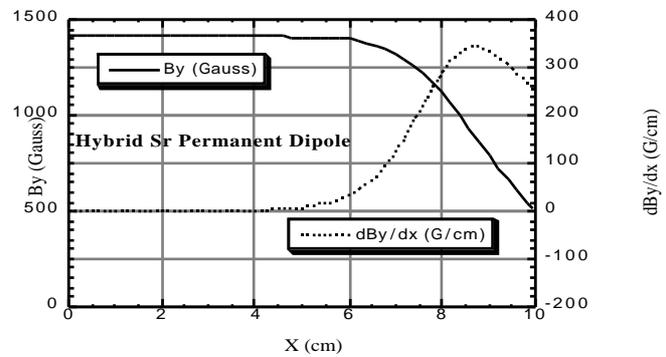


図 2 6 ハイブリッドSr フェライト  
永久 2 極磁石の磁場分布。左の表で  
磁場の符号を反転させてプロットし  
た。

#### 4 - 2 - 6 ) PANDIRAの入力データ ( RECの場合 )

1	0	dump番号。
2	*18 1 *6 0 s	
3	7 1. -1	
4	-90. 1.0 s	磁化方向とパッキングファクターの指定。
5	-10500. 11000.	保持力と残留磁束密度の指定 ( RECのデータ ) 。
6	-1	計算の終了。

#### 4 - 2 - 7 ) LATTICEとPANDIRAの出力プロット ( RECの場合 )

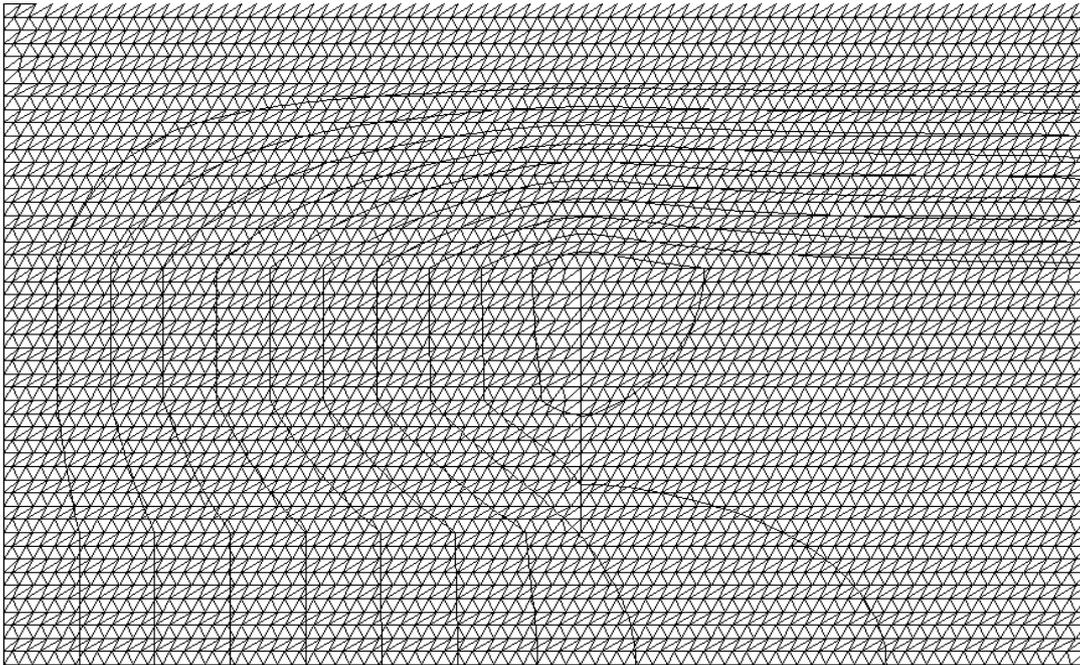


図 2 7 LATTICEとPANDIRAの出力。メッシュと磁力線。永久磁石はRECの場合。

#### 4 - 2 - 8 ) PANDIRAの出力データ ( RECの場合 )

x (cm)	By (Gauss)	dBy/dx (G/cm)
0.0000	-4389.3	0.0013237
0.20000	-4389.3	0.038310
0.40000	-4389.3	0.077938
0.60000	-4389.2	0.11675
0.80000	-4389.2	0.15930
1.0000	-4389.2	0.20297
1.2000	-4389.1	0.25309
1.4000	-4389.1	0.31010
1.6000	-4389.0	0.37266
1.8000	-4388.9	0.43944
2.0000	-4388.8	0.52699
2.2000	-4388.7	0.62295
2.4000	-4388.6	0.76417
2.6000	-4388.4	0.92928
2.8000	-4388.2	1.1382
3.0000	-4388.0	1.4154
3.2000	-4387.6	1.7990
3.4000	-4387.2	2.3080
3.6000	-4386.7	2.9621
3.8000	-4386.0	3.8450
4.0000	-4385.1	5.0612
4.2000	-4384.0	6.7041

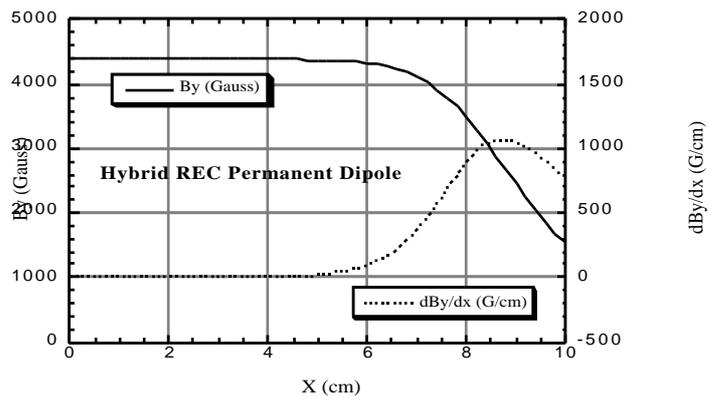


図 2 8 ハイブリッドREC 永久 2 極磁石の磁場分布。左の表で磁場の符号を反転させてプロットした。

4.4000	-4382.4	8.9534
4.6000	-4380.4	11.967
4.8000	-4377.6	16.090
5.0000	-4373.8	21.652
5.2000	-4368.8	29.229
5.4000	-4361.9	39.490
5.6000	-4352.7	53.294
5.8000	-4340.3	71.899
6.0000	-4323.6	96.404
6.2000	-4301.3	128.80
6.4000	-4271.5	170.97
6.6000	-4232.2	224.82
6.8000	-4180.8	292.21
7.0000	-4114.5	374.14
7.2000	-4030.3	469.70
7.4000	-3925.9	577.08
7.6000	-3799.3	690.07
7.8000	-3650.1	800.57
8.0000	-3479.6	900.52
8.2000	-3290.9	981.72
8.4000	-3088.4	1037.0
8.6000	-2877.6	1065.2
8.8000	-2663.8	1066.5
9.0000	-2452.2	1045.6
9.2000	-2246.7	1007.1
9.4000	-2050.2	955.69
9.6000	-1864.8	897.40
9.8000	-1691.5	834.73
10.000	-1531.0	771.34

4 - 3 ) POISSON, PANDIRAに組み込まれている磁気特性のデータ  
 POISSON, PANDIRAに組み込まれている磁気特性は次の低炭素鋼のデータである。

B (Gauss)	1/ $\mu$	$\mu$	H (Oe)
0.000	0.00061400	1629.4	0.0000
1890.000	0.00052900	1890.0	1.0000
2704.400	0.00044400	2249.9	1.2000
3649.300	0.00039600	2525.5	1.4400
4680.200	0.00037100	2692.9	1.7400
5757.200	0.00036300	2756.0	2.0900
6846.200	0.00036700	2725.4	2.5100
7918.100	0.00038100	2621.9	3.0200
8949.300	0.00040600	2464.7	3.6300
9921.500	0.00044000	2273.0	4.3700
10821.10	0.00048500	2061.9	5.2500

11639.80	0.00054200	1844.7	6.3100
12373.00	0.00061300	1631.0	7.5900
13020.60	0.00070000	1427.7	9.1200
13585.60	0.00080700	1239.0	10.970
14073.90	0.00093700	1067.6	13.180
14494.00	0.0010930	914.50	15.850
14856.00	0.0012830	779.64	19.060
15171.10	0.0015100	662.23	22.910
15451.40	0.0017820	561.01	27.540
15708.90	0.0021080	474.40	33.110
15955.20	0.0024950	400.77	39.810
16201.00	0.0029540	338.49	47.860
16455.60	0.0034970	285.97	57.540
16726.40	0.0041360	241.77	69.180
17018.90	0.0048870	204.61	83.180
17336.20	0.0057680	173.36	100.00
17679.10	0.0068000	147.05	120.23
18045.60	0.0080100	124.85	144.54
18431.80	0.0094280	106.06	173.78
18831.30	0.011095	90.130	208.93
19236.00	0.013058	76.580	251.19
19636.30	0.015379	65.020	301.99
20022.40	0.018134	55.150	363.08
20384.20	0.021414	46.700	436.52
20713.20	0.025337	39.470	524.81
21003.00	0.030041	33.290	630.96
21251.30	0.035696	28.010	758.58
21461.10	0.042496	23.530	912.01
21646.40	0.050654	19.740	1096.5
21869.10	0.060279	16.590	1318.3
22136.60	0.071596	13.970	1584.9
22458.10	0.084845	11.790	1905.5
22844.40	0.10028	9.9700	2290.9
23308.70	0.11816	8.4600	2754.2
23866.60	0.13874	7.2100	3311.3
24537.30	0.16225	6.1600	3981.1
25343.40	0.18886	5.2900	4786.3
26312.40	0.21869	4.5700	5754.4
27477.20	0.25178	3.9700	6918.3

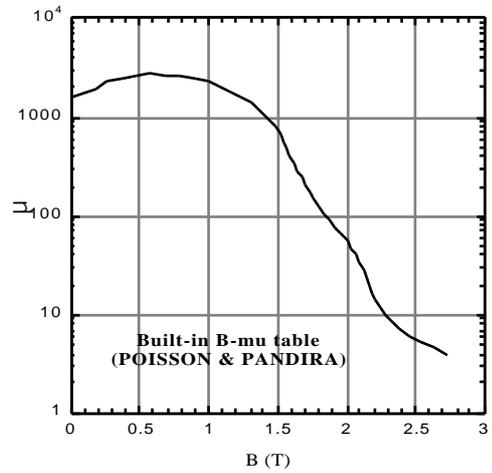


図 2 9 POISSON, PANDIRAに組み込まれている低炭素鋼の磁気特性表。

### 5) 各種永久磁石の減磁曲線

各種永久磁石に関する特性の比較を図30に示す。

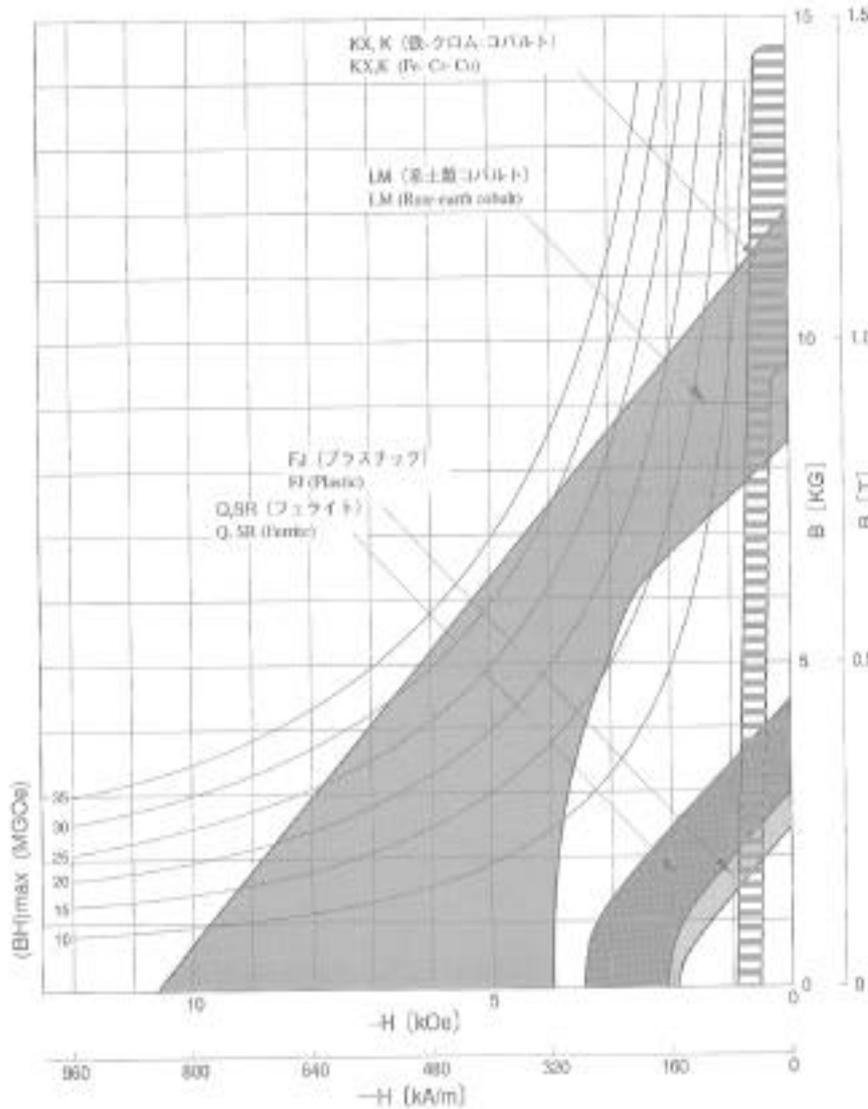


図30 各種永久磁石の減磁曲線(トーチン)。上の磁場計算ではRECとフェライトの特性領域で減磁曲線を直線近似して求めた縦軸と横軸の交点の値を採用している。

### 6) LINDAに組み込まれている磁気特性のデータ

LINDAに組み込まれている磁気特性は次の低炭素鋼のデータである。

$B^2$ (T <sup>2</sup> )	$1/\mu$	B (T)	$\mu$	H (Oe)
0.0000	4.0000e-05	0.0000	25000	0.0000
0.25000	4.3000e-05	0.50000	23256	0.21500
0.36000	4.4000e-05	0.60000	22727	0.26400
0.49000	4.6400e-05	0.70000	21552	0.32500
0.64000	4.8100e-05	0.80000	20790	0.38500
0.81000	5.1100e-05	0.90000	19569	0.46000
1.0000	5.8000e-05	1.0000	17241	0.58000
1.2100	6.6400e-05	1.1000	15060	0.73000
1.4400	7.8300e-05	1.2000	12771	0.94000
1.6900	9.0800e-05	1.3000	11013	1.1800

1.9600	0.00010300	1.4000	9708.7	1.4420
2.2500	0.00011900	1.5000	8403.4	1.7850
2.5600	0.00013600	1.6000	7352.9	2.1760
2.8900	0.00016800	1.7000	5952.4	2.8560
3.2400	0.00023600	1.8000	4237.3	4.2480
3.6100	0.00047900	1.9000	2087.7	9.1010
4.0000	0.0013000	2.0000	769.23	26.000
4.4100	0.0050000	2.1000	200.00	105.00
4.6225	0.014000	2.1500	71.430	301.00
4.8400	0.036400	2.2000	27.470	800.80
5.2900	0.078200	2.3000	12.790	1798.6
5.7600	0.11700	2.4000	8.5500	2808.0
6.2500	0.15200	2.5000	6.5800	3800.0
25.000	0.57500	5.0000	1.7400	28750
100.00	0.79400	10.000	1.2600	79400

この磁気特性表のB- $\mu$ の関係をプロットしたものが図3-1である。

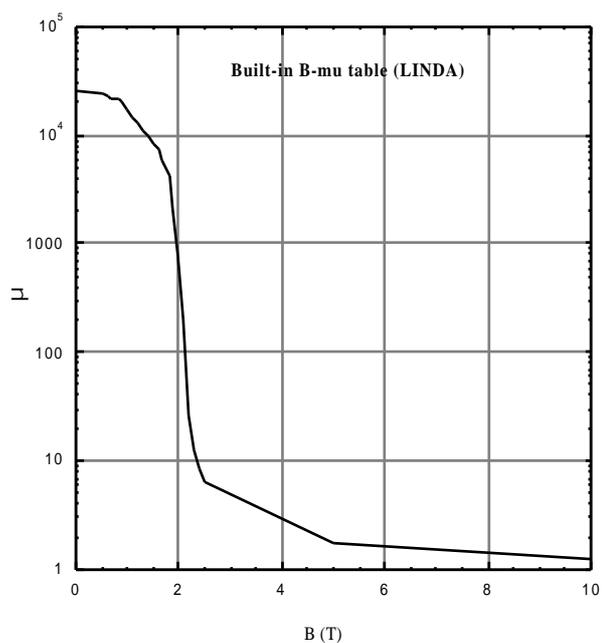


図3-1 LINDAに組み込まれている低炭素鋼の磁気特性。

## 5 . 超伝導電磁石の磁場解析

鉄心を持つ場合と持たない場合の超伝導 4 極電磁石について、対称性を考慮して第 1 象限に位置する 1 / 8 形状に対して POISSON による磁場解析を行う。

### 5 - 1 ) AUTOMESH の入力データ

鉄心を有する場合、問題領域を x 方向に 20cm、y 方向に 20 cm の三角形としたときの入力データを示す。

```
1/8 superconducting Q-magnet
```

問題のタイトル行

```
$reg nreg=5, npoint=4
```

入力領域の数(nreg=5)、問題領域の指定。

```
xmin=.0000, xmax=20.0000, dx=0.10000, ymin=0.0000, ymax=20.0000
```

```
$end
```

```
$po x=0.000000,y=0.000000 $end
```

問題領域の範囲を指定。

```
$po x=20.00000,y=0.000000 $end
```

```
$po x=20.00000,y=20.00000 $end
```

```
$po x=0.000000,y=0.000000 $end
```

```
$reg npoint=43, mat=2 $end
```

鉄心領域の座標を指定。鉄の特性は組み込まれているデータを使用(mat=2)。

```
$po x=8.000000, y=0.000000 $end
```

```
$po x=5.656900, y=5.65690 $end
```

```
$po x=15.00000, y=0.000000 $end
```

```
$po x=5.874600, y=5.43040 $end
```

```
$po x=14.98840, y=0.58890 $end
```

```
$po x=6.083300, y=5.19560 $end
```

```
$po x=14.95380, y=1.17690 $end
```

```
$po x=6.282500, y=4.95270 $end
```

```
$po x=14.89600, y=1.76310 $end
```

```
$po x=6.472100, y=4.70230 $end
```

```
$po x=14.81530, y=2.34650 $end
```

```
$po x=6.651800, y=4.44460 $end
```

```
$po x=14.71180, y=2.92640 $end
```

```
$po x=6.821100, y=4.18000 $end
```

```
$po x=14.58550, y=3.50170 $end
```

```
$po x=6.980000, y=3.90900 $end
```

```
$po x=14.43680, y=4.07160 $end
```

```
$po x=7.128100, y=3.63190 $end
```

```
$po x=14.26580, y=4.63530 $end
```

```
$po x=7.265100, y=3.34930 $end
```

```
$po x=14.07290, y=5.19180 $end
```

```
$po x=7.391000, y=3.06150 $end
```

```
$po x=13.85820, y=5.74020 $end
```

```
$po x=7.505500, y=2.76890 $end
```

```
$po x=13.62220, y=6.27990 $end
```

```
$po x=7.608500, y=2.47210 $end
```

```
$po x=13.36510, y=6.80990 $end
```

```
$po x=7.699600, y=2.17150 $end
```

```
$po x=13.08740, y=7.32930 $end
```

```
$po x=7.779000, y=1.86760 $end
```

```
$po x=12.78960, y=7.83750 $end
```

```
$po x=7.846300, y=1.56070 $end
```

```
$po x=12.47200, y=8.33350 $end
```

```
$po x=7.901500, y=1.25150 $end
```

```
$po x=12.13530, y=8.81680 $end
```

```
$po x=7.944500, y=0.94030 $end
```

```
$po x=11.77980, y=9.28640 $end
```

```
$po x=7.975300, y=0.62770 $end
```

```
$po x=11.40610, y=9.74170 $end
```

```
$po x=7.993800, y=0.31410 $end
```

```
$po x=11.01480, y=10.1820 $end
```

```
$po x=8.000000, y=0.00000 $end
```

```
$po x=10.60660, y=10.6066 $end
```

```
$reg npoint=23, mat=1, cur=80000.0 $end
```

内側コイル領域の座標を指定。全電流(cur=80000AT)。

```
$po x=3.501200,y=0.000000 $end
```

```
$po x=3.032130,y=1.750600 $end
```

```
$po x=4.501540,y=0.000000 $end
```

```
$po x=3.119590,y=1.589510 $end
```

```

$po x=4.495370,y=0.235590 $end
$po x=4.476880,y=0.470540 $end
$po x=4.446120,y=0.704200 $end
$po x=4.403170,y=0.935920 $end
$po x=4.348160,y=1.165090 $end
$po x=4.281220,y=1.391050 $end
$po x=4.202550,y=1.613210 $end
$po x=4.112360,y=1.830940 $end
$po x=4.010900,y=2.043660 $end
$po x=3.898450,y=2.250770 $end

```

```

$po x=3.198500,y=1.424070 $end
$po x=3.268650,y=1.254720 $end
$po x=3.329840,y=1.081930 $end
$po x=3.381900,y=0.906180 $end
$po x=3.424690,y=0.727940 $end
$po x=3.458090,y=0.547710 $end
$po x=3.482020,y=0.365980 $end
$po x=3.496400,y=0.183240 $end
$po x=3.501200,y=0.000000 $end

```

```

$reg npoint=21, mat=1, cur=72000.0 $end
$po x=4.602410,y=0.000000 $end
$po x=5.602600,y=0.000000 $end
$po x=5.598380,y=0.217240 $end
$po x=5.585750,y=0.434160 $end
$po x=5.564710,y=0.650420 $end
$po x=5.535310,y=0.865710 $end
$po x=5.497580,y=1.079690 $end
$po x=5.451580,y=1.292050 $end
$po x=5.397380,y=1.502460 $end
$po x=5.335060,y=1.710620 $end
$po x=5.264720,y=1.916200 $end

```

外側コイルの座標を指定。全電流(cur=72000AT)。

```

$po x=4.324850,y=1.574120 $end
$po x=4.382630,y=1.405230 $end
$po x=4.433830,y=1.234240 $end
$po x=4.478350,y=1.061390 $end
$po x=4.516140,y=0.886940 $end
$po x=4.547130,y=0.711160 $end
$po x=4.571290,y=0.534310 $end
$po x=4.588570,y=0.356650 $end
$po x=4.598950,y=0.178460 $end
$po x=4.602410,y=0.000000 $end

```

```

$reg npoint=2, ibound=0 $end
$po x=0.000000,y=0.000000 $end
$po x=20.00000,y=20.00000 $end

```

4 5 度対称線の指定。

以上の座標をプロットした電磁石の入力形状を図 3 2 に示す。鉄心を持たない場合は上の入力データから鉄心の座標を除き、それに合わせて問題領域を 8 x 8 cm に小さくした。

### 5 - 2 ) LATTICE の入力データ

```

s
*46 4 s

```

入力データのスキップ。  
対称 4 極電磁石の指定。

LATTICE で作成した三角メッシュを図 3 3 に示す。

### 5 - 3 ) POISSON の入力データ

```

tty
0
*6 0 *85 1.0e-8 s

```

キーボードからの入力を指示。  
LATTICE の出力のダンブ番号。  
指定した鉄の磁気特性を用いる(MODE=0)。  
空気領域のポテンシャルの収束条件(EPSILA=1.0e-8)。  
計算の終了を指示。

-1

鉄心がある場合と無い場合について超伝導4極電磁石の磁場勾配を計算した結果を図34に示す。鉄心があることにより磁場勾配が約30%増加していることが分かる。コイルの電流指定は、内側コイルの全電流を80000AT、外側コイルの全電流を72000ATとした。また、各コイルの角度はそれぞれ30度と20度である。

計算された単位長さあたりの蓄積エネルギーは611.6 J/mである。

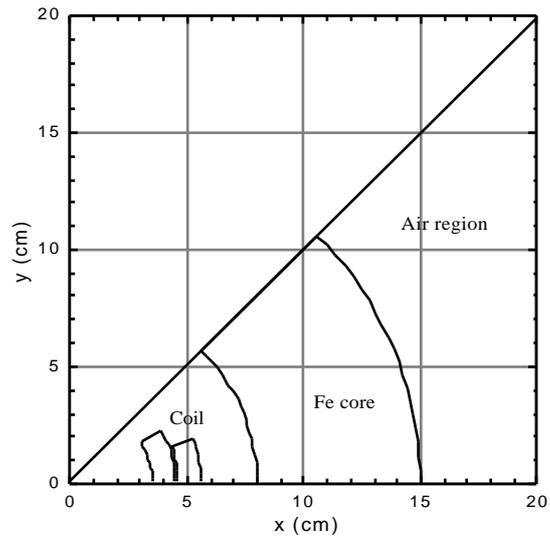
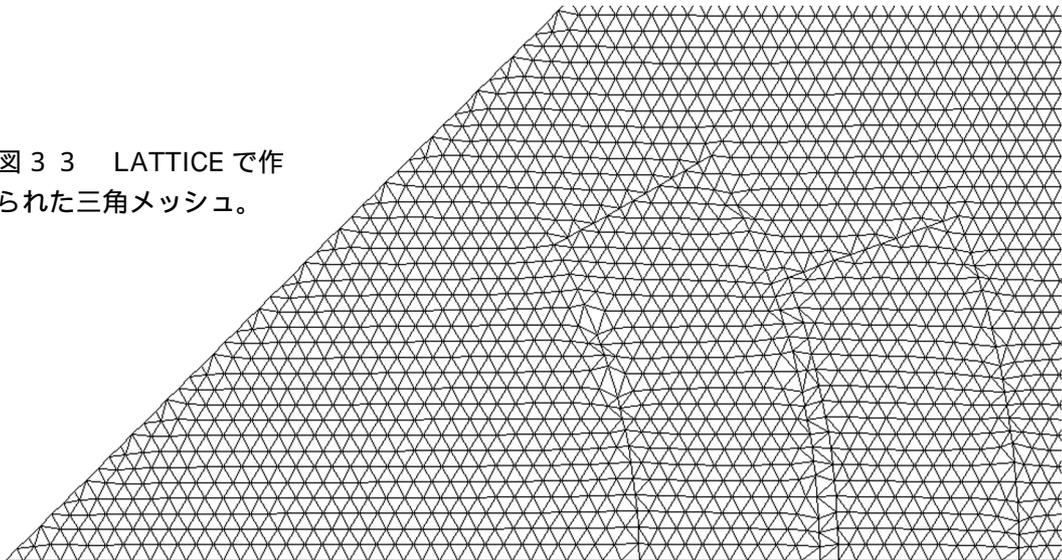


図32 入力座標のプロット(1/8形状)。

図33 LATTICEで作られた三角メッシュ。



POISSON で出力された磁場勾配の一部を次表に示す。

x (cm)	鉄心の無い場合	鉄心の有る場合
	gradient (T/m)	gradient (T/m)
0.0000	91.219	119.17
0.10000	90.698	118.52
0.20000	90.701	118.53
0.30000	90.705	118.53
0.40000	90.969	118.88
0.50000	90.788	118.64
0.60000	90.595	118.39
0.70000	90.586	118.37
0.80000	90.621	118.42
0.90000	90.654	118.45

1.0000	90.693	118.50
1.1000	90.749	118.56
1.2000	90.823	118.64
1.3000	90.919	118.75
1.4000	91.035	118.88
1.5000	91.171	119.04
1.6000	91.326	119.21
1.7000	91.499	119.41
1.8000	91.688	119.63
1.9000	91.884	119.87
2.0000	92.084	120.11
2.1000	92.273	120.35
2.2000	92.438	120.57
2.3000	92.566	120.77
2.4000	92.635	120.91
2.5000	92.624	120.98
2.6000	92.505	120.97
2.7000	92.258	120.83
2.8000	91.863	120.55
2.9000	91.295	120.12
3.0000	90.540	119.53
3.1000	89.607	118.78
3.2000	88.542	117.95
3.3000	88.027	117.91
3.4000	89.152	118.64

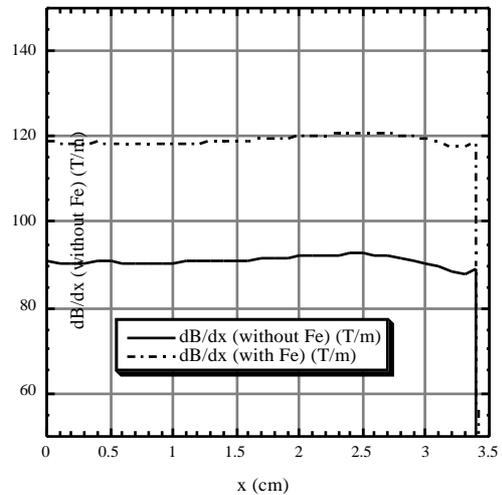


図 3 4 鉄心がある場合と無い場合の磁場勾配の比較。

#### 5 - 4 ) POISSON によるハーモニック解析

この計算ではメッシュサイズとの関係で小さな楔型のスペーサーを入れて多極成分をキャンセルすることは困難であるので、多極成分には特に注意を払っていない。しかし、参考のために前項で得られた POISSON の出力結果から、例として基準半径 1 cm におけるベクトルポテンシャルを計算し、10 個 (76 極) までの多極成分を求める。

POISSON の入力は

```
tty
1
*110 10 10 1.0 45.0 1.0 s
```

-1

キーボードからの入力を指示。  
 POISSON 出力のダンプ番号。  
 順に、求める多極成分の個数 (ここでは 10 個)、  
 円弧の等分割点数 (ここでは 10 分割点)、  
 ベクトルポテンシャルを求める半径 (cm)、  
 円弧の角度 (deg)、基準半径 (cm)。  
 計算の終了を指示。

である。ハーモニック解析結果を次に示す。

HARMONIC ANALYSIS

INTEGRATION RADIUS = 1.00000

TABLE FOR INTERPOLATED POINTS

n	ANGLE	x COORD	y COORD	KF	LF	VEC.POT.
1	.0000	1.0000	.0000	11	1	5.91897E+03
2	5.0000	.9962	.0872	11	2	5.82900E+03
3	10.0000	.9848	.1736	11	3	5.56183E+03
4	15.0000	.9659	.2588	11	4	5.12562E+03
5	20.0000	.9397	.3420	10	5	4.53368E+03
6	25.0000	.9063	.4226	11	6	3.80408E+03
7	30.0000	.8660	.5000	10	7	2.95902E+03
8	35.0000	.8192	.5736	10	8	2.02418E+03
9	40.0000	.7660	.6428	9	8	1.02792E+03
10	45.0000	.7071	.7071	8	9	2.05734E-01

TABLE FOR VECTOR POTENTIAL COEFFICIENTS

NORMALIZATION RADIUS = 1.00000

$$A(x,y) = \text{Re}\{ \text{SUM} (a_n + i b_n) * (Z/R)**n \}$$

n	a <sub>n</sub>	b <sub>n</sub>	ABS(c <sub>n</sub> )
2	5.9186E+03	.0000E+00	5.9186E+03
6	2.7007E-01	.0000E+00	2.7007E-01
10	1.3395E-01	.0000E+00	1.3395E-01
14	-8.7023E-02	.0000E+00	8.7023E-02
18	5.0673E-02	.0000E+00	5.0673E-02
22	-3.5156E-02	.0000E+00	3.5156E-02
26	2.3980E-02	.0000E+00	2.3980E-02
30	-1.3075E-02	.0000E+00	1.3075E-02
34	3.6892E-03	.0000E+00	3.6892E-03
38	4.8828E-03	.0000E+00	4.8828E-03

TABLE FOR FIELD COEFFICIENTS

NORMALIZATION RADIUS = 1.00000

$$(B_x - i B_y) = i * \text{SUM} n*(a_n + i b_n)/R * (Z/R)**(n-1)$$

n	n(a <sub>n</sub> )/R	n(b <sub>n</sub> )/R	ABS(n(c <sub>n</sub> )/R)
2	1.1837E+04	.0000E+00	1.1837E+04
6	1.6204E+00	.0000E+00	1.6204E+00
10	1.3395E+00	.0000E+00	1.3395E+00
14	-1.2183E+00	.0000E+00	1.2183E+00
18	9.1211E-01	.0000E+00	9.1211E-01
22	-7.7344E-01	.0000E+00	7.7344E-01
26	6.2348E-01	.0000E+00	6.2348E-01
30	-3.9225E-01	.0000E+00	3.9225E-01
34	1.2543E-01	.0000E+00	1.2543E-01
38	1.8555E-01	.0000E+00	1.8555E-01

この最後の部分が基準半径における多極磁場成分である。順に磁極数、ノーマル成分の大きさ、スキュー成分の大きさ、各成分の絶対値を与える。2次（4極）成分が主であるが、12極、20極などの高次成分も少し含まれている。

参考 磁気等方性の場合と磁気異方性の場合の  $B^2 - \gamma$  テーブル

$\gamma_L$  と  $\gamma_C$  はそれぞれ圧延方向とそれに直角な方向に測った KEK-PS 用磁気異方性ケイ素鋼板の透磁率の逆数、 $\langle \gamma_{L+C} \rangle$  は両者の平均値である。また、 $\gamma_{50A600}$  は磁気異方性のない中品位のケイ素鋼板の透磁率の逆数である。

$B^2$ [T <sup>2</sup> ]	50A600	$\langle L+C \rangle$	L	C
0.00000	0.00100	0.00010000	0.00004000	0.00016000
0.25000	0.000250	0.00010650	0.00004300	0.00017000
0.36000	0.000222	0.00011100	0.00004400	0.00017800
0.49000	0.000200	0.00011470	0.00004640	0.00018300
0.64000	0.000193	0.00011955	0.00004810	0.00019100
0.81000	0.000189	0.00012855	0.00005110	0.00020600
1.00000	0.000192	0.00014400	0.00005800	0.00023000
1.21000	0.000200	0.00016270	0.00006640	0.00025900
1.44000	0.000222	0.00018915	0.00007830	0.00030000
1.69000	0.000263	0.00023390	0.00009080	0.00037700
1.96000	0.000357	0.00035450	0.00010300	0.00057900
2.25000	0.000588	0.00075950	0.00011900	0.00140000
2.56000	0.001429	0.00175300	0.00013600	0.00337000
2.89000	0.002857	0.00302400	0.00016800	0.00588000
3.24000	0.004000	0.00506300	0.00023600	0.00989000
3.61000	0.006840	0.00663950	0.00047900	0.01280000
4.00000	0.013820	0.00880000	0.00130000	0.01630000
4.41000	0.027520	0.01320000	0.00500000	0.02140000
4.62250		0.02000000	0.01400000	0.02600000
4.84000		0.03640000	0.03640000	0.03640000
5.29000		0.07820000	0.07820000	0.07820000
5.76000		0.11700000	0.11700000	0.11700000
6.25000		0.15200000	0.15200000	0.15200000
25.00000		0.57500000	0.57500000	0.57500000
100.00000		0.79400000	0.79400000	0.79400000

## 参考文献

### 第 1 章

- (1) S. Humphries, Jr., "Principles of Charged Particle Acceleration." John Wiley & Sons, 1986.
- (2) M.S. Livingston and J.P. Blewett, "Particle Accelerator," McGraw-Hill, 1962.
- (3) R. Kollath, "Particle Accelerators," Sir Isaac Pitman and Sons Ltd., 1967.
- (4) H. Wiedemann, "Particle Accelerator Physics," Springer-Verlag, 1993.
- (5) E. Persico et al, "Principles of Particle Accelerators," W.A. Benjamin Inc., 1968.
- (6) J.J. Livingood, "Principles of Cyclic Particle Accelerators," D. Van Nostrand Inc., 1961.
- (7) J. Rosenblatt, "Particle Acceleration," Mathuen & Co. Ltd., 1968.
- (8) M.S. Livingston, "High-Energy Accelerators," Interscience Pub. Inc., 1954.

### 第 2 章

- (1) J.D. Jackson, "Classical Electrodynamics," 3rd Ed., John Wiley & Sons, 1999.
- (2) V.D. Barger and M.G. Olsson, "Classical Electricity and Magnetism, A Contemporary Perspective," Allyn and Bacon, Inc., 1987. 小林徹郎、土佐幸子訳「電磁気学 I [新しい視点にたつて]」、培風館、1991.
- (3) G.V. Brown and L. Flax, "Superposition of Semi-Infinite Solenoids for Calculating Magnetic Fields of Thick Solenoids," J. App. Phys., 35(1964)1764-7.

### 第 3 章

- (1) L.U. Hibbard, "The Birmingham Proton Synchrotron," Nucleonics, 7(1950)30-43.
- (2) P.J. Bryant and K. Johnsen, "The Principle of Circular Accelerator and Storage Rings," Cambridge University Express, 1993.
- (3) E.D. Courant and H.S. Snyder, "Theory of the Alternating-Gradient Synchrotron," Ann. Phys., 3(1958)1-48.

### 第 4 章

- (1) A.P. Banford, "The Transport of Charged Particle Beams," E. & F.N. Spon Ltd., 1966.
- (2) K.S. Steffen, "High Energy Beam Optics," Interscience Pub., 1965.
- (3) SLAC Linear Collider Conceptual Design Report, SLAC-229, 1980.
- (4) E. Regenstreif, "The CERN Proton Synchrotron," CERN-59-29, 1959.
- (5) G. Parzen, "Magnetic Fields for Transporting Charged Beams," BNL-50536/ISA 76-13, 1976.
- (6) E.A. Taylor, "Quadrupole Magnet Design," Proc. ICHEA, Moscow, 1964, pp.208-217.
- (7) R.A. Kilpatrick, "Collins Quadrupole Magnets and Sextupole Magnets for A 200-GeV Proton Synchrotron," Proc. ICHEA, Moscow, 1964, pp.262-267.
- (8) 1-2 GeV Synchrotron Radiation Source, LBL PUB-5172 Rev., 1986.

- (9) J.P. Gourber and L. Resegotti, "Implication of the Low Field Levels in the LEP Magnets," IEEE Trans., NS-26 (1979) 3185-7.
- (10) J. Billan et al, "Influence of Mortar-Induced Stresses on the Magnetic Characteristics of the LEP Dipole Cores," IEEE Trans., MAG-24 (1988) 843-5.
- (11) N. Marks, "The SPS Prototype Multipole Magnet," MT-6, Brastislava, 1977, pp.528-534.
- (12) A.T. Visser and R.F. Nissen, "Pulsed Septum Magnet and Power Supply for the 8 GeV Beam Transfer Line at the National Accelerator Laboratory," IEEE Trans., NS-18 (1971) 991-3.
- (13) M. Foss et al, "A Transformer Septum Magnet," IEEE Trans., NS-26(1979)4024-6.
- (14) L. Evans et al, "The Steel Septum Magnets for Beam Splitting at the CERN SPS," MT-6, Brastislava, 1977, pp.498-502.
- (15) G.E. Fischer, "Iron Dominated Magnets," AIP Conf. Proc. 153, AIP, 1987, pp.1120-1227.
- (16) C.M. Braams, "Edge Effect in Charged-Particle Analyzing Magnets," Nucl. Instr. Meth., 26(1964)83-89.

## 第5章

- (1) J. Billan and Ph. Lebrun, "Use of Silicon Steel for Low-hysteresis D.C. Accelerator Electromagnets," CERN LEP-MA/87-45, 1987.
- (2) H. Brechna, "Materials in Electromagnets and their Properties," Proc. MT-2, Oxford, 1967, pp.305-329.
- (3) R.M. Bozorth, "Ferromagnetism," Von Nostrand Co. , Inc., New York, 1964.
- (4) 近角聡信, "強磁性体の物理," 裳華房, 1966.
- (5) C. Kittel, "Physical Theory of Ferromagnetic Domains," Rev. Mod. Phys., 21(1949)541-583.
- (6) C.W. Chen, "Magnetism and Metallurgy of Soft Magnetic Materials," North-Holland, 1977.
- (7) 茅誠司, 「強磁性」、岩波全書、1974.
- (8) エル・ヴェ・キレンスキー「磁性体の物理」(石井力、川畑有郷、鳥谷部達 訳)、総合科学出版、1973.
- (9) 太田恵造, 「磁気工学の基礎」、共立全書、1999.
- (10) 山田一、宮澤永次郎、別所一夫, 「基礎磁気工学」、学献社、1989.

## 第6章

- (1) S. Schwaigerer, 配管工学ハンドブック、川下研介、若林鐵生監訳、森北出版
- (2) 溶接便覧、改訂3版、溶接学会編、丸善.
- (3) 機械設計便覧、第3版、機械設計便覧編集委員会、丸善.
- (4) M.S. Livingston and J.P. Blewett, "Particle Accelerator," McGraw-Hill, 1962.
- (5) H. Laeger et al, "Production of the Soft Magnetic Steel Laminations for the LEP Dipole Magnets," IEEE Trans., MAG-24(1988) 835-7.
- (6) G. Liptak et al, "Radiation Tests on Selected Electrical Insulating Materials for High-Power

and High Voltage Application," CERN 85-02, 1985.

- (7) M.H. Van de Voorde and C. Restat, "Selection Guide to Organic Materials for Nuclear Engineering," CERN 72-7, 1972.
- (8) K. Endo et al, "Estimation of Radiation Dose to Epoxy Resin by IR Spectrophotometry," EPAC96, Barcelona, 1996, pp.2192-4.

## 第 7 章

- (1) E. Gregory, "Conventional Wire and Cable Technology," AIP Conf. Proc. 249, AIP, pp.1198-1229.
- (2) K.H. Mess et al, "Superconducting Accelerator Magnets," World Science, 1996.
- (3) S. Wolff, "Superconducting Accelerator Magnet Design," AIP Conf. Proc. 249, AIP, pp.1159-1197.

## 第 8 章

- (1) K. Halbach, "Design of Permanent Multipole Magnets with Oriented Rare Earth Cobalt Material," NIM, 169(1980)1-10.
- (2) K. Halbach, "Physical and Optical Properties of Rare Earth Cobalt Magnets," NIM, 187(1981)109-117.
- (3) K. Halbach, "Perturbation Effects in Segmented Rare Earth Cobalt Multipole Magnets," NIM, 198(1982)213-215.
- (4) G.B. Bowden, "Magnetic Forces inside Permanent Magnet Assemblies," SLAC ABC Technical note No. 067, 1992.
- (5) R.P. Walker, "PMU3D - A Program for Three-dimensional Field Calculations on Periodic Permanent Magnet Systems," Daresbury Laboratory, DL/SCI/TM54A, 1987.
- (6) M.W. Fan et al, "PMU3D - A Program for Three-dimensional Field Calculations on Periodic Permanent Magnet Systems," Daresbury Laboratory, DL/SCI/TM29A, 1981.
- (7) R.G. Gluckstern and R.F. Holsinger, "Variable Strength Focusing with Permanent Magnet Quadrupoles," Conf. Charged Particle Optics, Giessen, 1980.
- (8) B.C. Brown et al, "Hybrid Permanent Magnet Quadrupoles for the Recycler Ring at Fermilab," Proc. MT-15, 1997, pp.183-6.
- (9) B.C. Brown et al, "Hybrid Permanent Magnet Gradient Dipoles for the Recycler Ring at Fermilab," Proc. MT-15, 1997, pp.161-4.
- (10) R. Yamada et al, "Recycler Model Magnet Test on Temperature Compensation for Strontium Ferrite," Fermilab TM-1950, 1995.
- (11) K. Endo and M. Masuzawa, "Hybrid Permanent Magnets for Accelerator Applications," Proc. 12th Symp. Acc. Sci. and Tech., Wako, 1999, pp.296-8.
- (12) M. McCaig, "Permanent Magnets in Theory and Practice," Pentech Press, 1977.

## 第 9 章

- (1) Los Alamos Accelerator Code Group, "POISSON/SUPERFISH Reference manual," LANL, LA-UR-87-126, 1978.
- (2) A.M. Winslow, "Numerical Solution of the Quasilinear Poisson Equation in a Nonuniform Triangle Mesh," J. Comp. Phys., 2(1967)149-172.
- (3) 寺澤寛一, "数学概論," 岩波書店, 1959.

## 第 10 章

- (1) Los Alamos Accelerator Code Group, "User's Guide for the POISSON/SUPERFISH Group of Codes," LA-UR-87-115, 1987.
- (2) K. Endo and M. Kihara, "Manual of Magnetostatic Program LINDA (Japanese Version)," KEK Internal Report, ACCELERATOR-1, 1972.
- (3) K. Endo, "Operational Manual of Two-Dimensional Magnetostatic Program TRIM (Japanese Version)," KEK Internal Report, ACCELERATOR-2, 1974.