基礎から応用まで

電子回路概論

大学協同利用機関法人
高エネルギー加速器研究機構加速器研究施設
名誉教授

総合研究大学院大学
高エネルギー加速器研究科
名誉教授

平松成範

はじめに

本稿は総合研究大学院大学の基盤研究機関である高エネルギー加速器研究機構にて、加速器科学を専攻する大学院学生のために筆者が講義してきた「電子回路概論」の講義ノートを基に、更に現代の信号検出及び処理に携わる研究者や技術者の要請に答えるべく、デジタルフィルター等のいくつかの項目を追加してまとめたものである。近年デジタル技術の発展に伴い、広く研究分野及び開発、製造分野にけるアナログ技術者の減少は危機的状況にある。あらゆる信号の検出はアナログ量で行われるため、いくらデジタル技術が進歩してもアナログ技術が不要となることはなく、エレクトロニクスに携わる研究者や技術者にとってアナログ技術は最低限不可欠の技術である。技術は経験の積み重ねによりある程度の発展成長は期待できるが、新しいものを開発するような場面においては根本原理に立ち返って問題点を考え直すことが必要となる。そこで本稿はアナログ電子回路について、回路例を示すだけではなくできるだけ原理的な事柄から解説するよう心がけた。アナログ電子回路に悩む諸兄に本稿が少しでも資することができれば幸いである。

アナログ技術者のための

電 子 回 路

目 次

１章　電子回路の基礎

1-1　受動素子の性質と基本回路

電子回路は抵抗 R、コンデンサー C、インダクター（コイル）L 等の受動素子と、トランジスター等のエネルギー増幅作用を有する能動素子の組み合わせで構成され、信号増幅、フィルタリング等種々の機能を実現するものである。電子回路への導入としてまず簡単な受動素子の性質と基本的な回路を概観する。

(a)RC 回路

a-1 コンデンサー（Capacitance）

コンデンサーの記号は C と書き、単位は F（=クーロン／V）である。コンデンサーの極板に蓄えられている電荷 Q は極板間の電圧 V に比例し

$$Q = CV \tag{1.1.1}$$

により静電容量 C が定義される（図 1-1）。極板に流れ込む電流 I は

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\frac{dV}{dt} \tag{1.1.2}$$

である。

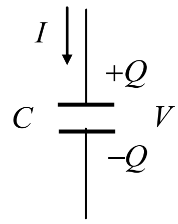


図 1-1　コンデンサー

a-2 積分回路

抵抗 R とコンデンサー C を図 1-2 のように接続した回路を積分回路（またはローパスフィルター（LPF））という。電圧電流の関係は

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= IR + V_2 \\ I &= C\frac{dV_2}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{1.1.3}$$

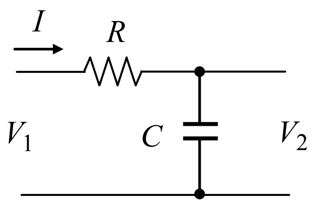


図 1-2　積分回路

で与えられる。これより

$$\frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2}{RC} = \frac{V_1}{RC} \tag{1.1.4}$$

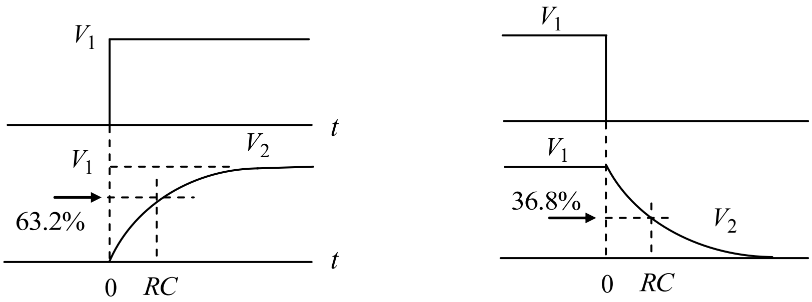
$t = 0$ で $V_2 = 0$、$t > 0$ で $V_1 = const.$ なる解は

$$V_2 = (1 - e^{-t/RC})V_1 \tag{1.1.5}$$

となる。RCは積分回路の時定数と呼ばれる。また、$t \le 0$で$V_1 = const.$、$t > 0$で$V_1 = 0$のときは

$$V_2 = V_1 e^{-t/RC} \tag{1.1.6}$$

である（図 1-3）。



(a)　(b)

図 1-3　積分回路の応答

a-3 定電流によるコンデンサーの充電

コンデンサーの電極に一定電流Iが流れ込むとすると

$$V = \frac{1}{C}\int_0^t I dt = \frac{It}{C} \tag{1.1.7}$$

より、コンデンサー両端の電圧は時間に比例して上昇する。これは三角波や鋸歯状波の発生に利用される。

(a)　(b)

図 1-4　定電流によるコンデンサーの充電

a-4 微分回路

図 1-3 の抵抗とコンデンサーを入れ換えた図 1-5 の回路を微分回路（またはハイパスフィルター（HPF））という。

$$\left.\begin{aligned} I &= C\frac{d(V_1 - V_2)}{dt} \\ V_2 &= RI \end{aligned}\right\} \tag{1.1.8}$$

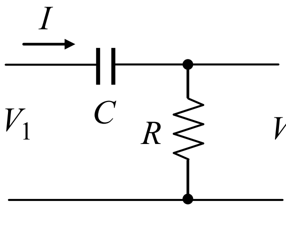


図 1-5　微分回路

より

$$\frac{dV_2}{dt} + \frac{V_2}{CR} = \frac{dV_1}{dt} \tag{1.1.9}$$

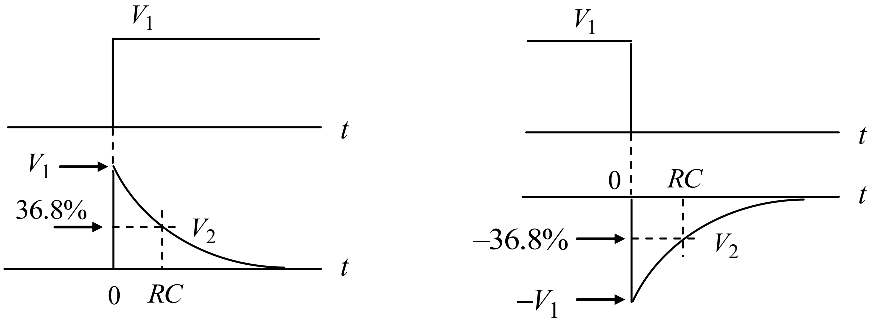
となる。従ってステップ状入力V_1に対して出力V_2は次のようになる（図 1-6）。

$t < 0$で$V_1 = 0$、$t \ge 0$で$V_1 \ne 0$

$$V_2 = V_1 e^{-t/RC} \tag{1.1.9}$$

$t < 0$で$V_1 \ne 0$、$t \ge 0$で$V_1 = 0$

$$V_2 = -V_1 e^{-t/RC} \tag{1.1.10}$$



(a)　　　　　　　　　　(b)

図 1-6　微分回路のステップ応答

パルス幅がTなるパルスに対する応答は図 1-7 のようになる。ここで

$$\delta = \frac{\Delta V}{V_1} = 1 - e^{-T/RC} \tag{1.1.11}$$

をドゥループ（droop）と云う。$T << RC$の場合は

$$\delta \approx T/RC \tag{1.1.12}$$

と近似される。RCを微分回路の時定数と云う。

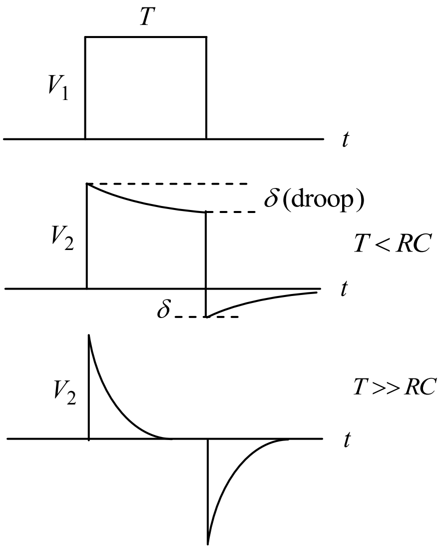


図 1-7　微分回路のパルスに対する応答

(b) LR 回路

b-1 コイル

コイルに流れる電流をIとすると、コイル両端の電圧は

$$V = L\frac{dI}{dt} \tag{1.1.13}$$

で与えられる（図 1-8)。Lをインダクタンス（inductance）という。単位はH（ヘンリー、$1H = 1V \cdot sec/A$）である。

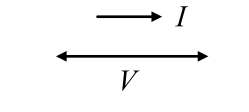
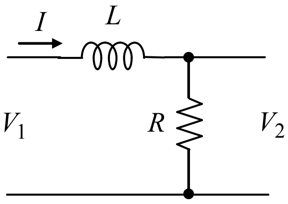


図 1-8　コイル

b-2 LR 積分回路

図 1-9 のようなLとRから成る回路を考える。V_1を入力電圧、V_2を出力電圧とすると

$$
\left.\begin{aligned} V_1 - V_2 &= L\frac{dI}{dt} \\ V_2 &= RI \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.14)
$$



より

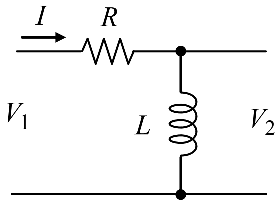
$$
\frac{dV_2}{dt} + \frac{R}{L}V_2 = \frac{R}{L}V_1 \qquad (1.1.15)
$$

図 1-9　LR積分回路

これは、積分回路で$1/RC$をR/Lに置き換えたものと等価である。

次に図 1-10 のようなLR回路を考える。

$$
\left.\begin{aligned} V_1 - V_2 &= RI \\ V_2 &= L\frac{dI}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.16)
$$



より

$$
\frac{dV_2}{dt} + \frac{R}{L}V_2 = \frac{dV_1}{dt} \qquad (1.1.17)
$$

図 1-10　LR微分回路

これは、微分回路で$1/RC$をR/Lに置き換えたものと等価である。

以上のように、回路網の動作は一般に微分方程式で表わされるが、複雑な回路網の場合はいちいち微分方程式をとくことは事実上不可能である。そこで、次節に述べるように電圧、電流等を複素数で表わした交流理論で扱われる。交流理論は時間的に変化する電圧、電流のフーリエ振幅による表現そのものである。

1-2 交流理論

1-2-1 実効値

サイン波（sinusoidal wave form）を前提として、交流電圧及び電流を

$$
\left.\begin{aligned} v(t) &= V_m \cos\omega t \\ i(t) &= I_m \cos(\omega t - \theta) \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.1)
$$

とする。ここで$f = \omega/2\pi$は周波数、V_m, I_mは電圧、電流のピーク値、θは電圧と電流の位相差である。

例１：インダクタンスを流れる電流と電圧は

$$
v = L\frac{di}{dt} \qquad (1.2.2)
$$

の定常解

$$i = \frac{V_m}{\omega L}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \tag{1.2.3}$$

により与えられる。これより

$$I_m = V_m / \omega L, \qquad \theta = \pi/2 \tag{1.2.4}$$

例２：抵抗とインダクタンスの直列回路を流れる電流と電圧の関係は

$$v = L\frac{di}{dt} + Ri \tag{1.2.5}$$

である。この定常解は

$$\{V_m - I_m(\omega L sin\theta + R\cos\theta)\}\cos\omega t - I_m(\omega L\cos\theta - R sin\theta) sin\omega t = 0$$

より

$$I_m = \frac{V_m}{R}\cos\theta, \qquad \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \tag{1.2.6}$$

故に

$$\left.\begin{aligned} &v(t) = V_m \cos\omega t \\ &i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\cos(\omega t - \theta) \qquad (\theta = tan^{-1}\frac{\omega L}{R}) \end{aligned}\right\} \tag{1.2.7}$$

次に実効値を定義する。

$$\left.\begin{aligned} V^2 &= \overline{v^2(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} v^2(t)dt \\ I^2 &= \overline{i^2(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} i^2(t)dt \end{aligned}\right\} \tag{1.2.8}$$

で定義されるV及びIを実効値と云う。$v(t)$、$i(t)$が周期Tの周期関数のときは

$$\left.\begin{aligned} V^2 &= \overline{v^2(t)} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} v^2(t)dt \\ I^2 &= \overline{i^2(t)} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} i^2(t)dt \end{aligned}\right\} \tag{1.2.9}$$

$T = 1/f = 2\pi/\omega$として (1.2.1)式を(1.2.9)式に代入すると

$$\left.\begin{aligned} V^2 &= V_m^2\overline{\cos^2\omega t} = \frac{V_m^2}{2} \\ I^2 &= I_m^2\overline{\cos^2(\omega t - \theta)} = \frac{I_m^2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.10}$$

即ち交流電圧、電流の実効値は

$$V=\frac{V_m}{\sqrt{2}},\qquad I=\frac{I_m}{\sqrt{2}} \tag{1.2.11}$$

で与えられる。

次に電力を考える。電力には瞬時電力

$$P(t)=v(t)i(t) \tag{1.2.12}$$

と、実効電力（１周期間の平均電力）

$$P=\overline{v(t)i(t)}=\frac{1}{T}\int_t^{t+T} v(t)i(t)dt$$

$$=\frac{V_m I_m}{2}\cos\theta \tag{1.2.13}$$

がある。ここで $\cos\theta$ を力率（power factor）と云う。

1-2-2 複素数表示

電圧合成を考える。

$$v_1=V_1\cos(\omega t+\theta_1),\qquad v_2=V_2\cos(\omega t+\theta_2) \tag{1.2.14}$$

の合成電圧

$$v=v_1+v_2 \tag{1.2.15}$$

を

$$v=V_m\cos(\omega t+\theta) \tag{1.2.16}$$

と書くと

$$\left.\begin{aligned} V_m &= \sqrt{V_1^2+2V_1V_2\cos(\theta_2-\theta_1)+V_2^2} \\ \theta &= tan^{-1}\frac{V_1 sin\theta_1+V_2 sin\theta_2}{V_1\cos\theta_1+V_2\cos\theta_2} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.17}$$

である。以上のような合成は、複素平面上のベクトルで考えると考え易い。例えば電圧

$$v=V_m\cos(\omega t+\theta) \tag{1.2.18}$$

を

$$v=\mathrm{Re}[V_m e^{j\omega t+\theta}] \tag{1.2.19}$$

と書き

$$\dot{v}=V_m e^{j\omega t+\theta}$$

$$=V_m\cos(\omega t+\theta)+jV_m\sin(\omega t+\theta) \tag{1.2.20}$$

を複素交流電圧といい、複素数で電圧、電流を表記することを複素表示と云う。

図 1-11 のように実部を x 軸に、虚部を y 軸にとると、複素交流電圧$\dot{v}$は x-y 平面内を角速度ωで回転する長さV_mのベクトルで表わされ、$t=0$での方向がθである。ここで、x-y 座標系に対して角速度ωで回転する X-Y 座標系を考えると、X-Y 座標系ではベクトル $\dot{v}$ は固定したベクトルとなり、その成分は$X=V_m\cos\theta$、$Y=V_m sin\theta$である。X 軸を実軸、Y を虚軸とすると、これは$\dot{V}=V_m e^{j\theta}$のベクトル表示であり、回転する X-Y 座標系では複素交流電圧は長さがV_mで偏角θを持つベクトルで表現される。通常$\dot{V}=V_m e^{j\theta}$を交流ベクトルまたはフェイザー（phasor）と呼び、X-Y 座標を固定して（X-Y 座標に乗って）表示する。なお、単に複素表示と云う場合は交流ベクトルを意味することが多い。以下、とくにことわらない限り交流ベクトルを複素表示という。

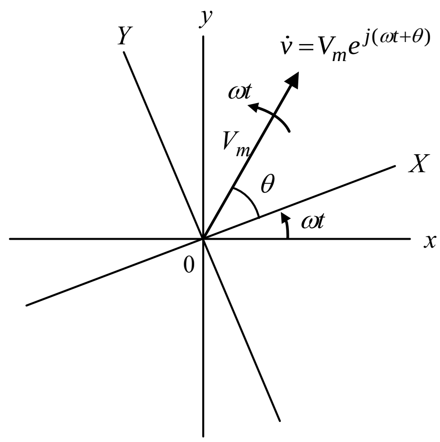


図 1-11　交流のベクトル表示

上で述べた電圧合成を交流ベクトルで考えると、v_1、v_2を表わす交流ベクトルは

$$\dot{V}_1=V_m e^{j\theta_1},\qquad \dot{V}_2=V_m e^{j\theta_2} \tag{1.2.21}$$

であり、これらを平行四辺形の法則でベクトル合成した

$$\dot{V}=\dot{V}_1+\dot{V}_2 \tag{1.2.22}$$

は $\dot{v}$ の交流ベクトルであることが分かる。また、交流電流のベクトル表示も全く同様である。回路理論ではベクトル表示を前提として議論をするのが通常である。

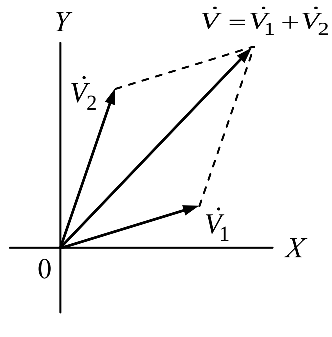


図 1-12　交流ベクトルの和

1-2-3 インピーダンス

インピーダンスとは直流におけるオームの法則を複素表示の電圧、電流に適用したときの抵抗に相当するもので、一般に複素数でありZと表記される。

$$V=ZI \tag{1.2.23}$$

ちなみに$z=v(t)/i(t)$とすると、$i(t)=0$の瞬間はzが無限大になるため、zを定義できない。

$$\left.\begin{aligned} v(t)&=V\cos\omega t\\ i(t)&=I\cos(\omega t-\theta)\end{aligned}\right\} \tag{1.2.24}$$

とすると、これらの複素表示は

$$\left.\begin{aligned}\dot{V} &= V \\ \dot{I} &= I\cos\theta - jI\sin\theta = Ie^{-j\theta}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.25}$$

であることから、インピーダンスは

$$Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V}{I}e^{j\theta} \tag{1.2.26}$$

と定義される。$\mathrm{Re}(Z) = (V/I)\cos\theta$を抵抗、$\mathrm{Im}(Z) = (V/I)sin\theta$をリアクタンスと呼ぶ。また、$Z$の逆数

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V}e^{-j\theta} \tag{1.2.27}$$

をアドミッタンスと云い、$\mathrm{Re}(Y) = (I/V)\cos\theta$をコンダクタンス、$\mathrm{Im}(Y) = -(I/V)sin\theta$をサセプタンスと呼ぶ。一般に

$$Z = R + jX, \qquad Y = G + jB \tag{1.2.28}$$

と書き、コンダクタンスG、サセプタンスBは

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \qquad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \qquad 1.2.29)$$

で与えられる。

インピーダンスZ_1、Z_2を直列接続すると合成直列インピーダンス及びアドミッタンスは

$$Z = Z_1 + Z_2, \qquad \frac{1}{Y} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} \tag{1.2.30}$$

となり、並列接続では合成並列インピーダンスは

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}, \qquad Y = Y_1 + Y_2 \tag{1.2.31}$$

となる。すなわち、インピーダンス合成は抵抗の合成則と同じになる。

インピーダンスZに加わる電圧と電流の関係を考える。

$$\left.\begin{aligned}Z &= |Z|e^{j\theta} \\ v(t) &= |V|\cos\omega t\end{aligned}\right\} \tag{1.2.32}$$

とすると、流れる電流は

$$i(t) = \mathrm{Re}(Ie^{j\omega t}) = \mathrm{Re}(\frac{|V|}{|Z|}e^{-j\theta}e^{j\omega t})$$

$$= \frac{|V|}{|Z|}\cos(\omega t - \theta) \tag{1.2.33}$$

となる。すなわちインピーダンスの位相θは

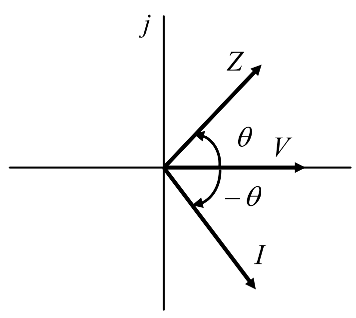


図 1-13　V、I、Zの位相関係

電圧に対する電流の遅れ位相を表わす。V、I、Zの位相関係を複素平面上に書くと図 1-13 のようになる。

(a) コイル及びコンデンサーを含む回路のインピーダンス

例１：コンデンサーのインピーダンスとアドミッタンス

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \qquad (1.2.34)$$

より

$$I = j\omega CV \qquad (1.2.35)$$

従って、インピーダンス及びアドミッタンスは

$$Z = \frac{1}{j\omega C}, \qquad Y = j\omega C \qquad (1.2.36)$$

となる。

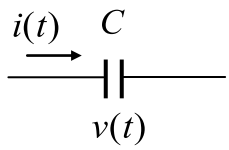


図 1-14　コンデンサー

例２：コイルのインピーダンスとアドミッタンス

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad (1.2.37)$$

より

$$V = j\omega LI \qquad (1.2.38)$$

従って

$$Z = j\omega L, \qquad Y = \frac{1}{j\omega L} \qquad (1.2.39)$$

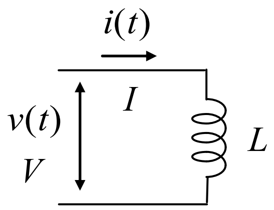


図 1-15　コイル

例３：抵抗とコイルの直列回路のインピーダンスとアドミッタンス

$$v(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} \qquad (1.2.40)$$

より

$$V = (R + j\omega L)I \qquad (1.2.41)$$

従って

$$Z = R + j\omega L \qquad (1.2.42)$$

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad (1.2.43)$$

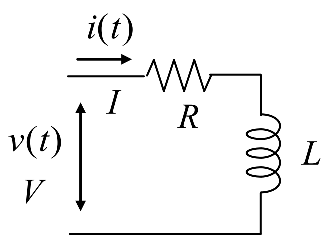


図 1-16　抵抗とコイルの直列回路

例４：抵抗とコンデンサーの直列回路のインピーダンスとアドミッタンス

コンデンサーに加わる電圧は$v(t)-Ri(t)$であるから

$$i(t)=C\frac{d\{v(t)-Ri(t)\}}{dt} \tag{1.2.44}$$

より

$$I=j\omega CV-j\omega CRI \tag{1.2.45}$$

従って

$$Z=R+\frac{1}{j\omega C} \tag{1.2.46}$$

$$Y=\frac{1}{R+1/j\omega C}=\frac{R+j/\omega C}{R^2+1/\omega^2C^2} \tag{1.2.47}$$

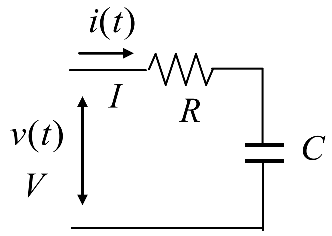


図 1-17　抵抗とコンデンサーの直列回路

(b) 共振回路のインピーダンスとアドミッタンス

(i) 直列共振回路

図 1-18 に示す直列共振回路のインピーダンス及びアドミッタンスは

$$\left.\begin{aligned} Z&=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\\ Y&=\frac{1}{R+j\omega L+1/j\omega C}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.48}$$

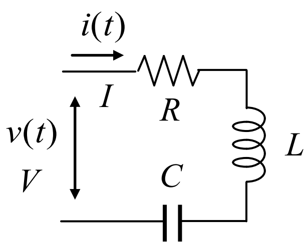


図 1-18　直列共振回路

で与えられる。Zを表わす複素平面上のベクトルは図 1-19 の破線上にあり、Zの大きさ即ち絶対値 $|Z|$は$\omega=1/\sqrt{LC}$で最小になる。また複素平面上のYベクトルは

$$\left|Y-\frac{1}{2R}\right|=\frac{1}{2R} \tag{1.2.49}$$

を満たすことより、図 1-20 のように中心を$(1/2R, j0)$とする半径$1/2R$の円周上にあることが分かる。$|Y|$は$\omega=1/\sqrt{LC}$で最大となる。図 1-21、1-22 に$|Z|$及び$|Y|$の周波数依存性を示す。(1.2.48)式のYは

$$Y=\frac{1}{R}\frac{j\omega/Q\omega_0}{1+j\omega/Q\omega_0-\omega^2/\omega_0^2} \tag{1.2.50}$$

$$\omega_0=1/\sqrt{LC},\qquad Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{1.2.51}$$

と書き直すことができる。QはQ値と呼ばれる共振の鋭さを表わす量で、大きいほど鋭いピーク

となる。アドミッタンスの絶対値がピーク値$1/R$の$1/\sqrt{2}$（$-3dB$）となる二つの周波数をω_1、ω_2とすると、$\omega_{1,2}=\omega_0(\sqrt{1+Q^2/4}\pm Q/2)$であり、$\omega_2-\omega_1=\omega_0/Q$となる。図 1-19、1-20 から分かるように、ω_1、ω_2はZ及びYの偏角が±45°となる周波数に対応する。インピーダンスの絶対値は図 1-21 のように$\omega_0=1/\sqrt{LC}$で最小値Rとなり、絶対値が最小値の$\sqrt{2}$倍になる周波数の差は同じくQ値を与える。

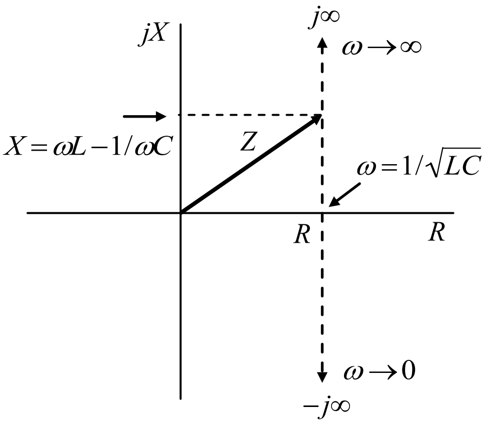


図 1-19　インピーダンスベクトル

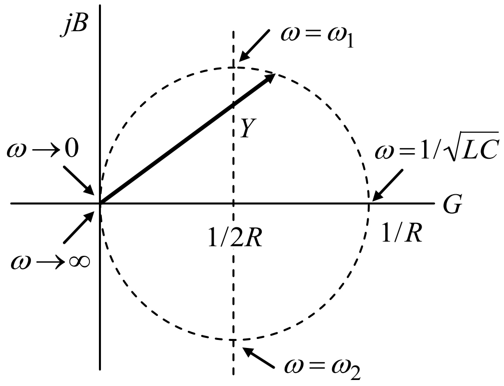


図 1-20　アドミッタンスベクトル

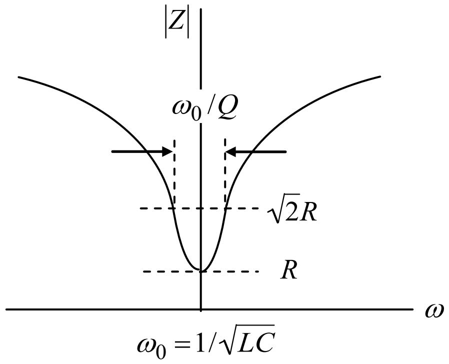


図 1-21　インピーダンスの絶対値

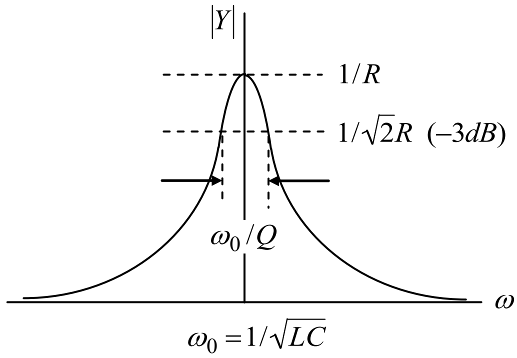


図 1-22　アドミッタンスの絶対値

(ii) 並列共振回路

図 1-23 に示す並列共振回路のインピーダンス及びアドミッタンスは

$$
\left.\begin{aligned}
Z &= \frac{1}{1/R+j\omega C+1/j\omega L} \\
Y &= \frac{1}{R}+j\omega C+\frac{1}{j\omega L}
\end{aligned}\right\} \qquad (1.2.52)
$$

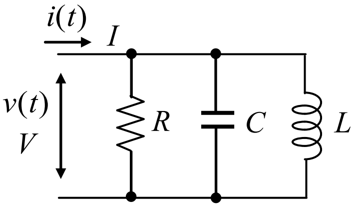


図 1-23　並列共振回路

で与えられる。Z及びYを表わす複素平面上のベクトルは図 1-24、1-25 のようになる。Zは

$$Z = R\frac{j\omega/Q\omega_0}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} \tag{1.2.53}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 &= 1/\sqrt{LC} \\ Q &= \frac{R}{\omega_0 L} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \end{aligned}\right\} \tag{1.2.54}$$

と書き直すことができ、それらの絶対値は図 1-26 及び図 1-27 のようになる。

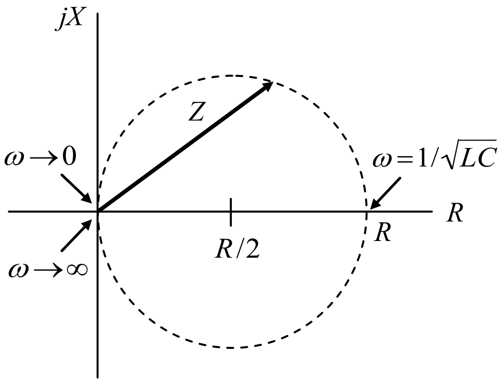


図 1-24　インピーダンスベクトル

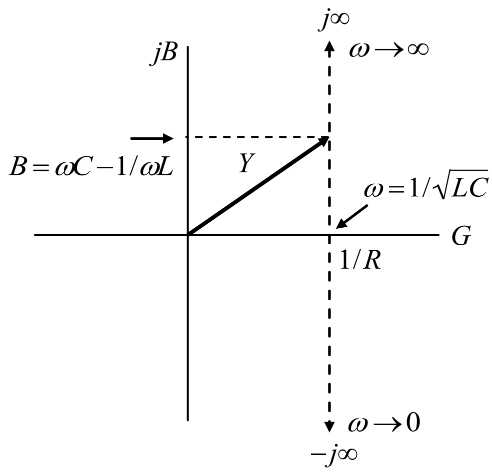


図 1-25　アドミッタンスベクトル

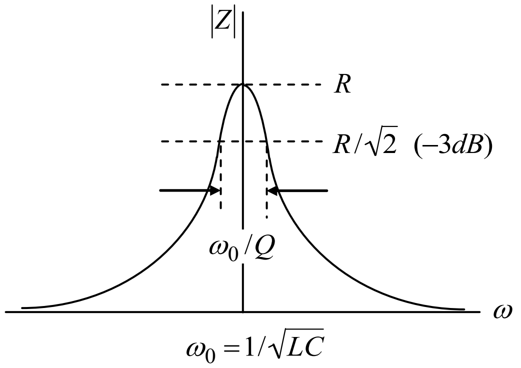


図 1--26　インピーダンスの絶対値

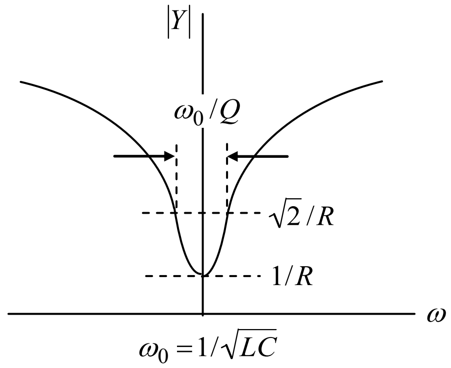


図 1-27　アドミッタンスの絶対値

補遺：フーリエ変換と複素表示

電気工学等におけるフーリエ変換は、数学における定義の複素共役

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)e^{j\omega t}d\omega, \qquad i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$V(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t}dt, \qquad i(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} I(\omega)e^{-j\omega t}dt$$

で定義され、フーリエ振幅$V(\omega)$、$I(\omega)$は複素振幅を表わす。また

$$V(\omega)=Z(\omega)I(\omega),\qquad z(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Z(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

とすると

$$\begin{aligned}v(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}V(\omega)e^{j\omega t}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}d\omega'\int_{-\infty}^{\infty}d\omega Z(\omega')e^{j\omega'(t-\tau)}I(\omega)e^{j\omega\tau}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}z(t-\tau)i(\tau)d\tau\end{aligned}$$

1-2-4 周波数伝達関数（周波数特性関数）

回路網の入出力の関係を表わす微積分方程式により、入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ のフーリエ振幅を関係づける周波数伝達関数（周波数特性関数）が与えられる。集中定数回路網においては、入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ の関係を表わす微分方程式は一般に次の形をしている。

$$a_n\frac{d^ny}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0=b_m\frac{d^mx}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{dx}{dt}+b_0$$

(1.2.55)

ここで因果律により

$$n\geq m \tag{1.2.56}$$

である。$X(\omega)$、$Y(\omega)$ を $x(t)$、$y(t)$ の交流ベクトルとして

$$\left.\begin{aligned}y(t)=Y(\omega)e^{j\omega t}\\x(t)=X(\omega)e^{j\omega t}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.57}$$

と置いて上式に代入すると

$$\begin{aligned}&\{a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_1(j\omega)+a_0\}Y(\omega)\\&=\{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\cdots+b_1(j\omega)+b_0\}X(\omega)\end{aligned}$$

より

$$\left.\begin{aligned}&Y(\omega)=G(j\omega)X(\omega)\\&G(j\omega)=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\cdots+b_1(j\omega)+b_0}{a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_1(j\omega)+a_0}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.58}$$

を得る。$G(\omega)$ は入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ のフーリエ振幅を関係づける関数であり、周波数特性関数

又は周波数伝達関数と呼び、分母のωの次数がnの場合、$G(\omega)$をn次系の周波数特性関数と云う。また系に分布定数回路等による時間遅延要素が含まれる場合にも周波数特性関数が定義されるが、有限次数の特性関数とはならない（ラプラス変換の項参照)。

例として微分回路（図 1-28）の周波数特性関数を求める。

$$\frac{dv_2}{dt}+\frac{v_2}{CR}=\frac{dv_1}{dt} \qquad (1.2.59)$$

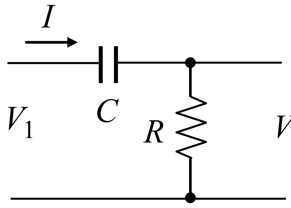


図 1-28　微分回路

より、V_1、V_2を複素表示電圧（交流ベクトル）とすると

$$j\omega V_2+\frac{V_2}{RC}=j\omega V_1 \qquad (1.2.60)$$

となり

$$V_2=\frac{j\omega CR}{1+j\omega CR}V_1 \qquad (1.2.61)$$

を得る。これより周波数特性関数は

$$G(j\omega)=\frac{j\omega CR}{1+j\omega CR} \qquad (1.2.62)$$

で与えられる。

以降、電圧電流は特に断らない限り複素表示と考える。また、$t=0$から$x(t)=X(\omega)e^{j\omega t}$なる信号が回路網に入力された場合、一般に(1.2.55)式の解は

$$y(t)=Y(\omega)e^{j\omega t}+(\text{transient term})$$

となる。ここで transient term（過渡項）は初期値によって生ずる項であるが、十分時間を経た後は過渡項は 0 となり、定常項$Y(\omega)e^{j\omega t}$のみが残る。即ち、周波数特性関数は過渡現象が収まった後の定常状態における系の応答を記述するものである（ラプラス変換の項を参照)。

1-3 簡単な周波数特性関数の性質

(a) 1次系

1次系の簡単な例として積分回路を考える。前節と同様にして図 1-29 の積分回路の周波数特性関数

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega CR} \qquad (1.3.1)$$

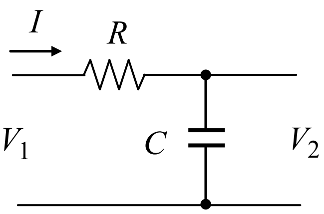


図 1-29　積分回路

が求まる。$G(j\omega)=|G(j\omega)|e^{j\theta}$の振幅$|G(j\omega)|$及び位相$\theta$

$$\left.\begin{aligned}|G(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \\ \theta &= -\tan^{-1}(\omega CR)\end{aligned}\right\} \tag{1.3.2}$$

を図示すると図 1-30、1-31 のようになる。ここで $\omega_0 = 1/RC$ である。

またパルス応答は§1-1 (ii) で述べている。パルス応答の立ち上がり、立ち下がりは時定数 RC の指数関数で与えられる。

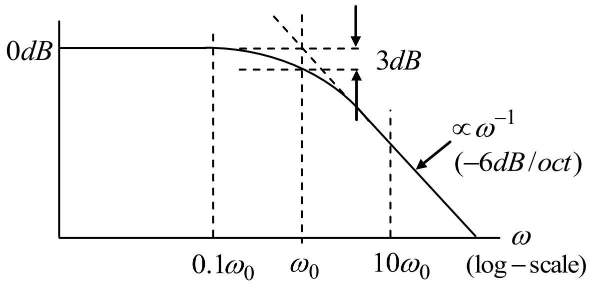


図 1-30　振幅特性

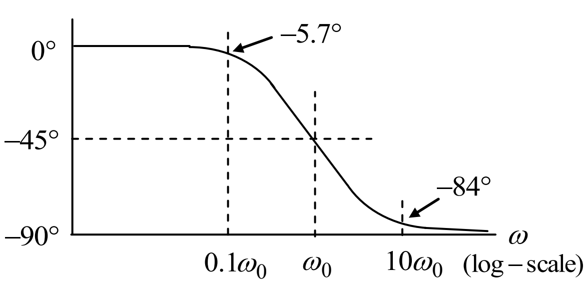


図 1-31　位相特性

(b) ２次系

２次系の例として２次のローパスフィルター（LPF）及びバンドパスフィルター（HPF）を考える。

(i) ２次 LPF

図 1-32 に示す回路の入力、出力の関係は

$$\begin{aligned}V_1 &= j\omega LI + V_2 \\ I &= V_2/R + j\omega CV_2\end{aligned} \tag{1.3.3}$$

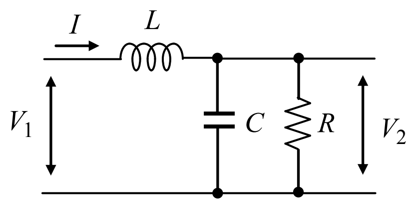


図 1-32　２次 LPF

を解くことで与えられる。これより周波数特性関数 $G(j\omega)$ は

$$\left.\begin{aligned}G(j\omega) &= \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{1+2j\zeta\omega/\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} \\ \omega_0 &= 1/\sqrt{LC}, \qquad \zeta = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (=\frac{1}{2Q})\end{aligned}\right\} \tag{1.3.4}$$

となる。ここで ω_0 は共振周波数、ζ はダンピング定数であり、Q と $\zeta = 1/2Q$ なる関係にある。$G(j\omega)$ の位相は

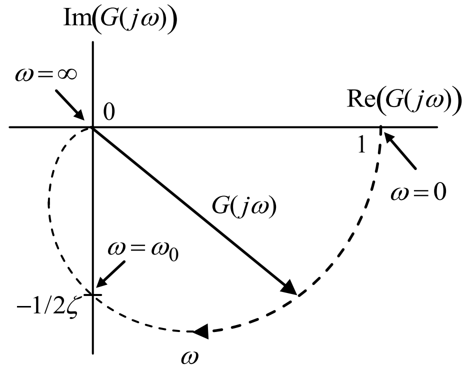


図 1-33　$G(j\omega)$ のベクトル図

$$\omega << \omega_0 : G(j\omega) \to 1 \qquad \arg G(j\omega) \to 0°$$
$$\omega >> \omega_0 : G(j\omega) \to -0 \quad \arg G(j\omega) \to -180°$$

となり、$G(j\omega)$のベクトル図は図 1-34 のようになる。

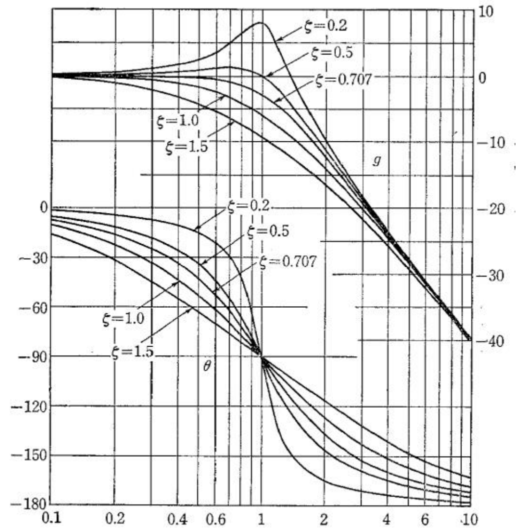


図 1-34　$|G(j\omega)|$及び位相θ

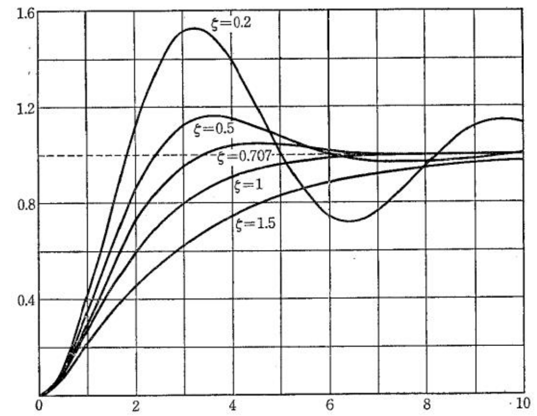


図 1-35　ステップ入力に対する時間応答

$\zeta < 1$ではステップ入力に対して出力が振動する。このとき周波数特性は$\omega = \omega_0$にピークを生ずる。$\zeta = 1\,(Q = 0.5)$は振動を生じない境目であり臨界制動（critical damping）と云う。臨界制動では周波数特性にピークを生じない。$\zeta > 1$では振動を生じないがζが大きくなるとともに、立ち上がりが遅くなる。また周波数特性はω_0の手前からなだらかに減衰する。これを過制動（over damping）と云う。なお、実用的には$\zeta = 1/\sqrt{2}\ (Q = 1/\sqrt{2})$を臨界制動と云う場合が多い。このときのステップ応答は立ち上がり部で１回だけ１を超えるが、その後振動はしない。また周波数特性にピークは生じない。

(ii) ２次 BPF

図 1-36 に示す回路の周波数特性関数は

$$\frac{V_2}{R} = \frac{V_1 - V_2}{j\omega L + 1/j\omega C} \tag{1.3.5}$$

より

$$G(j\omega) = \frac{2j\zeta\omega/\omega_0}{1 + 2j\zeta\omega/\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} \tag{1.3.6}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad \zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{1.3.7}$$

となる。ここで

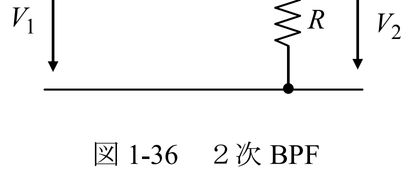


図 1-36　２次 BPF

$$\left| G(j\omega) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \tag{1.3.8}$$

より、$G(j\omega)$を表わす複素平面上ベクトルは、中心が$(1/2, j0)$、半径が$1/2$の円周上にあることが分かる（図 1-37)。振幅$|G(j\omega)|$の周波数特性を図 1-38 に示す。$Q = 1/2\zeta$が大きくなるほど鋭い共振特性となる。$|G(j\omega)|$は$\omega = \omega_0$で最大値$|G(j\omega_0)| = 1$となり、位相が$\pm 90°$となる周波数ω_2、ω_1で$|G(j\omega_0)|/\sqrt{2}$ （$-3dB$）となる。ω_1、ω_2は

$$G(j\omega) = (1 \pm j)/2 \tag{1.3.9}$$

より求められ

$$\omega_1 = \omega_0(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 1}), \qquad \omega_2 = \omega_0(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + 1}) \tag{1.3.10}$$

で与えられる。これより 1-2-3 節の例５で述べた関係式

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\zeta\omega_0 = \omega_0 / Q \tag{1.3.11}$$

が得られる。なお、$Q >> 1$のときは

$$\omega_1 = \omega_0(1 - 1/2Q), \qquad \omega_2 = \omega_0(1 + 1/2Q) \tag{1.3.12}$$

であり、$Q << 1$のときは

$$\omega_1 = \omega_0 Q = \frac{1}{CR}, \qquad \omega_2 = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \tag{1.3.13}$$

である。なお、単に周波数特性と云う場合は振幅周波数特性を云う。

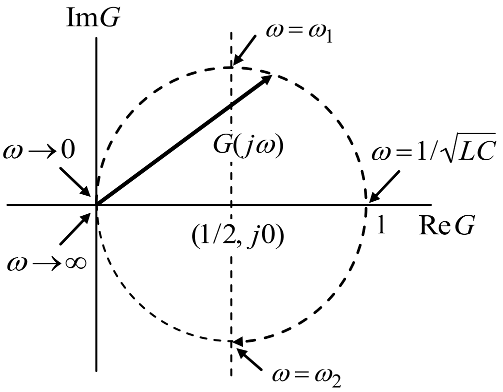


図 1-37　$G(j\omega)$のベクトル図

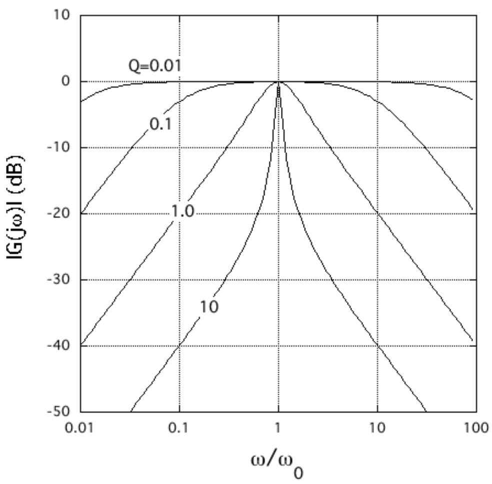


図 1-38　$G(j\omega)$の振幅特性

1-4 四端子回路

(a) 基本行列

図 1-39 に示すように、線形回路網への入力電圧をV_1、出力電圧をV_2、入力端子に流れ込む電流をI_1、出力端から流れ出す電流をI_2'として

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= AV_2 + BI_2' \\ I_1 &= CV_2 + DI_2' \end{aligned}\right\} \qquad (1.4.1)$$

と書き、基本四端子定数 (A, B, C, D) を定義する。

行列式で書けば

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2' \end{pmatrix} \qquad (1.4.2)$$

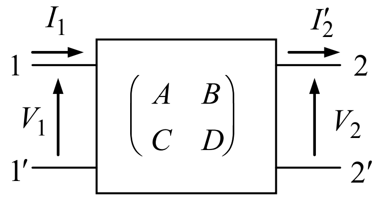


図 1-39　基本四端子回路

となる。回路網が能動素子を含まないときは可逆定理（reciprocity theorem）

$$AD - BC = 1 \qquad (1.4.3)$$

が成立する。四端子定数で表現した回路網を四端子回路と呼ぶ。

図 1-40 のように２つの四端子回路を従属接続すると

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_3 \\ I_3' \end{pmatrix} \qquad (1.4.4)$$

より、全体の四端子回路は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \qquad (1.4.5)$$

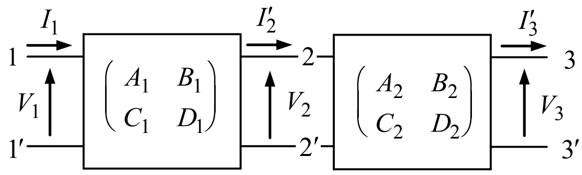


図 1-40　四端子回路の従属接続

となる。基本四端子定数 (A, B, C, D) で定義される行列を基本行列又は F-matrix と云う。

(b) インピーダンス行列及びアドミッタンス行列

I_2' の代わりに回路網の出力に流れ込む電流を $I_2\ (= -I_2')$ として、入力出力関係を

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \qquad (1.4.6)$$

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \qquad (1.4.7)$$

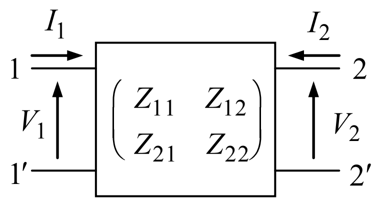


図 1-41　インピーダンス行列

と書いたとき $\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$ をインピーダンス行列、$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$ をアドミッタンス行列と云い、互いに逆行列の関係にある。

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}^{-1} \qquad (1.4.8)$$

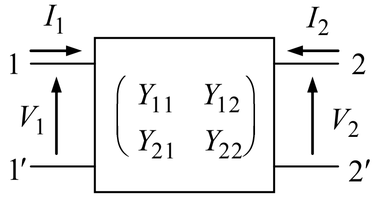


図 1-42　アドミッタンス行列

reciprocity theorem は

$$Z_{12} = Z_{21}, \qquad Y_{12} = Y_{21} \qquad (1.4.9)$$

で与えられ、基本行列との関係は

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A/C & 1/C \\ 1/C & D/C \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D/B & -1/B \\ -1/B & A/B \end{pmatrix} \tag{1.4.10}$$

となる。

(c) ハイブリッド行列（**H-matrix**）

回路網への入出力を

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \tag{1.4.11}$$

で定義するとき、行列 (h_{ij}) をハイブリッド行列または H-matrix、行列要素 h_{ij} を h パラメーターと云い、トランジスターを四端子表現する際によく用いられる。基本行列との関係は

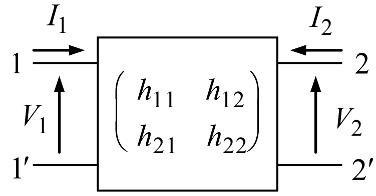


図 1-43　ハイブリッド行列

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B/D & (AD-BC)/D \\ -1/D & C/D \end{pmatrix} \tag{1.4.12}$$

で与えられ、Reciprocity theorem は

$$h_{12} = -h_{21} \tag{1.4.13}$$

である。なお、能動素子であるトランジスターでは $h_{12} \neq -h_{21}$ である。h パラメーターの物理的意味は

$h_{11} = 1/Y_{11} = (V_1/I_1)_{V_2=0}$　：出力端短絡入力インピーダンス

$h_{22} = 1/Z_{22} = (I_2/V_2)_{I_1=0}$　：入力端開放出力アドミッタンス

$h_{12} = (V_1/V_2)_{I_1=0}$　：入力端開放電圧逆伝達率

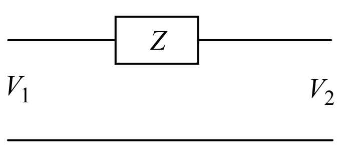
$-h_{21} = (-I_2/I_1)_{V_2=0}$　：出力端短絡電流伝達率

である。なお、トランジスターでは h パラメーターは

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_i & h_r \\ h_f & h_o \end{pmatrix} \tag{1.4.14}$$

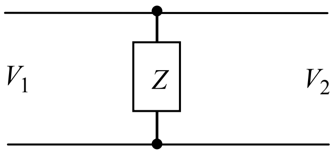
と書かれる。以下にいくつかの四端子回路網の基本行列を挙げる。

直列素子



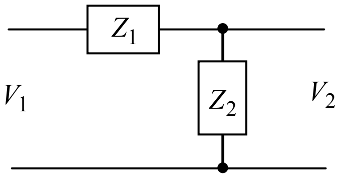
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4.15}$$

並列素子



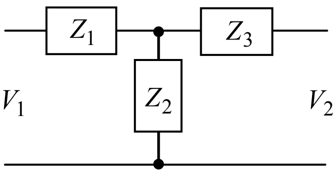
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4.16}$$

L型回路



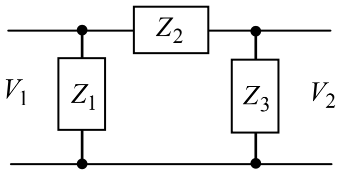
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+Z_1/Z_2 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4.17}$$

T 型回路



$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1+Z_1/Z_2 & (Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1)/Z_2 \\ 1/Z_2 & 1+Z_3/Z_2 \end{pmatrix} \tag{1.4.18}$$

π型回路



$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1+Z_2/Z_3 & Z_2 \\ (Z_1+Z_2+Z_3)/Z_1Z_3 & 1+Z_2/Z_1 \end{pmatrix} \tag{1.4.19}$$

２章　トランスフォーマーの基礎

2-1 インダクタンスの基礎

(a) 無限長ソレノイド

図 2-1 で$\ell \to \infty$の場合を無限長ソレノイドと云う。$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ H/m$を真空透磁率、ソレノイド内部の比透磁率を$\mu$とするとコイル内の磁束密度は

$$B = \mu_0 \mu n I \qquad (2.1.1)$$

となる。nは単位長さ当たりのコイルの巻数である。

コイル内の磁束は

$$\Phi = \mu_0 \mu n S I \qquad (2.1.2)$$

で与えられ、コイルNターン当たり発生する電圧は

$$V = N\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \mu n N S \frac{dI}{dt} \qquad (2.1.3)$$

となる。ここでインダクタンスの定義$V = LdI/dt$（(1.1.13)式）より、Nターン当たりのインダクタンスは、$\ell = N/n$をNターンに対応する部分の長さとして

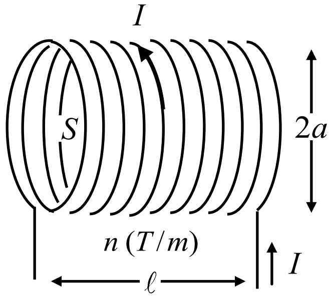


図 2-1　ソレノイドコイル

$$L = \mu_0 \mu n N S = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{\ell} \qquad (2.1.4)$$

となる。

(b) 有限長ソレノイド

図 2-1 で長さℓが有限の場合、磁束が途中から外部に漏れるためインダクタンスは (2.1.5)式より減少する。補正係数をKとして

$$L = K\mu_0 \mu \frac{N^2 S}{\ell} \qquad (2.1.5)$$

と書くと、$K\,(<1)$はa/ℓの関数である（図 2-2）。ここで$N = n\ell$はコイルの全巻数Kは長岡係数と呼ばれる。$a/\ell \to 0$では$K \to 1$であり、無限長ソレノイドに一致する。a/ℓ が大きくなるとともにKは小さくなる。また$a/2 < \ell$（即ち$2a/\ell < 4$）の場合、Kは

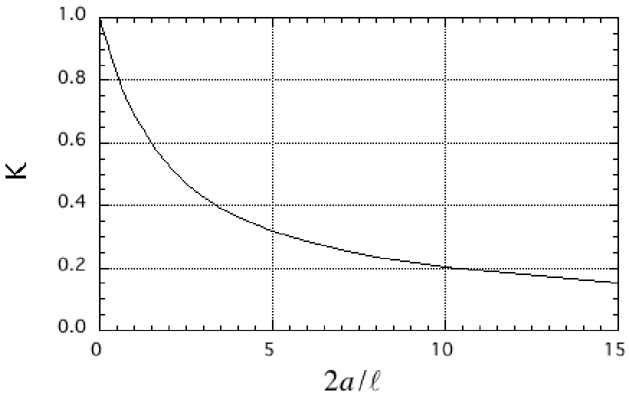


図 2-2　長岡係数

$$K \cong \frac{1}{1 + 0.9a/\ell} \qquad (2.1.6)$$

と近似できる。

(c) トロイダルコイル

図 2-3 のようにトロイダルコアに一様にコイルを巻いた場合、コア中の磁束密度は

$$B=\mu_0\mu\frac{NI}{2\pi r} \qquad (2.1.7)$$

で与えられる。ここで r はコアの磁気的な平均半径であり、$2\pi r$ を磁路長と云う。これよりインダクタンスは

$$L=\mu_0\mu\frac{N^2S}{2\pi r} \qquad (2.1.8)$$

となる。$S=ab$ はコア断面積である。

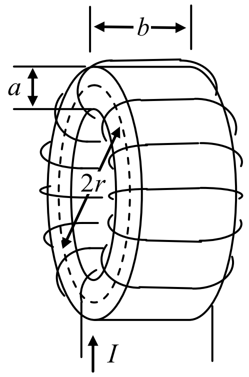


図 2−3　トロイダルコイル

トロイダルコアのように閉じた磁気回路にコイルを巻いた場合、磁気回路に沿って磁束が 1 周する長さを磁路長 ℓ といい、磁束は磁気回路中に閉じ込められていて外部への磁束の漏れが無視できる場合には、任意の形状のコアに巻いた巻数 N のコイルのインダクタンスは

$$L=\mu_0\mu\frac{N^2S}{\ell} \qquad (2.1.9)$$

となる。S はコアの断面積である。またコア内の磁束 Φ はコイルの自己誘導電圧が

$$V=N\frac{d\Phi}{dt}=L\frac{dI}{dt} \qquad (2.1.10)$$

であることから

$$\Phi=\frac{L}{N}I \qquad (2.1.11)$$

で与えられる。

(d) コアの性質

交流理論における複素表示では透磁率は

$$\mu=\mu'-j\mu'' \qquad (2.1.12)$$

と書かれる。コイルのコア材の透磁率を μ とすると、$L\propto\mu$ であることからインダクタンスも複素数となり

$$L=L_0(1-j\tan\delta) \qquad (2.1.13)$$

$$\tan\delta=\mu''/\mu' \qquad (2.1.14)$$

と書ける（図 2-4(a)）。インダクタンスを流れる電

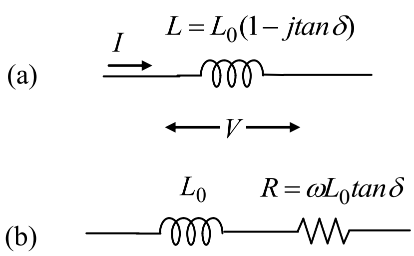


図 2-4　(a) 損失のあるインダクタンス。(b)等価回路。

流で発生する電圧は

$$V = j\omega LI \tag{2.1.15}$$

であるから、コイルのインピーダンスは

$$Z = j\omega L = j\omega L_0 + \omega L_0 tan\delta \tag{2.1.16}$$

となる。即ち複素インダクタンスのインピーダンスは、インダクタンス L_0 によるリアクタンスと、$\omega L_0 tan\delta$ なる抵抗の直列インピーダンスになる（図 2-4(b)）。

複素インダクタンスのパワー損失は

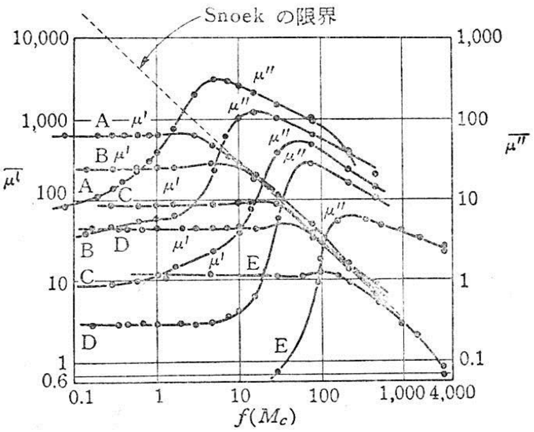
$$P = \frac{1}{2}(VI^* + V^* I) = \frac{|V|^2 tan\delta}{\omega L_0(1 + tan\delta)} \tag{2.1.17}$$

で与えられ、損失率が十分小さい $tan\delta << 1$ 場合には

$$P = \frac{|V|^2}{\omega L_0} tan\delta \tag{2.1.18}$$

となり、$tan\delta$ に比例する。このパワー損失は熱となって失われる。

電子回路部品として多用されるフェライトコアの透磁率の周波数特性は、図 2-5 のように直流からあるカットオフ周波数まで一定で、カットオフ以上の周波数では周波数に逆比例して減少する。カットオフ周波数はフェライトの自然共鳴周波数である。μ' は共鳴周波数以上では Snoek の限界線と呼ばれる限界に漸近し、μ'' は共鳴周波数で最大となる。一般的なフェライト材質としては Mn-Zn 系と Ni-Zn 系があり、同じ材質系に属するフェライトは同じ限界線で制限される。なお、Ni-Zn 系フェライトは μ'' が小さく、高周波用途に適している。一般に透磁率を云う場合は、自然共鳴周波数以下の領域における μ' を意味し、共鳴周波数以上では同じ特性となるので、使用時には注意する必要がある。



Ni–Zn 系フェライトの透磁率の周波数特性（組成（モル比）NiO : ZnO=17.5 : 33.2（A），24.9 : 24.9（B），31.7 : 16.5（C），39.0 : 9.4（D），48.2 : 0.7（E），残 Fe_2O_3）（Snoek）

図 2-5　フェライト透磁率の周波数特性
（近角聡信著「強磁性体の物理」裳華房より）

2-2 トランスの基本方程式

2-2-1 インダクタンスの定義

図 2-6 のように閉曲線Cを流れる電流をIとし、Iによって発生する磁束の内、閉曲線の張る面Sを貫通する磁束をΦとする。ΦはIに比例するので

$$\Phi = LI$$

と書け、比例係数Lをこの電流路の自己インダクタンスと定義する。次に図 2-6 のような二つの閉曲線C_1、C_2からなる電流路を考え、C_1、C_2の張る面をそれぞれS_1、S_2、各々の電流路を流れる電流をI_1、I_2とする。I_1が発生する磁束の内S_1を貫通する磁束をϕ_{11}、S_2を貫通する磁束をϕ_{21}とする。同様にI_2が発生する磁束の内S_2を貫通する磁束をϕ_{22}、S_1を貫通する磁束をϕ_{12}とすると、S_1及びS_2を貫通する全磁束はそれぞれ

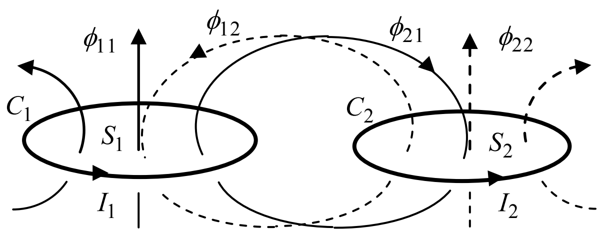


図 2-6　インダクタンスの定義

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \phi_{11} + \phi_{12} \\ \Phi_2 &= \phi_{21} + \phi_{22} \end{aligned}\right\} \tag{2.2.1}$$

となる。ここでϕ_{11}、ϕ_{21}はI_1による磁束、ϕ_{12}、ϕ_{22}はI_2による磁束であるので

$$\left.\begin{aligned} \phi_{11} &= L_1 I_1, & \phi_{12} &= M_{12} I_2 \\ \phi_{21} &= M_{21} I_1, & \phi_{22} &= L_2 I_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.2.2}$$

と書ける。ここで係数L_1、L_2をそれぞれ電流路C_1、C_2の自己インダクタンス、M_{12}、M_{21}を相互インダクタンスと云う。また、ノイマンの定理により

$$M_{12} = M_{21} = M \tag{2.2.3}$$

である。従って

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= L_1 I_1 + M I_2 \\ \Phi_2 &= M I_1 + L_2 I_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.2.4}$$

となる。$rot\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$より、それぞれ$C_1$、$C_2$一周に発生する電圧は

$$V_1 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}, \qquad V_2 = \frac{\partial\Phi_2}{\partial t} \tag{2.2.5}$$

であるから、$I_1 \propto e^{j\omega t}$、$I_2 \propto e^{j\omega t}$とすれば

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.2.6}$$

を得る。なお電流路C_1、C_2がそれぞれ巻数N_1、N_2、自己インダクタンスL_1、L_2のコイルから

成る場合は(2.1.11)式より

$$\left.\begin{aligned} N_1\Phi_1 &= L_1 I_1 + M I_2 \\ N_2\Phi_2 &= M I_1 + L_2 I_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.2.7}$$

となり、各コイルに発生する電圧は

$$V_1 = N_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}, \qquad V_2 = N_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \tag{2.2.8}$$

となる。したがってこの場合も(2.2.6)式が成立する。

更に、閉じた電流路が n 個存在する場合には

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_1 & j\omega M_{12} & \cdots & j\omega M_{1n} \\ j\omega M_{21} & j\omega L_2 & \cdots & j\omega M_{2n} \\ & & & \\ j\omega M_{n1} & j\omega M_{n2} & \cdots & j\omega L_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} \tag{2.2.9}$$

となる。ここで $M_{ik} = M_{ki}$ である。

2-2-2 基本方程式

図 2-7 のように二つのコイルが結合している場合を考えると、入出力の電圧電流の関係は(2.2.6)式で与えられ、インピーダンス行列により

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \tag{2.2.10}$$

と書くことができる。ここで L_1、L_2 はそれぞれ 1 次巻線及び 2 次巻線の自己インダクタンス（self-inductance）、M は相互インダクタンス（mutual inductance）である。M は

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \tag{2.2.11}$$

と書くことができ、k（$k<1$）を結合係数と云い、$k \cong 1$ なる場合を密結合トランス、$k<<1$ の場合を疎結合トランスと云う。また等価回路においては通常、図の向きに電流を流したとき、1 次コイル、2 次コイルの発生する磁束が同じ向きになる巻線の方向を・印で示す。

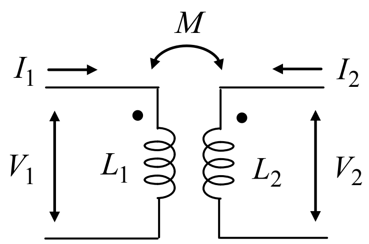


図 2-7　トランス

2-3 等価回路

トランスを等価な四端子回路で表現することを考える。(2.2.10)式よりトランスのインピーダンス行列は。

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{pmatrix} \qquad (2.3.1)$$

で与えられる。これを図 2-8 に示す T 型四端子回路で表現することを考える。T 型四端子回路のインピーダンス行列は

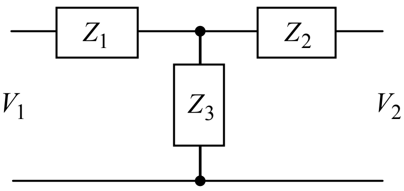


図 2-8　T 型四端子回路

$$\begin{pmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{pmatrix} \qquad (2.3.2)$$

で与えられる。四端子パラメーターが等しい二つの回路は等価であることから

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= j\omega(L_1 - M) \\ Z_2 &= j\omega(L_2 - M) \\ Z_3 &= j\omega M \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.3)$$

とすると(2.3.1)式と(2.3.2)式のインピーダンス行列は等しくなり､図 2-7 のトランスと図 2-8 の四端子回路は等価となる。これが T 型四端子回路によるトランスの表現である。

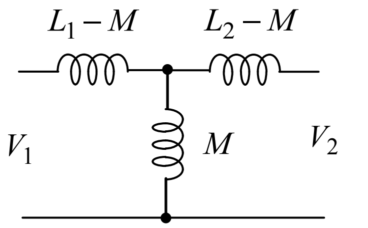


図 2-9　T 型四端子回路による
トランスの等価回路

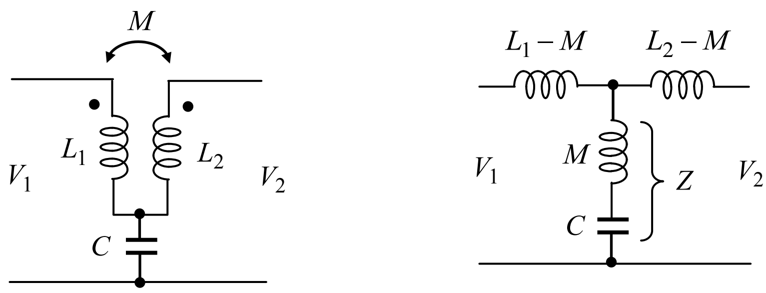
図 2-9 の等価回路より相互インダクタンスは以下のようにして測定できることが分かる。図 2-10 (a) のように、1 次コイルと 2 次コイルのグランド側を共通にして、コンデンサー C を介してグランドすると、等価回路は (b) のようになる。従って M と C の直列インピーダンス

$$Z = j\omega M + 1/j\omega C \qquad (2.3.5)$$

が最小になる周波数、即ち出力が $V_2 = 0$ となる周波数

$$\omega = 1/\sqrt{MC} \qquad (2.3.6)$$

を見つけることで M を知ることができる（2-5 節 (2.5.5) 式参照）。



(a)　　(b)

図 2-10　相互インダクタンス M の測定法

2-4 理想トランス

(2.2.10)式に四端子行列の変換則 (1.4.10)式を適用することにより、トランスの基本行列は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1/M & j\omega(L_1L_2 - M^2)/M \\ 1/j\omega M & L_2/M \end{pmatrix} \tag{2.4.1}$$

であることが分かる。ここで

$$L_2/L_1 = n^2, \qquad M = k\sqrt{L_1L_2} \tag{2.4.2}$$

と置くと、$k \to 1$、$M \to \infty$の極限では

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \xrightarrow{k\to 1} \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 1/j\omega M & n \end{pmatrix} \xrightarrow{M\to\infty} \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

となる。nは１次コイルと２次コイルの巻数の比であり、kは結合係数と呼ばれる。$M \to \infty$はL_1、L_2が無限大であることを意味する。そこで基本行列が

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \tag{2.4.3}$$

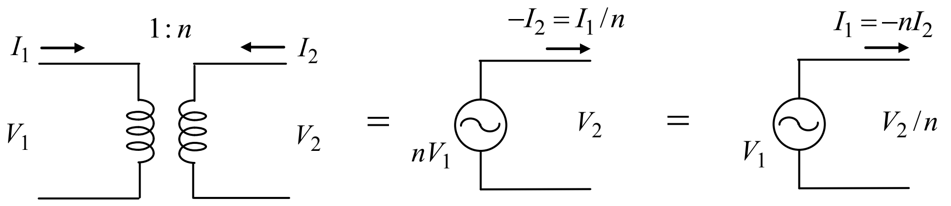
なるトランスを理想トランスと定義する。理想トランスでは

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_2/n \\ -nI_2 \end{pmatrix} \tag{2.4.4}$$

より

$$V_2 = nV_1, \qquad I_2 = -I_1/n \tag{2.4.5}$$

即ち、電圧はn倍、電流は$1/n$になることになる。従って次の対応が成立する。



理想トランス　　２次側等価回路　　１次側等価回路

図 2-11　理想トランスの等価回路

2-5 リーケージインダクタンス

トランスの基本行列 (2.4.1) 式は理想トランスの基本行列及び (1.4.15)、(1.4.17) 式を用いて次のように書き直すことができる。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + Z_1/Z_2 & Z_1 \\ 1/Z_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5.1}$$

ここで

$$
\left.\begin{aligned}
Z_1 &= j\omega(1-k)L_1 \\
Z_2 &= j\omega kL_1 \\
Z_3 &= j\omega(1-k)L_2
\end{aligned}\right\} \qquad (2.5.2)
$$

である。これより、この等価回路は図 2-12 のようになり、図 2-7 は図 2-12 と等価である。

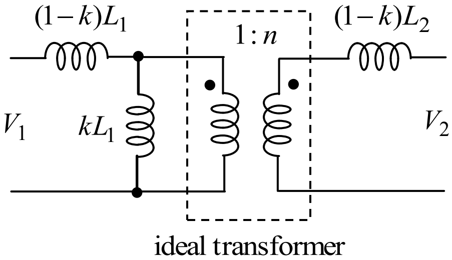


図 2-12　トランスの等価回路

ここで $(1-k)L_1$ 及び $(1-k)L_2$ をリーケージ･インダクタンス（漏れインダクタンス leakage inductance）と云う（2-6 節注参照）。$k=1$ではリーケージ･インダクタンスはない。また、kL_1を励磁インダクタンスと云う。$(1-k)L_1$ 及び $(1-k)L_2$ は信号に対して直列のインダクタンスであるので、負荷容量や巻線間の浮遊容量によって高い周波数の成分を減衰させ、トランスの高域特性を劣化させる。

ここでトランス回路の入力インピーダンスZを考える。2 次コイルの負荷にZ_Lなるインピーダンスが接続されている場合、図 2-9 より

$$
\begin{aligned}
Z &= j\omega(L_1 - M) + \frac{1}{1/j\omega M + 1/\{j\omega(L_2 - M) + Z_L\}} \\
&= j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2} \qquad (2.5.3)
\end{aligned}
$$

となり、$k=1$の場合は

$$
Z = \frac{1}{1/j\omega L_1 + n^2/Z_L} \qquad (2.5.4)
$$

即ち、1 次コイルの入力からトランスを見ると、L_1とZ_L/n^2が並列に接続されたインピーダンスとなる。また(2.5.3)式において 2 次コイルを短絡して$Z_L=0$とすると、kは 1 に近いものとして

$$
Z = j\omega(1-k^2)L_1 \cong 2j\omega(1-k)L_1 \qquad (2.5.5)
$$

となる。即ちZを測定することでリーケージ･インダクタンス$(1-k)L_1$を知ることができる。

2-6 理想トランスによるトランスの表現

まず理想トランスによるインピーダンス変換を考える。図 2-13 の(a)のように、1 次側にインピーダンスZ_1が直列に挿入されているときの基本行列は

$$
\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n & nZ_1 \\ 0 & n \end{pmatrix} \qquad (2.6.1)
$$

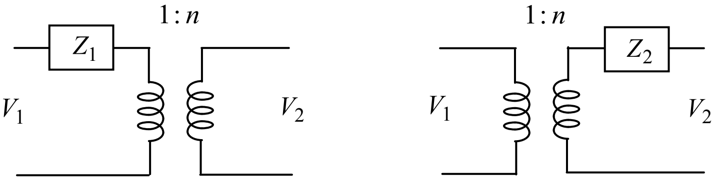
また、(b)のように出力に直列にインピーダンスZ_2が挿入されている場合の基本行列は

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n & Z_2/n \\ 0 & n \end{pmatrix} \tag{2.6.2}$$

従って $nZ_1 = Z_2/n$ 即ち

$$Z_2 = n^2 Z_1 \tag{2.6.3}$$

であれば(a)と(b)は等価になる。



(a) (b)

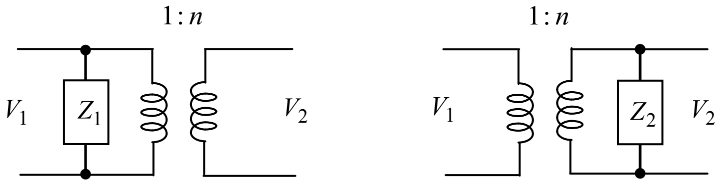
図 2-13　理想トランスによるインピーダンス変換（直列の場合）

図 2-14(a)、(b) のようにインピーダンスが並列に接続されている場合も

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 1/nZ_1 & n \end{pmatrix} \tag{2.6.4}$$

$$\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 1/nZ_2 & n \end{pmatrix} \tag{2.6.5}$$

より $Z_2 = n^2 Z_1$ であれば(a)と(b)は等価になる。



(a) (b)

図 2-14　理想トランスによるインピーダンス変換（並列の場合）

以上より、１次側のインピーダンスは直列、並列に関わらず n^2 倍されて２次側に変換されることが分かる。これで準備が整ったので、理想トランスを用いてトランスを表現してみよう。実際のトランスは図 2-12 にトランスの巻線やコア損失による抵抗成分を考慮して、図 2-15 のように書けるものとする。インピーダンス変換則により１次側のインピーダンスを２次側に変換することで、図 2-15 は図 2-16 のように書き直すことができる。同様にしてインピーダンスを

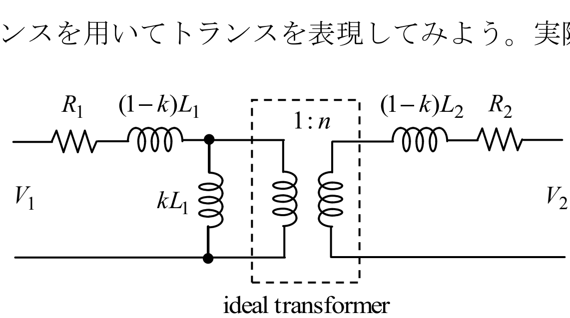


図 2-15　トランスの等価回路

１次側に換算すると図 2-17 の等価回路が成立する。従って、２次側から見たトランスの等価回路

は図 2-18 となり、1 次側から見た等価回路は図 2-19 となる。図 2-18、2-19 は実際の回路計算に便利である。なお、図 2-18 における kL_2 は 2 次側換算の励磁インダクタンスである。

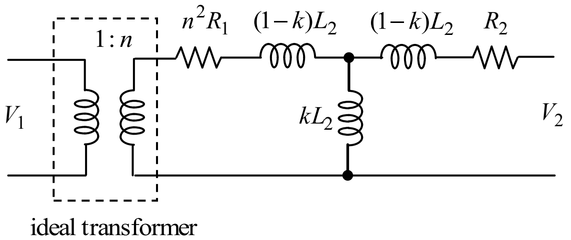


図 2-16　全てのインピーダンスを
２次側に換算した等価回路

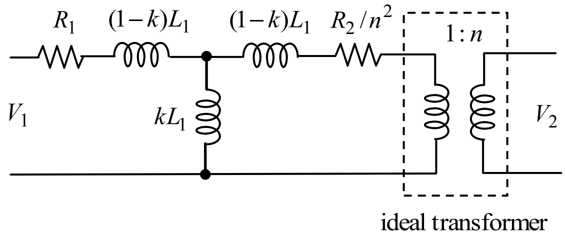


図 2-17　全てのインピーダンスを
１次側に換算した等価回路

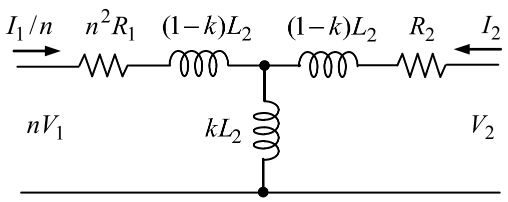


図 2-18　２次側から見た等価回路

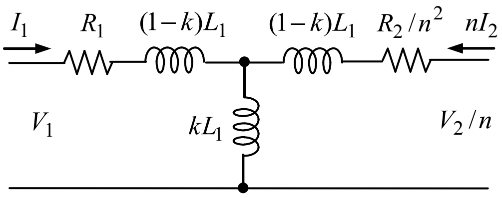


図 2-19　１次側から見た等価回路

ここでトランスのコアに発生している磁束密度を考える。磁性体はある程度以上高い磁束密度では飽和するので、線形動作するためには飽和磁束密度より十分低い磁束密度で動作させなければならない。1 次コイル、2 次コイルを貫通する磁束を Φ_1、Φ_2 とすると(2.2.8)式より

$$V_1 = j\omega N_1\Phi_1, \qquad V_2 = j\omega N_2\Phi_2 \tag{2.6.6}$$

である。トランスのコアに発生している磁束密度を見積もるため $k=1$ とすると $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_M$ (注参照)即ち $V_1/N_1 = V_2/N_2$ となるので、コアの断面積を S として、磁束密度 $B = \Phi_M/S$ は

$$B = \frac{V_1}{j\omega N_1 S} = \frac{V_2}{j\omega N_2 S} \tag{2.6.7}$$

で与えられる。したがって電圧を rms 値で与えるものとすると磁束密度のピーク値は

$$\left|B\right|_{peak} = \frac{\sqrt{2}V_1}{\omega N_1 S} = \frac{\sqrt{2}V_2}{\omega N_2 S} \tag{2.6.8}$$

となる。トランスの設計においては $\left|B\right|_{peak}$ が飽和磁束密度より十分小さくなるように設計することが必要である。

注：トランスのコアに発生する磁束

(2.6.6)、(2.2.8)、(2.2.9)式より 1 次コイル及び 2 次コイルを貫通する磁束は

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{(1-k)L_1}{N_1}I_1 + \frac{kL_1}{N_1}(I_1 + nI_2)\\ \Phi_2 &= \frac{(1-k)L_2}{N_2}I_2 + \frac{kL_2}{N_2}(\frac{I_1}{n} + I_2)\end{aligned}\right\}$$

となる。ここで右辺第 2 項は励磁インダクタンス kL_1 または kL_2 を流れる電流（励磁電流）によってコアに発生する磁束 Φ_M

$$\Phi_M = \frac{kL_1}{N_1}(I_1 + nI_2) = \frac{kL_2}{N_2}(\frac{I_1}{n} + I_2)$$

である。また第 1 項

$$\Phi_1' = \frac{(1-k)L_1}{N_1}I_1, \qquad \Phi_2' = \frac{(1-k)L_2}{N_2}I_2$$

はインダクタンス $(1-k)L_1$、$(1-k)L_2$ が発生する磁束であり、$k=1$ では $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_M$ となる。Φ_M によって 1 次コイルに誘導される電圧を V_1'、2 次コイルの電圧を V_2' とすると $V_1' = j\omega N_1\Phi_M$ 、$V_2' = j\omega N_2\Phi_M$ より

$$\begin{cases} V_1' = j\omega kL_1 I_1 + j\omega\sqrt{kL_1\cdot kL_2}\,I_2\\ V_2' = j\omega\sqrt{kL_1\cdot kL_2}\,I_1 + j\omega kL_2 I_2\end{cases}$$

となる。これは kL_1 が 1 次コイルの自己インダクタンス、kL_2 が 2 次コイルの自己インダクタンスである結合係数が 1 の完全結合トランス $M = \sqrt{kL_1\cdot kL_2}$ を表している。即ち Φ_M は 1 次コイルと 2 次コイルを同時に貫通する磁束を表す。V_1'、V_2' に Φ_1'、Φ_2' が発生する電圧 $j\omega N_1\Phi_1' = (1-k)L_1 I_1$、$j\omega N_2\Phi_2' = (1-k)L_2 I_2$ を加えたものが 1 次コイル及び 2 次コイルの電圧となる。

$$\begin{cases} V_1 = j\omega(1-k)L_1 I_1 + V_1'\\ V_2 = j\omega(1-k)L_2 I_2 + V_2'\end{cases}$$

これより $(1-k)L_1$、$(1-k)L_2$ はトランスとしての動作とは独立にそれぞれ 1 次コイル入力及び 2 次コイル出力に直列に挿入されたインダクタンスであり二つのコイル間の磁気結合とは関係ないことが分かる。即ち Φ_1' は 1 次コイルを貫通するが 2 次コイルを貫通しない、また Φ_2' は 2 次コイルを貫通するが 1 次コイルは貫通しない漏れ磁束を表わしている。

2-7 周波数特性関数

図 2-20 のように、2 次側に負荷インピーダンス Z を接続した場合のトランスの周波数特性関数を導く。コイルの抵抗成分は無視できるものとし、1 次コイルは抵抗 R_1 を通して信号源 V_1 に、2 次コイルには負荷インピーダンス Z が接続されているものとする。図 2-18 より図 2-20 は図 2-21 のように書き直せる。これより

$$V_2 = \frac{j\omega kL_2 / nR_1}{1 + j\omega L_2 /(n^2R_1 // Z) - \omega^2 L_2^2 (1-k^2)/(n^2R_1Z)} V_1 \tag{2.7.1}$$

従って周波数特性関数 $G(j\omega) = V_2 / V_1$ は

$$G(j\omega) = \frac{j\omega nkL_2 / n^2R_1}{1 + j\omega L_2 /(n^2R_1 // Z) - \omega^2 L_2^2 (1-k^2)/(n^2R_1Z)} \tag{2.7.2}$$

となる。

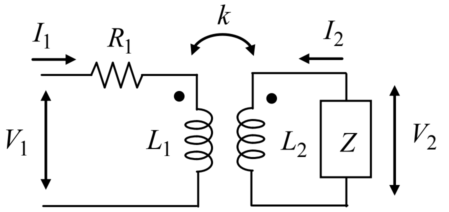


図 2-20　負荷を接続したトランス

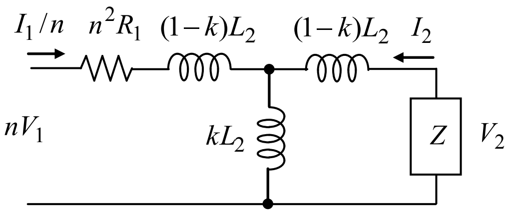


図 2-21　等価回路

図2-22のように負荷インピーダンス Z が抵抗 R_2 の場合(2.7.2)式の $G(j\omega)$ は、低域カットオフ ω_1、高域カットオフ ω_2 の 2 次のバンドパス・フィルター（BPF）と同じ特性になる。ここで

$$\omega_1 = \frac{(n^2R_1 // R_2)}{L_2}, \quad \omega_2 = \frac{n^2R_1 + R_2}{(1-k^2)L_2} \tag{2.7.3}$$

である。ω_2 はリーケージ･インダクタンス $(1-k^2)L_2 \cong 2(1-k)L_2$ と $n^2R_1 + R_2$ によって生じるカットオフである。リーケージ･インダクタンスがない場合（$k=1$）は $\omega_2 \to \infty$ になり、1 次のハイパス・フィルター（HPF）と同じ特性となる。

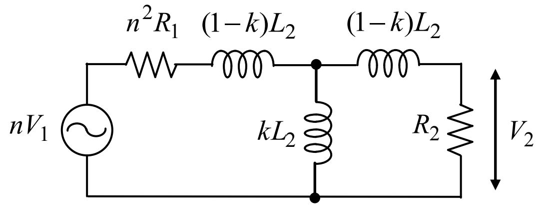


図 2-22　負荷が抵抗 R_2 の場合

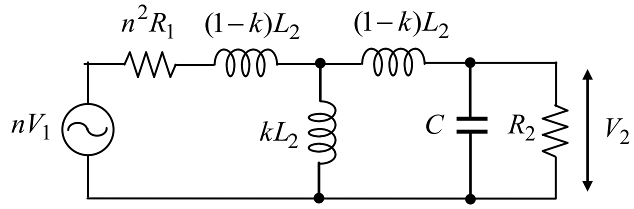


図 2-23　負荷が R_2 と C 並列の場合

更に図 2-23 のように負荷が抵抗 R_2 と容量 C の並列インピーダンス

$$Z = \frac{R_2}{1 + j\omega CR_2} \tag{2.7.4}$$

の場合は、(2.7.4)式を(2.7.2)式に代入して

$$G(j\omega) = \frac{j\omega nkL_2 / n^2 R_1}{1 + j\omega L_2(1/n^2 R_1 + 1/R_2) - \omega^2 L_2 C\{1 + L_2(1-k^2)/n^2 CR_1R_2\} - j\omega^3 L_2^2 (1-k^2) C / n^2 R_1} \tag{2.7.5}$$

を得る。ここで $(1-k)L_2$ は kL_2 より十分小さいとすると

$$G(j\omega) \cong \frac{nk}{1 + n^2 R_1 / R_2} \cdot \frac{j\omega / \omega_1}{1 + j\omega / \omega_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega / Q\omega_2 - \omega^2 / \omega_2^2} \tag{2.7.6}$$

と近似できる。これは 1 次の HPF と 2 次の LPF の従属接続と同じ特性である。ここで

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1 = \frac{n^2 R_1 // R_2}{L_2} = \frac{R_1 //(R_2 / n^2)}{L_1}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{1 + n^2 R_1 / R_2}{2(1-k)L_2 C}} \\ &Q = \frac{\sqrt{2(1-k)L_2 C(1 + n^2 R_1 / R_2)}}{n^2 R_1 C + 2(1-k)L_2 / R_2} \end{aligned}\right\} \tag{2.7.7}$$

である。ω_1 は自己インダクタンス L_1 と $R_1 //(R_2 / n^2)$ による低域カットオフ周波数で、$\omega < \omega_1$ では 6 dB/oct の低域減衰特性となる。ω_2 はリーケージ･インダクタンス $2(1-k)L_2$ と負荷容量 C による共振周波数であり高域カットオフ周波数になる。$Q > 1$ では ω_2 でピークとなり、$\omega_2 < \omega$ では −12 dB/oct で減衰する。回路シミュレータ Spice を用いて計算した、結合係数 k によるトランスの伝達関数の変化の例を図 2-24 に示す。(2.7.5)、(2.7.6)式から予想される結果とよく合っている。

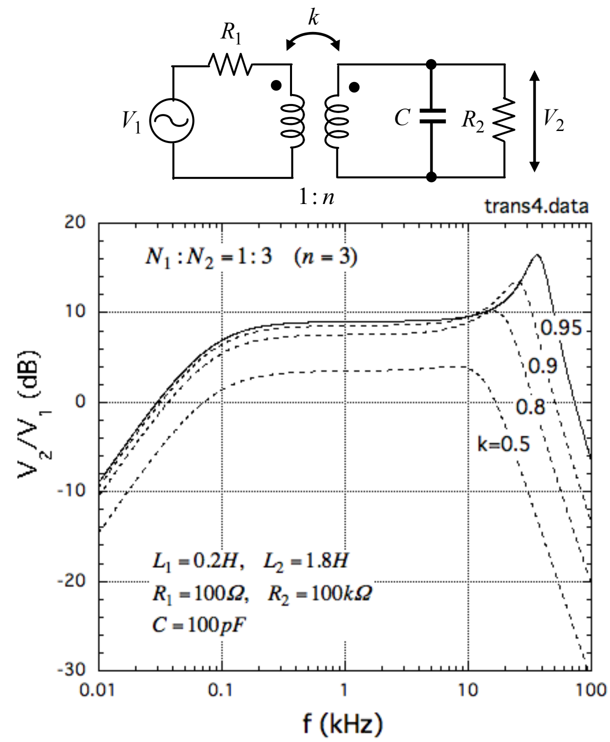


図 2-24　トランスの伝達関数

注：

$$Q = \frac{\sqrt{2(1-k)L_2 C(1 + n^2 R_1 / R_2)}}{n^2 R_1 C + 2(1-k)L_2 / R_2}$$ は $k = 1 - n^2 R_1 R_2 C / 2L_2 = 0.9975$ のときに最大となり、

$k \to 1$ とともに $Q \to 0$ となる。

電流トランス

電子や陽子等の荷電粒子の加速に用いられる加速器における、荷電粒子ビーム電流の計測にはトランスの原理による電流トランスがよく用いられる。図 2-25 のようにトロイダルコアに巻数N_2の巻線を施し、コアの中心に電流I_1を通す。I_1を 1 次コイルと考えると

$$\left.\begin{array}{l} V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 \\ I_2 = -V_2 / Z \end{array}\right\} \quad (2.7.8)$$

より

$$V_2 = \frac{j\omega M}{1 + j\omega L_2 / Z} I_1 = \frac{j\omega L_2 / Z}{1 + j\omega L_2 / Z} \frac{kZI_1}{n} \quad (2.7.9)$$

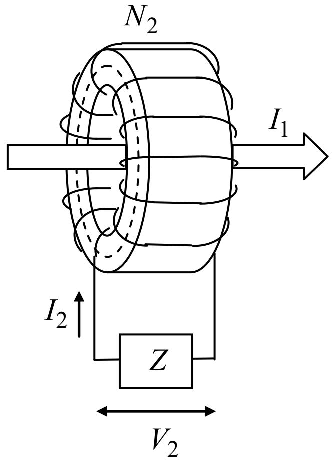


図 2-25 電流トランス

となり、出力電圧V_2は 1 次電流に比例する。ここで

$$n = \sqrt{L_2 / L_1} \quad (2.7.10)$$

である。n を知るためには、I_1 が作るループのインダクタンスを知る必要があるが、どのように考えるべきであろうか。そこで電磁誘導の基礎に戻って考えることにする。$rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i}$をコアの磁路長一周が張る面上で面積分することで

$$\oint H d\ell = I_1 + N_2 I_2 \quad (2.7.11)$$

となる。Hはコア中に発生している磁場である。コイルはコア一周に渡って一様に巻いてあって、コア内の磁束は周方向に一様であるものと仮定すると、$Z = R$として上式に$V_2 = -RI_2$を代入すると

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r}(I_1 - \frac{N_2}{R} V_2) \quad (2.7.12)$$

となる。ここでコアの断面積をS、コア中の磁束を$\phi = BS$、２次コイルの巻数をN_2とすると$V_2 = N_2 d\phi / dt$であるから

$$V_2 = \mu_0 \mu \frac{N_2 S}{2\pi r}(\frac{dI_1}{dt} - \frac{N_2}{R}\frac{dV_2}{dt}) \quad (2.7.13)$$

を得る。ここで$V, I \propto e^{j\omega t}$とすれば

$$V_2 = \frac{j\omega L_2 / R}{1 + j\omega L_2 / R} \frac{RI_1}{N_2} \quad (2.7.14)$$

となる。これより(2.7.9)式で $n = N_2$、$k = 1$ とすれば良いことになる。即ち図 2-25 の電流トランスは、I_1 をワンターンの１次コイル電流とする$1 : N_2$の密結合トランスと考えられる。負荷Zが抵抗Rと容量Cの並列インピーダンスの場合は、V_2の周波数特性は

$$
\left.\begin{aligned}
V_2 &= \frac{j\omega/Q\omega_0}{1+j\omega/Q\omega_0-\omega^2/\omega_0^2}\frac{RI_1}{N_2} \\
\omega_0 &= 1/\sqrt{L_2C}, \quad Q = R\sqrt{C/L_2}
\end{aligned}\right\}
\tag{2.7.15}
$$

となる。即ち、RI_1/N_2を入力と考えたときの周波数特性関数は (1.3.6)式の２次のBPF と同じ特性となり、$Q<<1$ の場合は(1.3.7)式より低域及び 高域カットオフ周波数は

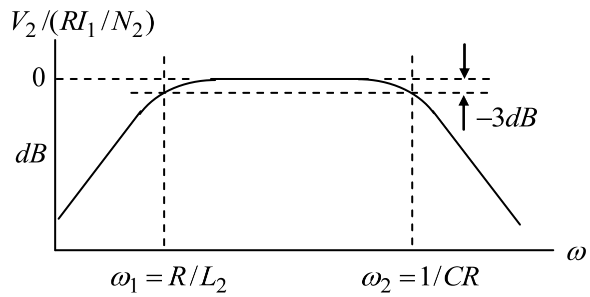


図 2-26　電流トランスの周波数特性

$$
\omega_1 = \omega_0 Q = R/L_2, \qquad \omega_2 = \omega_0/Q = 1/CR \tag{2.7.16}
$$

で与えられ、周波数特性は図 2-26 のようになる。

３章　半導体素子

3-1 ダイオード

pn 接合ダイオードの接合部を流れる電流は、フェルミ順位から伝導バンドに励起されたキャリアー（電子または正孔）が接合部のポテンシャル障壁 $E_0 = qV_0$ を越えて流れる拡散電流である。拡散理論より、図に示すようにダイオードに流れる順方向電流を I、そのときのダイオード両端の（順方向）電圧を V とすると、I は次式（Shockley の整流公式）で与えられることが示される（注参照）。

$$I = I_s(e^{qV/kT} - 1) \qquad (3.1.1)$$

理論的には Si ダイオード、Ge ダイオード、セレン整流器等全ての方向性素子において成立する。実際においてもほぼ(3.1.1)に近い特性になっており、以下では(3.1.1)式を前提とする。ここで $k\,(1.38\times10^{-23} J\cdot K)$ はボルツマン定数、$T\,(K)$ は絶対温度、q は電子電荷 $(1.602\times10^{-19}\ \mathrm{C})$、$I_s$ は逆方向飽和電流である。

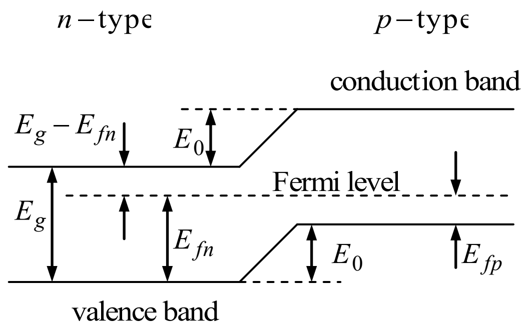


図 3-1　pn 接合のエネルギーバンド

$$I_s = K_s T^2 e^{-E_g/kT} \qquad (3.1.2)$$

$$E_g = \begin{cases} 0.67\,eV & (\mathrm{Ge}) \\ 1.11\,eV & (\mathrm{Si}) \end{cases}$$

$E_g = qV_g$ は束縛バンドと伝導バンド間のバンドギャップエネルギーである。I_s は pn 接合部におけるキャリアの再結合で決まり、温度に大きく依存する（10℃の温度上昇毎に２倍となる）。I を図示すると図 3-2 のようになり、指数関数的に立ち上がる曲線を外挿する直線と V 軸の交点は Ge ダイオードでは $0.2-0.3\,V$、Si ダイオードでは $0.6-0.7$ V である。また、$T = 298\,K\,(25°C)$ では

$$kT/q = 25.6mV \qquad (3.1.3)$$

である。したがって $V >> kT/q$ では

$$I = I_s e^{qV/kT}$$

と近似できる。

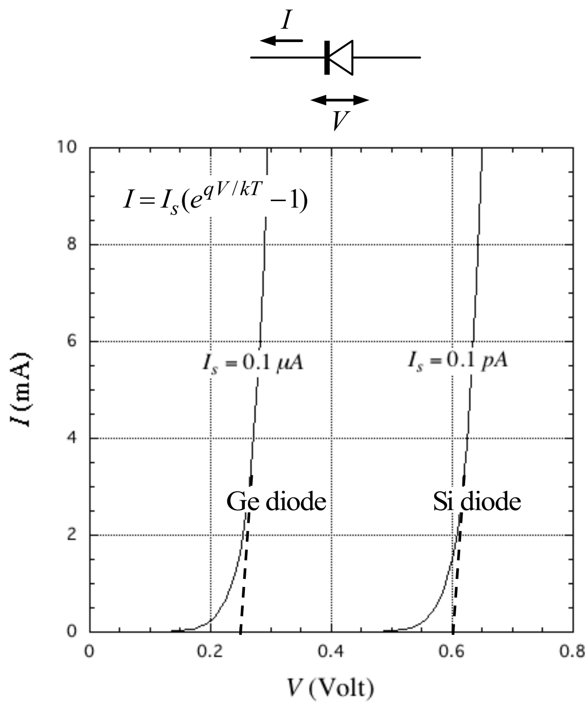


図 3-2　ダイオードの電流電圧特性

ダイオードの小信号コンダクタンスは

$$g = \frac{\partial I}{\partial V} = \frac{qI}{kT}(1 - \frac{I_s}{I}) \tag{3.1.4}$$

で与えられ、$V >> kT/q$では

$$g = \frac{q}{kT} I \qquad (V >> kT/q) \tag{3.1.5}$$

と近似される。例えば$T = 25°C$、$I = 1\ mA$では、コンダクタンス及び順方向抵抗は

$$g = 39\ mS \tag{3.1.6}$$

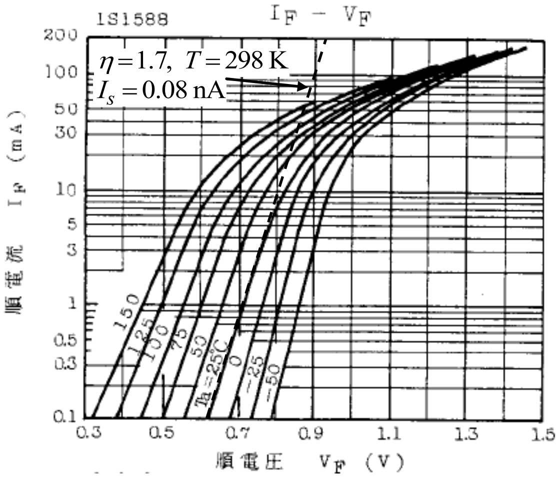
$$r = 1/g = 25.7\Omega \tag{3.1.7}$$

となる。

注：一般的に pn 接合電流は

$$I = I_s(e^{qV/\eta kT} - 1)$$

となる。$T = 298$ K において$\eta = 1.7$とすると右図のように 10 mA 以下の領域では実際のダイオード特性に一致する。電流の大きな領域では半導体チャンネルのオーミック抵抗が無視できなくなるので、指数関数特性からはずれてくる。なおトランジスターでは$\eta = 1$でよく合うようである（図 3-8 参照）。



ダイオード（1S1588）の順方向電流特性

（TOSHIBA 半導体カタログより）

3-1-1 温度依存性

ショックレーの式でも分かるように、半導体素子の特性は接合温度により変化する。そこで、まず電流Iを一定に保ったときの電圧Vの温度Tによる変化を考える。ショックレーの式 (3.1.1) より、$V = 0.6\ V$、$T = 298K$ 、$E_g = qV_g$ として

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_I = \frac{1}{T}(V - \frac{kT^2}{q}\frac{I}{I + I_s}\frac{1}{I_s}\frac{\partial I_s}{\partial T}) \cong \frac{1}{T}(V - \frac{kT^2}{q}\frac{1}{I_s}\frac{\partial I_s}{\partial T})$$

$$= \frac{1}{T}(V - V_g - \frac{2kT}{q}) \cong -1.9mV/°C \tag{3.1.8}$$

となるが、実際には

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_I \cong -2 \sim -2.5\ mV/°C$$

程度である。

3-1-2 接合容量

蓄積容量

pn 接合ダイオードでは順方向電圧をかけると、p 型半導体及び n 型半導体には接合部を通して相手側から､それぞれ電子及びホールが注入され､キャリアの寿命で決まる時間の間蓄積される。この効果は静電容量と等価になり拡散容量または蓄積容量C_fと呼ばれ､$V >> kT/q$では順方向電流Iに比例する（$C_f \propto I$)。蓄積容量は数十 pF 以上となり（電源整流用ダイオードではμFのオーダー)､ダイオードやトランジスター回路における高周波特性を決定する大きな要因となる。スイッチング回路においては、ダイオードが ON 状態から OFF 状態にターンオフするにはC_fに溜まっている電荷を引き抜くためにターンオフ時間が遅れ、スパイク電流の原因となる。後述するトランジスターの等価回路においては、C_fの効果は遷移周波数f_Tとして取り込まれる（3-2-8 節参照)。

障壁容量

pn 接合に逆方向電圧$V = -V_r$をかけると、接合部における電場によりキャリアが引き抜かれ、接合近傍にキャリアが存在しない空乏層ができる。このときの接合容量C_rは空乏層の長さに逆比例し、障壁容量、遷移容量、空間電荷容量等と呼ばれる。一般に障壁容量は蓄積容量よりずっと小さい（$C_r << C_f$)。空乏層の広がり即ち遷移容量はV_rによって変わるので、電圧可変容量素子として利用される。そのような素子はバリキャップ、バラクタダイオード等と呼ばれる。障壁容量のV_r依存性は、接合部ににおける不純物濃度分布で決まり、以下の３種類に分類される。

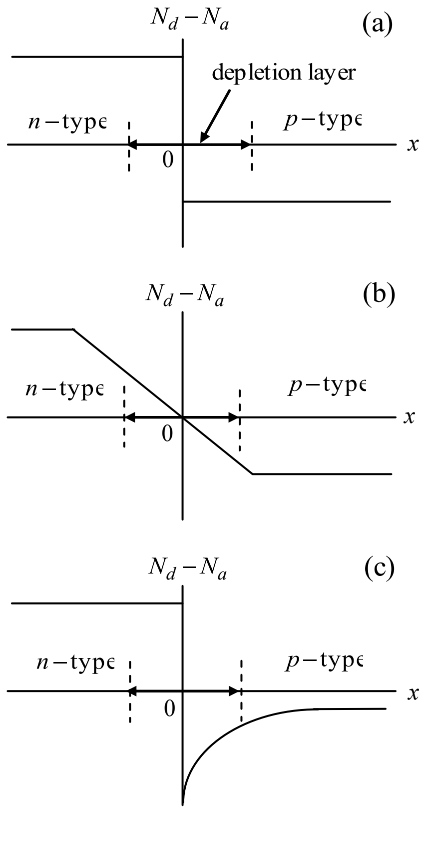


図 3-3　接合部の不純物濃度

・階段接合

接合部における不純物濃度分布が図 3-3(a)のように階段状になっている pn 接合を、階段接合と呼ぶ。階段接合における空乏層の広がり分布は$(V_r + V_0)^{1/2}$に

比例し、接合容量は

$$C_r = K(V_r + V_0)^{-1/2} \tag{3.1.9}$$

となる。

・傾斜接合

接合部の不純物濃度分布が図 3-3(b)のように直線的に変化している接合を傾斜接合と云う。この場合の空乏層の広がりは$(V_r + V_0)^{1/3}$に比例し、接合容量のV_r依存性は

$$C_r = K(V_r + V_0)^{-1/3} \tag{3.1.10}$$

で与えられる。

・超階段接合

LC共振回路のCに電圧可変ダイオードを用いて周波数制御を行う場合、共振周波数$f = 1/\sqrt{LC}$をV_rに対して直線的に変えたい場合に、階段接合や傾斜接合ではV_r依存性が緩やかなので不都合である。そこで急峻なV_r依存性を得るために図 3-3(c) のように p 型領域の不純物濃度を急峻に変えたものを、超階段接合と云う。

3-2 トランジスター（transistor）

npn 型トランジスターの回路記号は図 3-4(a)で書かれるが、その構造は模式図(b)のように、n 型半導体から成るコレクター（C）とエミッター（E）が、p 型半導体から成るベース層（B）を挿んで対向している。この npn 積層構造は、単一の Si や Ge 半導体結晶に、順次アクセプター、ドナー、アクセプター不純物をドーピングして製造される。したがって、(c)図のように２本のダイオードを逆向きに接続してそれぞれコレクター及びエミッターとし、接続点をベースとしたものと考えられる。単独のダイオード同士の接続と異なる点は、ベース層の厚さがキャリア（電子又はホール）の平均自由行程（mean free path）より薄く（1～30 μm）作られていることである。

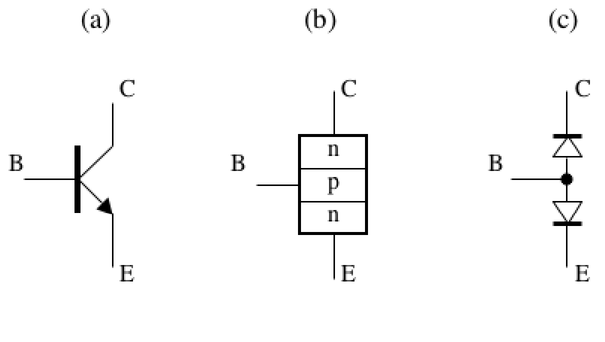


図 3-4　トランジスターの概念図

p と n を入れ換えたものを pnp 型トランジスターと云う。トランジスターの動作を担う電荷はベース内小数キャリアであり、npn 型トランジスターでは小数キャリアーは電子であり、pnp 型トランジスターの小数キャリアーは正孔（ホール）である。以下 npn 型トランジスターを例にとって解説する。

E または C からベース領域に注入されたキャリア（電子）はベース層を拡散して通り抜け、C または E に達する。これを等価回路で表すと図 3-5 のようになる。

3-2-1 トランジスターモデル

エミッターに対するベース電圧をV_{BE}とすると、エミッター・ベース間接合を流れるダイオード電流は $I_{EBS}(e^{qV_{BE}/kT}-1)$ で与えられる。また、ベースに対するコレクター電圧をV_{CB}とすると、V_{CB}はベース・コレクター間接合に対して逆方向電圧となるので、コレクター・ベース間接合を流れるダイオード電流は $I_{CBS}(e^{-qV_{CB}/kT}-1)$ で与えられる。これらのダイオード電流に加えて、ベース層を拡散してエミッター及びコレクターからそれぞれコレクター及びエミッターに流れ込む拡散電流 $\alpha_N I_{EBS}(e^{qV_{BE}/kT}-1)$ 及び $\alpha_I I_{CBS}(e^{-qV_{CB}/kT}-1)$ があるので、ダイオード電流とこれらの拡散電流を加えたものが、それぞれの全電流となる。

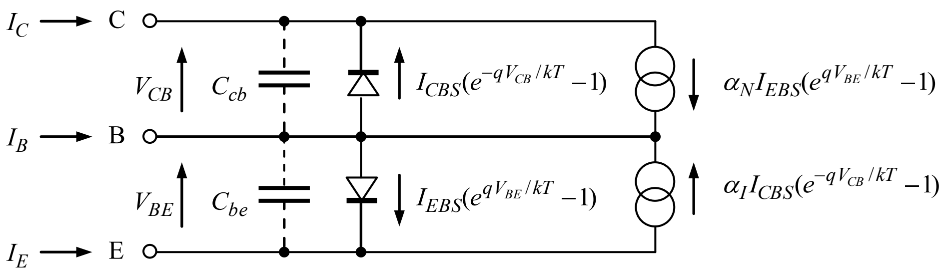


図 3-5　npn トランジスターの基本等価回路

α_N はエミッター側の接合を流れるダイオード電流 $I_{EBS}(e^{qV_{BE}/kT}-1)$ が、ベース層を拡散してコレクターに到達する割合、すなわち順方向電流増幅率であり、α_I はコレクター側の接合を流れるダイオード電流がエミッターに到達する割合、すなわち逆方向電流増幅率である。但し、$\alpha_N<1$、$\alpha_I<1$ である。以上を等価回路で表わすと図 3-5 のようになる。これが npn トランジスターの基本等価回路である。なお、ここでは静的な特性を考えているので、エミッター・ベース間接合容量C_{be}及びコレクター・ベース間接合容量C_{cb}は無視しているが、高周波領域ではこれらの接合容量の影響を考慮する必要がある。

等価回路より

$$\left.\begin{aligned} I_E &= -I_{EBS}(e^{qV_{BE}/kT}-1)+\alpha_I I_{CBS}(e^{-qV_{CB}/kT}-1) \\ I_C &= \alpha_N I_{EBS}(e^{qV_{BE}/kT}-1)-I_{CBS}(e^{-qV_{CB}/kT}-1) \\ I_B &= -I_E-I_C \\ &= (1-\alpha_N)I_{EBS}(e^{qV_{BE}/kT}-1)+(1-\alpha_I)I_{CBS}(e^{-qV_{CB}/kT}-1) \end{aligned}\right\} \tag{3.2.1}$$

を得るので、これらを

$$\left.\begin{aligned}
&I_E = -\alpha_I I_C - I_{EB0}(e^{qV_{BE}/kT} - 1) \\
&I_C = -\alpha_N I_E + I_{CB0}(e^{-qV_{CB}/kT} - 1) \\
&I_B = -I_E - I_C \\
&I_{EB0} = (1 - \alpha_I \alpha_N) I_{EBS} \\
&I_{CB0} = (1 - \alpha_I \alpha_N) I_{CBS}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.2.2)$$

と書き直すと、等価回路は図 3-6 のように書ける。なお、C_{be}、C_{cb} が無視できない高周波領域では、接合容量を流れる電流 $j\omega C_{cb} v_{cb}$、$-j\omega C_{be} v_{be}$、$j\omega C_{be} v_{be} - j\omega C_{cb} v_{cb}$ をそれぞれ I_C、I_E、I_B に加える必要がある（小文字は小信号を表す）。

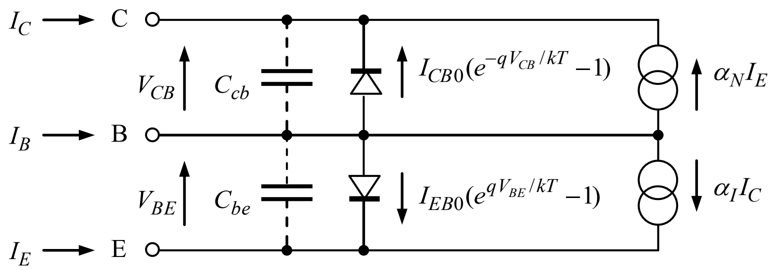


図 3-6　トランジスターの実用的等価回路

実際のトランジスターでは接合の不完全さにより、以上のモデルから少しはずれるが基本的な考え方は成立すると考えて良い。

3-2-2 ベース接地の静特性

(3.2.2)の第２式よりベース接地の静特性を描くことができる。例として順方向電流増幅率を $\alpha = 0.95$（α_N は通常単に α と書かれる)、$I_{CB0} = 10\mu A$ とすると図 3-7 のようになる。図において、I_C がほぼ水平になっている領域を能動領域、急激に 0 から立ち上がっている

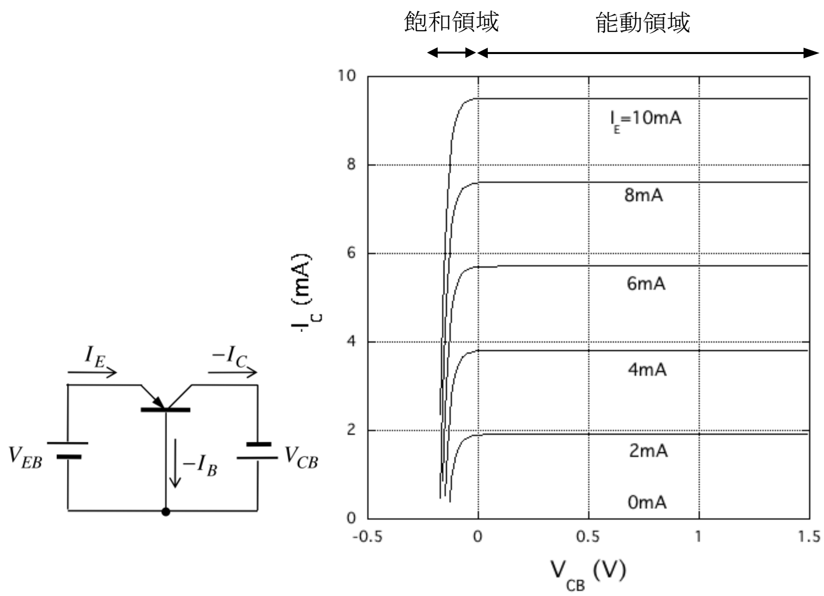


図 3-7　ベース接地の静特性

領域を飽和領域と云う。能動領域では$V_{CB} >> kT/q$であることから

$$\left(\frac{\partial I_C}{\partial V_{CB}}\right)_{I_E} = -\frac{q}{kT} I_{CB0} e^{-qV_{CB}/kT} \tag{3.2.3}$$

は非常に小さく、I_Cはエミッター電流のみで決まりコレクター電圧にはほとんど影響されない。これはコレクターインピーダンスが極めて高いことを表わす。

3-2-3 エミッター接地の静特性

(3.2.2)式より、コレクター電流は

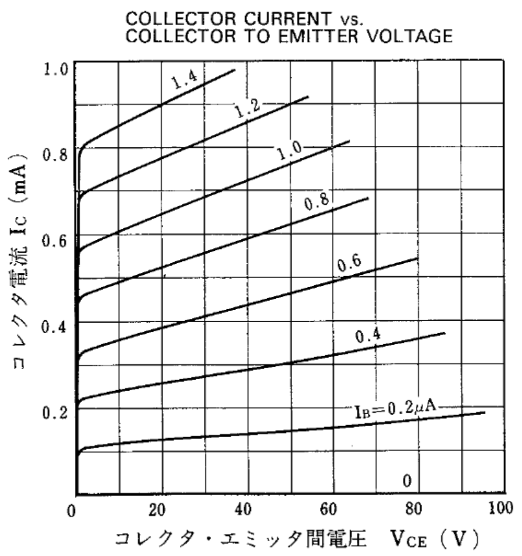
$$I_C = \frac{(\alpha_N I_{EB0} + I_{CB0} e^{-qV_{CE}/kT}) I_B + I_{EB0} I_{CB0} (e^{-qV_{CE}/kT} - 1)}{(1-\alpha_N) I_{EB0} - (1-\alpha_I) I_{CB0} e^{-qV_{CE}/kT}}$$

となるが、能動領域では$V_{CE} >> kT$より

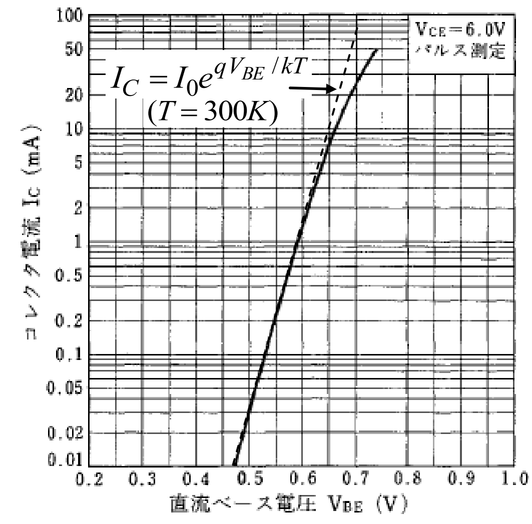
$$I_C = \frac{\alpha_N}{1-\alpha_N} I_B + \frac{I_{CB0}}{1-\alpha_N}(e^{-qV_{CE}/kT} - 1)$$

$$= \frac{\alpha_N}{1-\alpha_N} I_B - \frac{I_{CB0}}{1-\alpha_N} \tag{3.2.4}$$

と近似できる。



(a)静特性



(b) I_CのV_{BE}依存性

図 3-8　エミッター接地の静特性

(2SC1845：NEC 電子デバイスカタログより)

また

$$\left(\frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}}\right)_{I_B} = -\frac{q}{kT}\frac{\{(1-\alpha_N\alpha_I)I_B + (1-\alpha_N)I_{EB0}\}I_{EB0}I_{CB0}e^{-qV_{CE}/kT}}{\{(1-\alpha_N)I_{EB0} - (1-\alpha_I)I_{CB0}e^{-qV_{CE}/kT}\}^2}$$
$$\cong -\frac{q}{kT}\{\frac{1-\alpha_N\alpha_I}{(1-\alpha_N)^2}\frac{I_B}{I_{EB0}} + \frac{1}{1-\alpha_N}\}I_{CB0}e^{-qV_{CE}/kT} \tag{3.2.5}$$

より

$$\left|\frac{\partial I_C}{\partial V_{CE}}\right|_{I_B} >> \left|\frac{\partial I_C}{\partial V_{CB}}\right|_{I_E} \tag{3.2.6}$$

であり、能動領域におけるI_Cのコレクター電圧依存性（図 3-8(a)）はエミッター接地の方がベース接地のそれよりずっと大きい ((3.2.45)式参照)。これはエミッター接地のコレクターインピーダンスがベース接地のそれより小さいことを表わす。

なお図 3-8(b)に見られるように、コレクター電流I_Cが$0.1mA \sim 10mA$の範囲ではベース・エミッター間電圧V_{BE}は、ほぼ$0.55V \sim 0.65V$程度の範囲にあるので、通常の回路設計においては$V_{BE} \sim 0.6V$としてバイアス設計してよい。また、図中の破線は$I_C = I_0 e^{qV_{BE}/kT}$と仮定した場合のI_Cであり、$I_C \sim 10mA$程度まではきれいな指数関数特性であることが分かる。。

3-2-4 トランジスターの動特性（直流小信号）

電流の向きを図 3-9(a)のように定義し

$$V_{CB} >> kT/q, \qquad V_{BE} >> kT/q \tag{3.2.7}$$

の条件のもとで能動領域で考える。この場合図 3-9(a) の等価回路は図(b)のように近似される。図(b) の等価回路より

$$\left.\begin{aligned} I_C &= \alpha_N I_E + I_{CB0} \\ I_E &= \alpha_I I_C + I_{EB0}e^{qV_{BE}/kT} \\ I_B &= I_E - I_C \end{aligned}\right\} \tag{3.2.8}$$

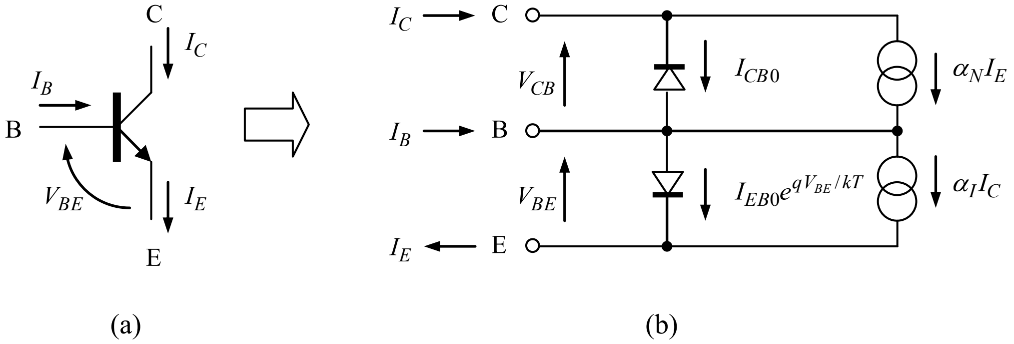


図 3-9　能動領域における直流等価回路

したがって

$$
\left.\begin{aligned}
I_C &= \frac{\alpha_N}{1-\alpha_N} I_B + \frac{1}{1-\alpha_N} I_{CB0} \\
I_E &= \frac{1}{1-\alpha_N} I_B + \frac{1}{1-\alpha_N} I_{CB0} \\
I_B &= \frac{1-\alpha_N}{1-\alpha_I\alpha_N} I_{EB0} e^{qV_{BE}/kT} - \frac{1-\alpha_I}{1-\alpha_I\alpha_N} I_{CB0}
\end{aligned}\right\} \tag{3.2.9}
$$

となる。これより

$$
h_{FE} = \frac{\alpha_N}{1-\alpha_N} \quad (\equiv \beta) \tag{3.2.10}
$$

を用いて、コレクター電流に対するよく知られた式

$$
I_C = h_{FE} I_B + (h_{FE}+1) I_{CB0} \tag{3.2.11}
$$

を得る。さらに、能動領域ではI_C、I_BにおけるI_{CB0}の項は十分小さいので、これを無視して

$$
\left.\begin{aligned}
I_B &= \frac{1-\alpha_N}{1-\alpha_I\alpha_N} I_{EB0} e^{qV_{BE}/kT} \\
I_C &= h_{FE} I_B \\
I_E &= I_C + I_B
\end{aligned}\right\} \tag{3.2.12}
$$

と近似できる。なお、h_{FE}はβとも書かれる。

上式より、エミッター接地における理想トランジスターの伝達コンダクタンス

$$
g_m = \frac{\partial I_C}{\partial V_{BE}} = \frac{q}{kT} I_C \tag{3.2.13}
$$

B-E 間入力コンダクタンス

$$
y_{ie} = \frac{\partial I_B}{\partial V_{BE}} = \frac{g_m}{h_{FE}} \tag{3.2.14}
$$

小信号電流増幅率

$$
h_{fe} = \frac{\partial I_C}{\partial I_B} = h_{FE} \qquad (\text{実際には } h_{fe} \geq h_{FE}) \tag{3.2.15}
$$

が得られる。実際のトランジスターではこれらが近似的に成立している。

3-2-5 バイアス回路と温度特性

トランジスター回路では、ダイオード電流及びI_{CB0}の温度依存性により、動作点が温度依存性を持つ。そこで、コレクター電流I_Cの温度による変動を考察しておく。I_Cの温度変動はV_{BE}、I_{CB0}、

h_{FE}等の温度依存性によるものである。一般に Ge トランジスターでは、ダイオードの項で述べたように接合の逆方向飽和電流が大きいため、I_{CB0}による温度変動が主な原因となり、Si トランジスターではI_{CB0}が極めて小さいことから、V_{BE}の温度依存性が主な原因となる。なお、h_{FE}の温度変動は小さいので以下では無視することにする。

注： Si トランジスターのh_{fe}の温度依存性

$$\text{アロイ型、メサ型} \qquad \frac{1}{h_{fe}}\frac{\partial h_{fe}}{\partial T} \approx 0.5\,\%/°C$$

$$\text{プレーナー型} \qquad \frac{1}{h_{fe}}\frac{\partial h_{fe}}{\partial T} \approx 1\%/°C$$

歴史的には、初期のトランジスターは Ge であったため、I_{CB0}によるI_Cの温度変動が大きな問題であった。I_{CB0}によるI_Cの変化を安定指数

$$S = \frac{\partial I_C}{\partial I_{CB0}}$$

と定義し、いかにしてS を小さく抑えるかが回路設計の命題の一つであったが、Si トランジスターの時代になるとともに安定指数はほとんど意味を成さなくなり、顧みられることがなくなった。ちなみに、I_{CB0}自体の温度依存性は大きく

$$\text{Ge transistor:} \quad \frac{1}{I_{CB0}}\frac{\partial I_{CB0}}{\partial T} \approx 0.1/°C$$

$$\text{Si transistor :} \quad \frac{1}{I_{CB0}}\frac{\partial I_{CB0}}{\partial T} \approx 0.14\,/°C$$

程度である。したがって温度Tが$10°C$上昇すると

$$\text{Ge transistor:} \quad I_{CB0}(T+10°C) \approx 2.7 I_{CB0}(T)$$

$$\text{Si transistor :} \quad I_{CB0}(T+10°C) \approx 4.1 I_{CB0}(T)$$

と云う大きな変化を示す。I_{CB0}自体の温度依存性は Ge トランジスターより Si トランジスターの方が大きいが、I_{CB0}そのものが小さいので、I_Cに対する影響は無視できるほど小さい。

(a) ダイオード

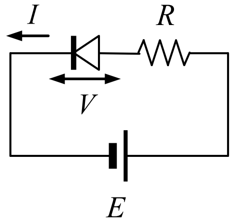


図 3-10　ダイオード回路

図 3-10 に示すようなダイオード回路を考えると

$$RI + V = E \qquad (3.2.16)$$

より

$$R\frac{\partial I}{\partial T}+\left(\frac{\partial V}{\partial I}\right)_T\frac{\partial I}{\partial T}+\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_I=0$$

ここで

$$\left(\frac{\partial V}{\partial I}\right)_T\cong\frac{kT}{q}\frac{1}{I},\qquad\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_I\approx -2\ mV/°C \tag{3.2.17}$$

したがって

$$\frac{\partial I}{\partial T}\cong-\frac{1}{R+(kT/q)/I}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_I \tag{3.2.18}$$

もし

$$IR>>kT/q\ (=25.6\ mV) \tag{3.2.19}$$

ならば

$$\frac{\partial I}{\partial T}\cong-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_I \tag{3.2.20}$$

となる。例として、$I=1\ mA$、$R=10\ k\Omega$とすると

$$\frac{\partial I}{\partial T}\cong\frac{2\ mV}{10\ k\Omega}=0.2\ \mu A/°C \tag{3.2.21}$$

である。

(b) トランジスター

h_{fe}の温度変化は小さい

$$\frac{1}{h_{fe}}\frac{\partial h_{fe}}{\partial T}<1\%/°C \tag{3.2.22}$$

ので無視することにする。また、能動領域ではI_BにおけるI_{CB0}の項は無視できる。

$$I_B\cong\frac{1-\alpha_N}{1-\alpha_I\alpha_N}I_{EB0}e^{qV_{BE}/kT} \tag{3.2.23}$$

したがってV_{BE}の温度変化はダイオードの場合と同じになる。

$$\left(\frac{\partial V_{BE}}{\partial T}\right)_{I_B}\cong -2\ mV/°C \tag{3.2.24}$$

次に、図 3-11 の回路を考えると

$$(I_C+I_B)R_E+V_{BE}+I_BR=V_{BB} \tag{3.2.25}$$

である。したがって

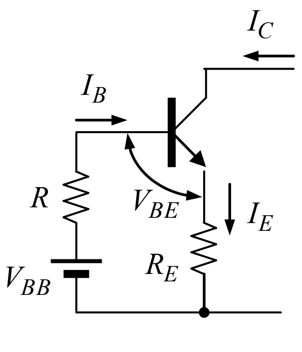


図 3-11　バイアス回路

$$\frac{\partial I_C}{\partial T}+\left(1+\frac{R}{R_E}\right)\frac{\partial I_B}{\partial T}=-\frac{1}{R_E}\frac{\partial V_{BE}}{\partial T}$$

ここで、$I_C=h_{FE}I_B+(h_{FE}+1)I_{CB0}$より

$$\frac{\partial I_C}{\partial T}=h_{fe}\frac{\partial I_B}{\partial T}+(h_{fe}+1)\frac{\partial I_{CB0}}{\partial T}$$

でなければならないことから

$$\frac{\partial I_C}{\partial T}=-\frac{h_{fe}}{(h_{fe}+1)R_E+R}\frac{\partial V_{BE}}{\partial T}+\frac{(h_{fe}+1)(R_E+R)}{(h_{fe}+1)R_E+R}\frac{\partial I_{CB0}}{\partial T} \tag{3.2.26}$$

となる。さらに

$$\frac{\partial V_{BE}}{\partial T}=\left(\frac{\partial V_{BE}}{\partial T}\right)_{I_B}+\left(\frac{\partial V_{BE}}{\partial I_B}\right)_T\frac{\partial I_B}{\partial T}$$

$$\left(\frac{\partial V_{BE}}{\partial I_B}\right)_T=h_{ie},\qquad \frac{\partial I_B}{\partial T}=\frac{1}{h_{fe}}\frac{\partial I_C}{\partial T}-(1+\frac{1}{h_{fe}})\frac{\partial I_{CB0}}{\partial T}$$

より

$$\frac{\partial I_C}{\partial T}=-\frac{h_{fe}}{(h_{fe}+1)R_E+R+h_{ie}}\left(\frac{\partial V_{BE}}{\partial T}\right)_{I_B}+\frac{(h_{fe}+1)(R_E+R+h_{ie})}{(h_{fe}+1)R_E+R+h_{ie}}\frac{\partial I_{CB0}}{\partial T}$$
$$+\frac{(R_E+R+h_{ie})(I_B+I_{CB0})}{(h_{fe}+1)R_E+R+h_{ie}}\frac{\partial h_{fe}}{\partial T} \tag{3.2.27}$$

を得る。ここで右辺第３項は小さいので無視することができる。以下に具体的な例により、回路方式によってバイアスの温度依存性は大きく変わることを示す。

例１： $R_E=0$の場合

$$\frac{\partial I_C}{\partial T}=-\frac{h_{fe}}{R+h_{ie}}\left(\frac{\partial V_{BE}}{\partial T}\right)_{I_B}+(h_{fe}+1)\frac{\partial I_{CB0}}{\partial T} \tag{3.2.28}$$

Si トランジスターを仮定して、$h_{fe}=100$、$I_C=1\,mA$、$I_{CB0}=0.1\,\mu A$、$R=10\,k\Omega$とすると

$$\left(\frac{\partial V_{BE}}{\partial T}\right)_{I_B}\cong -2\,mV/°C$$

$$h_{ie}=h_{fe}\frac{kT}{qI_C}\cong 2.5\,k\Omega,\qquad \frac{\partial I_{CB0}}{\partial T}\cong 0.14 I_{CB0}=0.014\,\mu A/°C$$

より

$$\frac{\partial I_C}{\partial T}\cong 16\,\mu A/°C+1.4\,\mu A/°C$$

第１項はV_{BE}の温度変化による項、第２項はI_{CB0}による項である。

例２：$h_{fe}R_E >> R, h_{ie}$の場合

$h_{fe} >> 1$として

$$\frac{\partial I_C}{\partial T} = -\frac{1}{R_E}\left(\frac{\partial V_{BE}}{\partial T}\right)_{I_B} + \frac{R_E + R + h_{ie}}{R_E}\frac{\partial I_{CB0}}{\partial T} \tag{3.2.29}$$

したがって$h_{fe} = 100$、$I_C = 1\,mA$、$I_{CB0} = 0.1\,\mu A$、$R = 10\,k\Omega$、$R_E = 1\,k\Omega$では

$$\frac{\partial I_C}{\partial T} \cong 2\ \mu A/°C + 0.19\ \mu A/°C$$

この場合はV_{BE}及びI_{CB0}の温度変化によるI_Cの変化は、例１の場合に比べて１桁近く改善される。このように、バイアスの温度依存性はエミッター抵抗R_Eによって大きく改善されることが分かる。

3-2-6 トランジスターの等価回路

トランジスターを表現する等価回路には、T 型等価回路、ハイブリッドπ型等価回路、四端子等価回路等がある。四端子等価回路には、h パラメーター表示、y パラメーター表示（アドミッタンス表示）、s パラメーター表示がある。トランジスターでは h パラメーター表示が多く使われ、電界効果トランジスター（FET）では y パラメーター表示がよく用いられる。 s パラメーター表示は高周波領域での表現に用いられ、マイクロ波領域で使用されるトランジスターによく用いられる。s パラメーターとは反射係数及び透過係数による表現である。

(a) 四端子等価回路

(a-1) ハイブリッド・パラメーター（h パラメーター）表示

ハイブリッド・パラメーター表示による四端子回路は

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= h_i i_1 + h_r v_2 \\ i_2 &= h_f i_1 + h_o v_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.2.30}$$

で定義され（図 3-12）、h パラメーター表示の等価回路は図 3-13 のように描ける。ここで

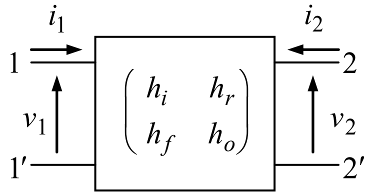


図 3-12　h パラメーター表示

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial v_1}{\partial i_1}\right)_{v_2} = h_i, \quad \left(\frac{\partial v_1}{\partial i_1}\right)_{i_2} = h_i - \frac{h_r h_f}{h_o}, \quad \left(\frac{\partial i_2}{\partial i_1}\right)_{v_2} = h_f \\ &\left(\frac{\partial i_2}{\partial i_1}\right)_{v_1} = h_f - \frac{h_o h_i}{h_r}, \quad \left(\frac{\partial i_2}{\partial v_2}\right)_{i_1} = h_o, \quad \left(\frac{\partial i_2}{\partial v_2}\right)_{v_1} = h_o - \frac{h_r}{h_i} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.31}$$

より、h_iは出力短絡（$v_2=0$）における入力インピーダンス、h_fは同じく電流増幅率を表すことが分かる。h_oは入力開放（$i_1=0$）での出力コンダクタンスを、またh_rは出力電圧の入力電圧への帰還率を表す。

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial v_1}{\partial v_2}\right)_{i_1} &= h_r \\ \left(\frac{\partial v_1}{\partial v_2}\right)_{i_2} &= h_r - \frac{h_i h_o}{h_f}\end{aligned}\right\} \qquad (3.2.32)$$

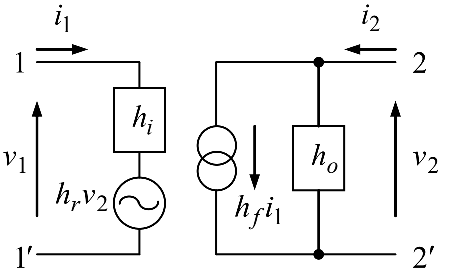


図 3-13　h パラメーター表示の等価回路

更に、出力短絡における相互コンダクタンスは

$$\left(\frac{di_2}{dv_1}\right)_{v_2} = \frac{h_f}{h_i} \equiv g_m \qquad (3.2.33)$$

で表され、図 3-13 における電流源$h_f i_1$は$g_m v_1$なる電流源に置き換えてもよい（図 3-14）。エミッター接地回路の場合h_fは個々のトランジスターの個体差が大きいので回路設計には図 3-14 の方が便利である。以上の h パラメーター表示は直感的に分かり易く、増幅素子を表現するのに適している。

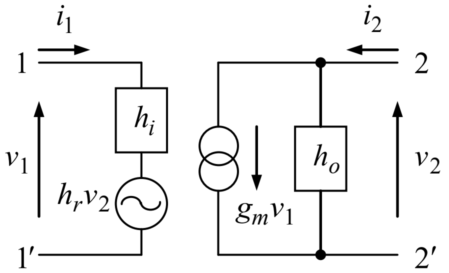


図 3-14　電流源を$g_m v_1$に置き換えた等価回路

(a-2) y パラメーター表示（アドミッタンス行列表示）

アドミッタンス行列で表現される四端子回路は

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= y_i v_1 + y_r v_2 \\ i_2 &= y_f v_1 + y_o v_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.34)$$

で定義され、この等価回路は図 3-15 のように描ける。y_iは出力短絡における入力コンダクタンス（$=1/h_i$）、y_oは入力短絡における出力コンダクタンス（$=h_o$）を表す。y_fは相互コンダクタンス（g_m）、y_rは出力電圧から入力電流への帰還コンダクタンスである。y パラメーター表示は FET の表現によく用いられる。

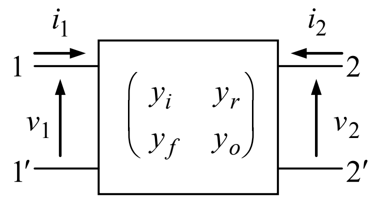


図 3-15　y パラメーター表示

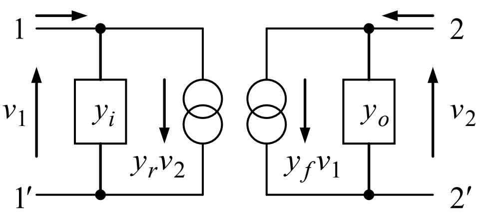


図 3-16　y パラメーター表示の等価回路

(b) トランジスターの等価回路（低周波領域）

3-2-4 節で議論した等価回路より T 型等価回路を導き、回路設計に便利なハイブリッドπ型等価回路に変換することを考える。I_Eの向きを図 3-9 のように定義し、V及びIの小信号振幅を$v = \Delta V$、$i = \Delta I$と書くと、小信号に対する応答は

$$\left.\begin{aligned}
i_e &= \left(\frac{\partial I_E}{\partial V_{BE}}\right)_{V_{CB}} v_{be} + \left(\frac{\partial I_E}{\partial V_{CB}}\right)_{V_{BE}} v_{cb} \\
i_c &= \left(\frac{\partial I_C}{\partial V_{BE}}\right)_{V_{CB}} v_{be} + \left(\frac{\partial I_C}{\partial V_{CB}}\right)_{V_{BE}} v_{cb} \\
i_b &= \left(\frac{\partial I_B}{\partial V_{BE}}\right)_{V_{CB}} v_{be} + \left(\frac{\partial I_B}{\partial V_{CB}}\right)_{V_{BE}} v_{cb}
\end{aligned}\right\} \tag{3.2.35}$$

となる。ここで基本方程式(3.2.1)において$I_E \to -I_E$とすると

$$\left.\begin{aligned}
I_E &= \frac{I_{EB0}}{1-\alpha_I\alpha_N}(e^{qV_{BE}/kT}-1) - \frac{\alpha_I I_{CB0}}{1-\alpha_I\alpha_N}(e^{-qV_{CB}/kT}-1) \\
I_C &= \frac{\alpha_N I_{EB0}}{1-\alpha_I\alpha_N}(e^{qV_{BE}/kT}-1) - \frac{I_{CB0}}{1-\alpha_I\alpha_N}(e^{-qV_{CB}/kT}-1) \\
I_B &= I_E - I_C
\end{aligned}\right\} \tag{3.2.36}$$

を得るので、(3.2.35)式の微係数は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial I_E}{\partial V_{BE}}\right)_{V_{CB}} &= \frac{q}{kT}\frac{I_{EB0}}{1-\alpha_I\alpha_N}e^{qV_{BE}/kT} \cong \frac{q}{kT}I_E \\
\left(\frac{\partial I_C}{\partial V_{BE}}\right)_{V_{CB}} &= \frac{q}{kT}\frac{\alpha_N I_{EB0}}{1-\alpha_I\alpha_N}e^{qV_{BE}/kT} \cong \frac{q}{kT}I_C \\
\left(\frac{\partial I_B}{\partial V_{BE}}\right)_{V_{CB}} &= \left(\frac{\partial I_E}{\partial V_{BE}}\right)_{V_{CB}} - \left(\frac{\partial I_C}{\partial V_{BE}}\right)_{V_{CB}} \cong \frac{q}{kT}(I_E - I_C) \cong \frac{q}{kT}\frac{I_C}{h_{FE}} \\
\left(\frac{\partial I_E}{\partial V_{CB}}\right)_{V_{BE}} &= \frac{q}{kT}\frac{\alpha_I I_{CB0}}{1-\alpha_I\alpha_N}e^{-qV_{CB}/kT} \\
\left(\frac{\partial I_C}{\partial V_{CB}}\right)_{V_{BE}} &= \frac{q}{kT}\frac{I_{CB0}}{1-\alpha_I\alpha_N}e^{-qV_{CB}/kT} \\
\left(\frac{\partial I_B}{\partial V_{CB}}\right)_{V_{BE}} &= \left(\frac{\partial I_E}{\partial V_{CB}}\right)_{V_{BE}} - \left(\frac{\partial I_C}{\partial V_{CB}}\right)_{V_{BE}} = -\frac{q}{kT}\frac{1-\alpha_I}{1-\alpha_I\alpha_N}I_{CB0}e^{-qV_{CB}/kT}
\end{aligned}$$

エミッター抵抗 r_e 及びコレクター抵抗 r_c を

$$
\left.
\begin{aligned}
r_e &= \left(\frac{\partial I_E}{\partial V_{BE}}\right)_{V_{CB}}^{-1} = \frac{\alpha_N}{g_m} \\
r_c &= \left(\frac{\partial I_C}{\partial V_{CB}}\right)_{V_{BE}}^{-1} = \frac{1-\alpha_I\alpha_N}{g_m}\frac{I_C}{I_{CB0}}e^{qV_{CB}/kT}
\end{aligned}
\right\} \tag{3.2.37}
$$

によって定義すると、

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial I_B}{\partial V_{CB}}\right)_{V_{BE}} &= -(1-\alpha_I)\left(\frac{\partial I_C}{\partial V_{CB}}\right)_{V_{BE}} \\
&= -\frac{1-\alpha_I}{r_c}
\end{aligned} \tag{3.2.38}
$$

より、小信号についての関係式を

$$
i_c = g_m v_{be} + \frac{v_{cb}}{r_c}, \quad i_e = \frac{v_{be}}{r_e} + \frac{\alpha_I}{r_c}v_{cb}, \quad i_b = i_e - i_c \tag{3.2.39}
$$

と書くことができ、図 3-17 の T 型等価回路が成立する。r_e は出力短絡（$v_{ce}=0$）における入力抵抗であり、r_cは入力短絡（$v_{be}=0$）における出力抵抗である。

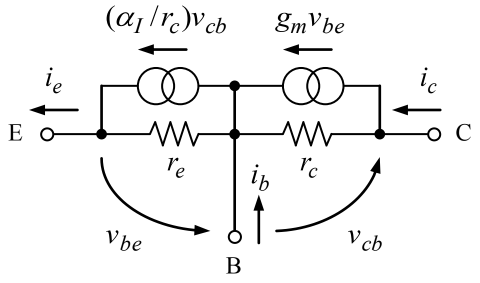


図 3-17　T 型等価回路

以上ではベース端子 B をベースと考えてきたが、実際にはベースとして動作する領域と端子 B の間にはチャンネル抵抗が存在する。そこで図 3-18 のようにベースとして動作する領域を、実効的に仮想ベース点 B’で表すものとして、BB’間の抵抗を $r_{bb'}$ と書く。$r_{bb'}$ をベース拡がり抵抗と呼び、20～100Ω 程度の大きさである。$r_{bb'}$ を考慮すると T 型等価回路は図 3-19 のように描かれるが、$r_{bb'}$ は小さいので以降では無視する（注参照）。

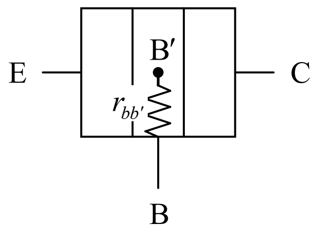


図 3-18　ベース拡がり抵抗

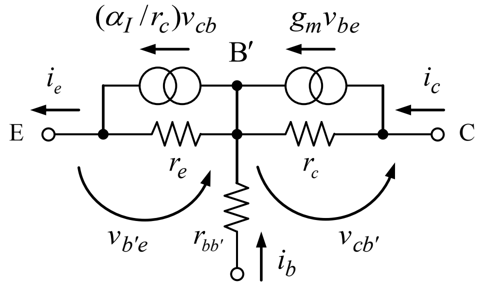


図 3-19　$r_{bb'}$ を考慮した T 型等価回路

注：後述のように B’−E 間には並列に C_{be} が入るので $r_{bb'}=100\Omega$、$C_{be}=50pF$ とすると、$r_{bb'}$ と C_{be} による遮断周波数は

$$
1/C_{be}r_{bb'} = 2\pi \times 32MHz
$$

となり、概略 $30MHz$ 以下では $r_{bb'}$ を無視することができる。

ベース接地回路の場合は図 3-17 の等価回路でよいが、エミッター接地回路の場合は、コレクター電流によりベースに帰還がかかるので、取り扱いに不便である。そこでエミッター接地回路での取り扱いが便利なハイブリッドπ型等価回路を導く。ベース接地では、h パラメーター表示での四端子回路の電圧、電流との対応は

$$(v_1,i_1)\leftrightarrow(-v_{be},-i_e),\qquad (v_2,i_2)\leftrightarrow(v_{cb},i_c)$$

であり、h パラメーターは

$$\left.\begin{aligned} -v_{be} &= -h_{ib}i_e + h_{rb}v_{cb} \\ i_c &= -h_{fb}i_e + h_{ob}v_{cb} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.40}$$

で定義される。一方 (3.2.39) 式より

$$-v_{be} = -r_e i_e + \frac{\alpha_I r_e}{r_c}v_{cb},\qquad i_c = g_m r_e i_e + \frac{1-\alpha_I\alpha_N}{r_c}v_{cb}$$

であることから

$$\left.\begin{aligned} h_{ib} &= r_e = \frac{\alpha_N}{g_m}, & h_{rb} &= \frac{\alpha_I r_e}{r_c} = \frac{\alpha_I\alpha_N}{r_c g_m} \\ h_{fb} &= -g_m r_e = -\alpha_N, & h_{ob} &= \frac{1-\alpha_I\alpha_N}{r_c} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.41}$$

となる。一方、エミッター接地では

$$(v_1,i_1)\leftrightarrow(v_{be},i_b),\qquad (v_2,i_2)\leftrightarrow(v_{ce},i_c)$$

より

$$\left.\begin{aligned} v_{be} &= h_{ie}i_b + h_{re}v_{ce} \\ i_c &= h_{fe}i_b + h_{oe}v_{ce} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.42}$$

で h パラメーターが定義される。(3.2.35)、(3.2.37)式より

$$\left.\begin{aligned} v_{be} &= \frac{h_{FE}r_c}{r_c g_m + h_{FE}(1-\alpha_I)}i_b + \frac{h_{FE}(1-\alpha_I)}{r_c g_m + h_{FE}(1-\alpha_I)}v_{ce} \\ i_c &= \frac{h_{FE}(r_c g_m - 1)}{r_c g_m + h_{FE}(1-\alpha_I)}i_b + \frac{1+h_{FE}(1-\alpha_I)}{r_c g_m + h_{FE}(1-\alpha_I)}g_m v_{ce} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.43}$$

であるから、h パラメーターは

$$\left.\begin{aligned} h_{ie} &= \frac{h_{FE}/g_m}{1+(1-\alpha_I)h_{FE}/g_m r_c}, & h_{re} &= \frac{(1-\alpha_I)h_{FE}/g_m r_c}{1+(1-\alpha_I)h_{FE}/g_m r_c} \\ h_{fe} &= \frac{h_{FE}(1-1/r_c g_m)}{1+(1-\alpha_I)h_{FE}/g_m r_c}, & h_{oe} &= \frac{\{1+(1-\alpha_I)h_{FE}\}/r_c}{1+(1-\alpha_I)h_{FE}/g_m r_c} \end{aligned}\right\} \tag{3.2.44}$$

で与えられるが、$g_m r_c >> (1-\alpha_I)h_{FE} >> 1$より

$$
\left.
\begin{aligned}
h_{ie} &= \frac{h_{FE}}{g_m} = \frac{h_{FE}}{\alpha_N} h_{ib}, \qquad h_{re} = \frac{(1-\alpha_I)h_{FE}}{g_m r_c} = \frac{(1-\alpha_I)h_{FE}}{\alpha_I \alpha_N} h_{rb} \\
h_{fe} &= h_{FE} = \frac{|h_{fb}|}{1-|h_{fb}|}, \qquad h_{oe} = \frac{(1-\alpha_I)h_{FE}}{1-\alpha_I \alpha_N} h_{ob} \cong h_{FE} h_{ob}
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.2.45}
$$

と近似され、$(h_{ie}, h_{re}, h_{fe}, h_{oe})$は$(h_{ib}, h_{rb}, h_{fb}, h_{ob})$のほぼ$h_{fe}$倍になることが分かる。このようにして得られた、エミッター接地におけるハイブリッドπ型等価回路を図 3-20 に示す。図 3-21 は$r_{bb'}$を考慮したときの等価回路である。なお、通常は

$$
r_{bb'} << h_{ie} = h_{FE} r_e / \alpha_N \ (\equiv r_b)
$$

であるので、特別な場合を除いて$r_{bb'}$は無視してもよい。

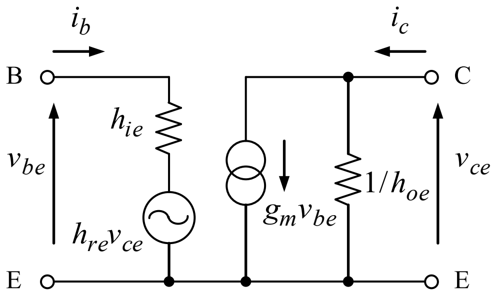


図 3-20　ハイブリッドπ型等価回路

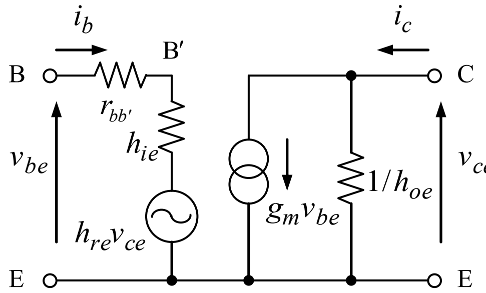


図 3-21　$r_{bb'}$を考慮した等価回路

3-2-7 電流増幅率α及びh_{fe}の周波数特性

周波数特性を議論するためには、直流等価回路では無視したエミッター・ベース間接合容量C_{be}、及びベース・コレクター間接合容量C_{cb}を考慮しなければならない。ここでC_{be}は 3-1-3 節で述べた、順方向にバイアスされたエミッター・ベース間ダイオード接合における蓄積容量であり、逆方向バイアスされたベース・コレクター接合の障壁容量C_{cb}に比べてはるかに大きい。そこでα及びh_{fe}を考える場合には出力短絡条件（$v_{cb}=0$ 又は $v_{ce}=0$）で考えるので、小さなC_{cb}は無視することにする。前節の (3.2.39) 式において$r_{bb'}$を考慮すると

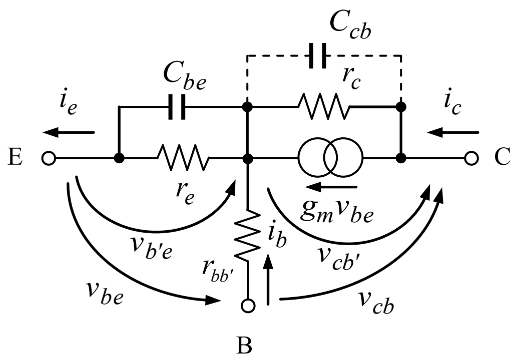


図 3-22　T 型等価回路

$$
\left.
\begin{aligned}
i_c &= g_m v_{b'e} + \frac{v_{cb'}}{r_c}, \qquad i_e = \frac{v_{b'e}}{r_e} + \frac{\alpha_I}{r_c} v_{cb'}, \qquad i_b = i_e - i_c \\
v_{be} &= v_{b'e} + r_{bb'} i_b, \qquad v_{cb} = v_{cb'} - r_{bb'} i_b
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.2.39’}
$$

となる。ここでC_{be}を考慮すると i_e は

$$i_e = (\frac{1}{r_e} + j\omega C_{be})v_{b'e} + \frac{\alpha_I}{r_c}v_{cb'} \tag{3.2.46}$$

としなければならない。これを用いると$r_e = \alpha_0 / g_m$と置いて

$$i_c = \frac{\{\alpha_0 + (1-\alpha_I\alpha_0)r_{bb'}/r_c + j\omega C_{be}r_e r_{bb'}/r_c\}i_e + (1-\alpha_I\alpha_0 + j\omega C_{be}r_e)v_{cb}/r_c}{1+(1-\alpha_I\alpha_0)r_{bb'}/r_c + j\omega C_{be}r_e(1+r_{bb'}/r_c)}$$

となるが、$r_{bb'}/r_c << 1$より

$$i_c = \frac{\alpha_0}{1+j\omega C_{be}r_e}i_e + \frac{1-\alpha_I\alpha_0 + j\omega C_{be}r_e}{1+j\omega C_{be}r_e}\frac{v_{cb}}{r_c} \tag{3.2.47}$$

と近似できる。これよりi_eに対するi_cの電流増幅率αは

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1+j\omega C_{be}r_e} \tag{3.2.48}$$

となる。(3.2.47)式で分かるように$r_{bb'}$はαの遮断周波数には影響しない。ここでα_0は直流小信号電流増幅率、理想トランジスターでは$\alpha_0 = \alpha_N$である。すなわちベース接地電流増幅率

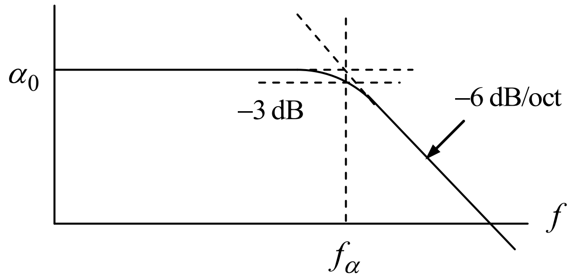


図 3-23　αの周波数特性

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1+j(f/f_\alpha)} \tag{3.2.49}$$

の遮断周波数f_αは

$$f_\alpha = \frac{1}{2\pi C_{be}r_e} = \frac{g_m}{2\pi\alpha_0 C_{be}} \tag{3.2.50}$$

で与えられる（注参照）。これよりh_{fe}は

$$h_{fe} = \alpha/(1-\alpha)$$

$$= \frac{h_{fe}(0)}{1+j(f/f_\beta)} \tag{3.2.51}$$

となる。ここで

$$h_{fe}(0) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_0} \tag{3.2.52}$$

である。h_{fe}の遮断周波数は

$$f_\beta = (1-\alpha_0)f_\alpha = \frac{1}{2\pi C_{be}r_b} \tag{3.2.53}$$

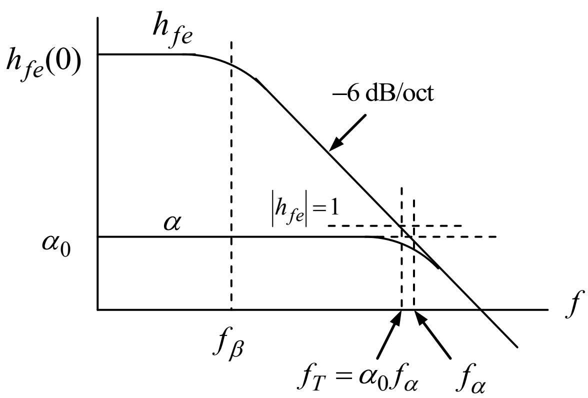


図 3-24　αとh_{fe}の周波数特性

で与えられ、f_βはf_αの$1/h_{fe}(0)$となる（$f_\beta \cong f_\alpha / h_{fe}(0)$）ことが分かる。遷移周波数$f_T$（transition frequency）は $\left|h_{fe}\right| = 1$ となる周波数で定義される。したがって

$$\frac{h_{fe}(0)}{\left|1 + j(f_T / f_\beta)\right|} = 1 \tag{3.2.54}$$

より、$f_T >> f_\beta$として

$$f_T = h_{fe}(0) f_\beta = \alpha_0 f_\alpha \qquad (\because h_{fe}(0) >> 1) \tag{3.2.55}$$

となる。

注： 実際にはキャリアのドリフト時間による時間遅れのためαの位相は(3.2.49)式の位相遅れより大きい。

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + j(f / f_\alpha)} \exp(j \frac{k-1}{k} \frac{f}{f_\alpha})$$

$$k \cong \begin{cases} 0.5 - 0.7 & \text{拡散接合} \\ 0.8 & \text{合金接合} \end{cases}$$

ハイブリッドπ型等価回路を用いても同じ結果を得る。まず、ハイブリッドπ型等価回路における入力側の等価回路を決めるためにC_{be}を考慮してv_{be}を求めると

$$r_b = h_{ie} = h_{fe}(0) r_e / \alpha_0 \tag{3.2.56}$$

と置いて

$$v_{be} = \frac{r_b}{1 + j\omega C_{be} r_b} i_b + \frac{(1 - \alpha_I) r_b / r_c}{1 + j\omega C_{be} r_b} v_{ce} \tag{3.2.57}$$

となり、図 3-22 の T 型等価回路に対応するハイブリッドπ型等価回路は図 3-25 のように描ける（注参照）。これを$i_c = g_m v_{be}$に代入し、$v_{ce} = 0$と置くことで

$$h_{fe} = \left(\frac{i_c}{i_b}\right)_{v_{ce}=0} = \frac{\alpha_0 h_{fe}(0)}{1 + j\omega C_{be} r_b} \tag{3.2.58}$$

を得る。これよりh_{fe}の遮断周波数f_βは

$$f_\beta = \frac{1}{2\pi C_{be} r_b} \tag{3.2.59}$$

となることが分かる。

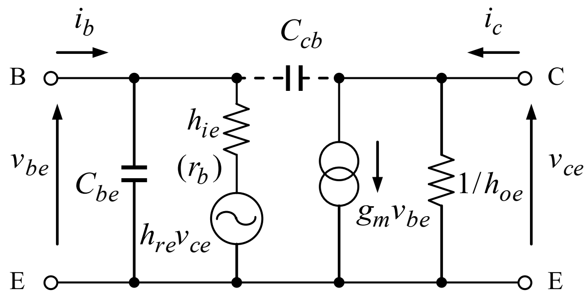


図 3-25　C_{be}を考慮したπ型等価回路

したがって、$\left|h_{fe}\right|_{f=f_T} = 1$より

$$f_T = \frac{\alpha_0 h_{fe}(0)}{2\pi C_{be} r_b} = \frac{\alpha_0}{2\pi C_{be} r_e} = \alpha_0 f_\alpha \tag{3.2.60}$$

を得る。ここで、(3.2.60) 式のC_{be}は (3.2.48) 式のC_{be}と同じものである。すなわち、図 3-22 から図 3-25 への変換において、r_e は $r_b = h_{fe}(0)r_e/\alpha_0$ に変わっているが、C_{be} は変わらないことに注意。また$r_e = \alpha_0/g_m$はコレクターバイアス電流I_Cの増加とともに$1/I_C$に比例して減少することに注意する必要がある。

以上で分かるように、f_Tはコレクターバイアス電流I_CとC_{be}のみで決定される、すなわちf_TはC_{be}の別表現と考えて良い。例えば、$C_{be} \approx 50\,\mathrm{pF}$とすると、$I_C = 1\,\mathrm{mA}$では$f_T \approx 120\,\mathrm{MHz}$となる。なお一般には$C_{cb} << C_{be}$であるが、$C_{cb}$が無視できないときは

$$f_T = \frac{\alpha_0 h_{fe}(0)}{2\pi(C_{be}+C_{cb})r_b} = \frac{g_m}{2\pi(C_{be}+C_{cb})} \tag{3.2.61}$$

となる。ハイブリッドπ型等価回路においてC_{cb}を考慮すると図 3-25 中の破線に示すようになり、C_{cb}によって出力電圧が入力に帰還されるので、高周波で影響が大きい。

なお、信号源のインピーダンスが低い場合には、$v_{b'e}$がカットオフ周波数$1/(2\pi C_{be} r_{bb'})$を持つことになるので、これより高い周波数においては$r_{bb'}$の影響を考慮しなければならない。また、f_Tは図 3-26 に示すように、コレクターバイアス電流I_Cの増加とともにr_eが小さくなるため$I_C^{1/2} \sim I_C^{2/3}$に比例して上昇するが、ある程度大きなI_Cで飽和する。そのため高周波増幅回路では大きめのコレクターバイアス電流I_Cを流して、f_Tを高い周波数へ伸ばしている。一方低雑音増幅回路では、ベースバイアス電流のショット雑音による電流性雑音を低減するために、$I_C < 100\,\mu\mathrm{A}$程度の小さなコレクターバイアス電流で動作させることが多い。そのためf_Tが下がるので、フィードバック増幅回路ではループの安定性の設計に注意が必要になることがある。なお、図 3-26 では$I_C = 1mA$では$f_T \cong 110\ MHz$より$C_{be} = g_m/2\pi f_T \cong 56pF$となる。

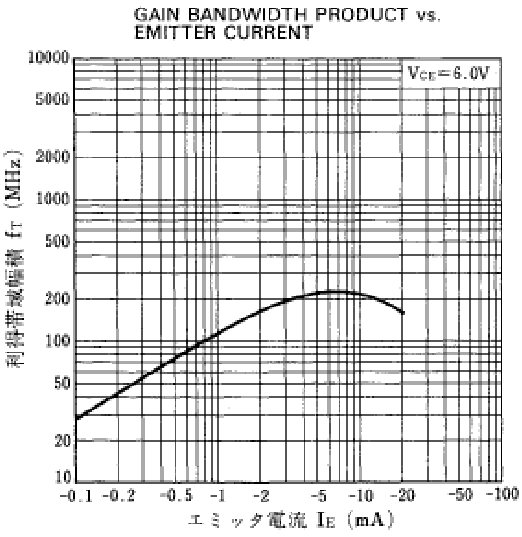


図 3-26　遷移周波数f_Tのバイアス電流依存性（2SC1845）（NEC 半導体デバイスカタログより）

注：コレクター・ベース間接合は逆バイアスされているので、接合容量C_{cb}は通常の静電容量であるが、エミッター・ベース間接合は順方向にバイアスされているため、C_{be} は通常の静電容量ではない。順方向にバイアスされた接合容量は拡散容量と呼ばれる。ベース内のキャリアの拡散速度は遅いので、ベース・エミッター間電圧 v_{be} の変化に対して拡散電流の応答は時間遅れを生ずる。これを実効的な静電容量で近似したものが C_{be} である。

3-3 電界効果トランジスター（Field Effect Transistor, FET）

本節では接合型 FET を考える。図 3-27 に示すように、接合型 FET は n(p)型半導体から成るチャンネルを、横方向から p(n)型半導体から成るゲート層で挟んだ構造をしており、ゲート(G)とチャンネル間に逆バイアスをかけて使用される。チャンネルの両端をそれぞれドレイン(D)、ソース(S)と呼び、ドレイン・ソース間に電圧をかけ、チャンネルを流れる電流をゲート電圧で制御する。チャンネルの型により、それぞれ n チャンネル FET、p チャンネル FET と呼ぶ。

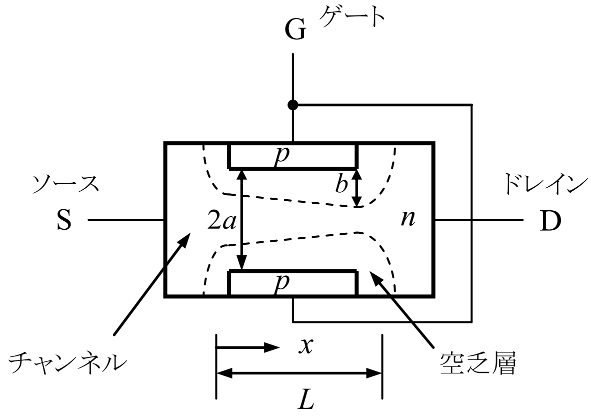


図 3-27　接合型 FET の構造

２つのゲートで挟まれたチャンネルの幅を$2a$とする。ゲートとチャンネル間は逆バイアスされているので、接合部にはキャリアーのない空乏層ができ、ゲート電位に対してチャンネル電位が高くなるほど空乏層の幅wは広がり、ついには$w=a$に達してチャンネルが空乏層で閉じられてしまう。これをピンチオフと云う。n チャンネル FET ではソースに対してドレイン電位を高くして使用される。したがってゲート・チャンネル間の逆バイアスはドレインに近い方が大きくなるので、図 3-27 に示すようにドレイン側の空乏層の広がりが大きく、ドレイン側でピンチオフが起きる。増幅作用を行う能動領域はピンチオフ状態で動作する。$N_d << N_a$として、ソースを基準にしたゲート電圧をV_{GS}、x におけるチャンネル電圧を$V(x)$とすると、空乏層の幅 $b(x)$は

$$b(x)=\sqrt{\frac{2\varepsilon}{qN_d}\left(V_0-V_{GS}+V(x)\right)} \tag{3.3.1}$$

で与えられる。εはチャンネルの誘電率、N_dはチャンネルの不純物（ドナー）濃度（m^{-3}）、V_0は接合のポテンシャル障壁電圧である。Lを実効的なゲートの長さとして$V(L)$はドレイン電圧V_{DS}に等しいものとすると、ゲート電圧V_{GS}が与えられているときのピンチオフが起きるドレイン電圧は

$$V_{DSP}=\frac{qN_d a^2}{2\varepsilon}-V_0+V_{GS} \tag{3.3.2}$$

となる。また、V_{DS}が与えられているときのピンチオフが起きるゲート電圧は

$$V_{GSP}=V_0+V_{DS}-\frac{qN_d a^2}{2\varepsilon}=V_{DS}-V_{DSP}^{(0)} \tag{3.3.3}$$

となる。ここで

$$V_{DSP}^{(0)} = \frac{qN_d a^2}{2\varepsilon} - V_0 \tag{3.3.4}$$

は$V_{GS}=0$のときのピンチオフ電圧である。ドレイン電圧V_{DS}が$V_{DS} \le V_{DSP}$ではドレイン電流は

$$I_D = \frac{2Wa}{\rho L}[V_{DS} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{qN_d a^2}}\{(V_0 - V_{GS} + V_{DS})^{3/2} - (V_0 - V_{GS})^{3/2}\}] \tag{3.3.5}$$

で与えられ、この領域を飽和領域と呼ぶ。ここでρはチャンネルの抵抗率、Wはチャンネルの横幅（図 3-27 において紙面に垂直方向の幅）である。

ドレン電圧V_{DS}が十分小さくて、$V_{DS} << V_0 - V_{GS}$である場合には(3.3.5)式よりドレイン電流は

$$I_D = \frac{2Wa}{\rho L}\{1 - \sqrt{\frac{V_0 - V_{GS}}{V_0 + V_{DSP}^{(0)}}}\}V_{DS} \tag{3.3.6}$$

となる（図 3-28）。これは、

$$\begin{aligned} w &= 2a - 2b \\ &= 2a\{1 - \sqrt{(2\varepsilon/qN_d a^2)(V_0 - V_{GS})}\} \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

なる幅のチャンネル抵抗R_{DS}を流れる電流を表している。即ちドレイン・ソース間はゲート電圧で制御される電圧制御可変抵抗として働く。但し線形性の良い領域は$-100mV < V_{DS} < 100mV$程度と狭く、これ以上では非線形性が目立つようになる。

またゲート電圧が

$$V_{GS} = V_{GSP}^{(0)} = V_0 - \frac{qN_d a^2}{2\varepsilon} \tag{3.3.8}$$

に達すると、ドレイン電流はカットオフ（$I_D = 0$）する。$V_{GSP}^{(0)}$は$V_{DS}=0$のときのゲート・ピンチオフ電圧（負値）である。

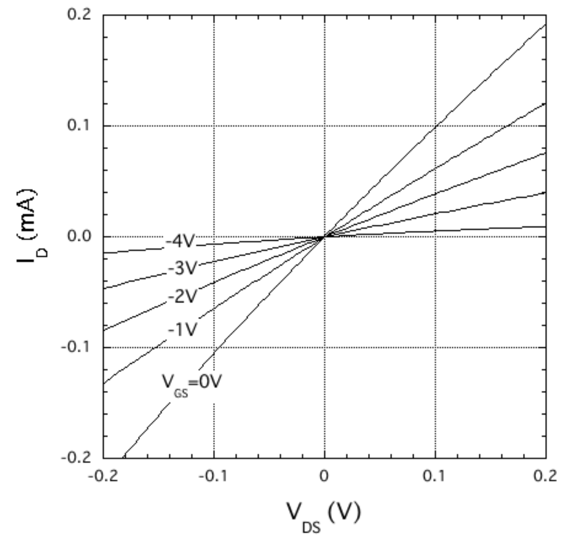


図 3-28　$|V_{DS}| << V_{DSP}$における$I_D - V_{DS}$特性（抵抗性）

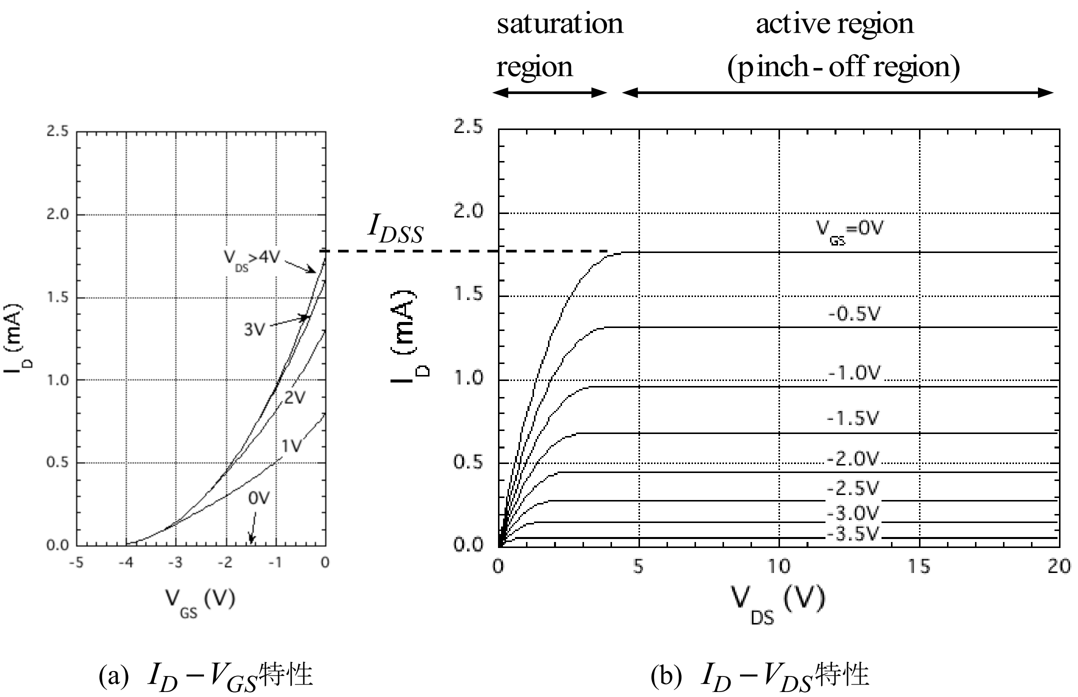
$V_{DS} > V_{DSP}$ではチャンネルがピンチオフされており、通常、増幅作用を行うのはこの領域であって、能動領域（active region）と呼ばれる。能動領域ではV_{DS}が上昇すると、接合の逆バイアス電圧$V_{DS} - V_{GS}$が上昇することにより、ピンチオフ領域の長さが増加するために、I_Dの増加が抑えられ、V_{DS}によってI_Dはほとんど変化しないので、$V_{DS} = V_{DSP}$を (3.3.5) 式に代入してI_Dを求めることができる。

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{2Wa}{\rho L}\{V_{DSP} - \frac{2}{3}\frac{qN_d a^2}{2\varepsilon} + \frac{2}{3}(\frac{2\varepsilon}{qN_d a^2})^{1/2}(V_0 - V_{GS})^{3/2}\} \\ &\cong \frac{2Wa}{3\rho L}(V_0 + V_{DSP}^{(0)})\{1 - 3\frac{V_0 - V_{GS}}{V_0 + V_{DSP}^{(0)}} + 2\frac{(V_0 - V_{GS})^{3/2}}{(V_0 + V_{DSP}^{(0)})^{3/2}}\} \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

このように、能動領域ではI_Dはゲート電圧V_{GS}によって制御される定電流源と見なすことができる。実際には、ピンチオフ領域でもI_DはV_{DS}とともに徐々に増加し、ドレイン抵抗は$\Delta V_{DS}/\Delta I_D \sim 100\ k\Omega$程度が普通である。なお、能動領域ではチャンネルはピンチオフされており、ドレイン電流はピンチオフされた無限に狭い領域を流れるので、電流密度は無限大になっていることを注意しておく。

(3.3.5) 式及び (3.3.9) 式より求めた特性曲線を図 3-29 に示す。(a)はいくつかのV_{DS}におけるI_DのV_{GS}依存性、(b)は種々のV_{GS}に対する$I_D - V_{DS}$特性である。V_{DS}が 4 V以下ではV_{DS}とともにI_Dは増加するが、V_{DS}が 4 V以上ではそれ以上I_Dは増加しなくなり、I_DはV_{GS}のみによって決定される。これがピンチオフ領域、すなわち能動領域である。ピンチオフ領域における$V_{GS}=0$時のI_Dを飽和ドレイン電流I_{DSS}と云う。

$$I_{DSS} \approx \frac{2Wa}{3\rho L}\frac{qN_d a^2}{2\varepsilon} \qquad (qN_d a^2/2\varepsilon >> V_0) \tag{3.3.10}$$



(a) $I_D - V_{GS}$特性　　(b) $I_D - V_{DS}$特性

図 3-29　FET の特性例（$V_0 = 0.2V$,　$qN_d a^2/2\varepsilon = 4.6V$,　$2aW/\rho L = 1.3mS$）

また、$|V_{DS}|$がピンチオフ電圧より十分小さいときの$I_D - V_{DS}$特性は抵抗性となり、V_{GS}で可変の電圧制御可変抵抗として、増幅器のゲイン可変用抵抗や発振回路の振幅安定用抵抗等としてよく利用される。但し、振幅が大きいと線形性が悪くなるので、概略100 mV程度以下の振幅で使用されるため、使用に当たっては S/N に十分注意を払うことが必要である。

FET の相互コンダクタンスは (3.3.9) 式より

$$g_m = \frac{\partial I_D}{\partial V_{GS}} = \frac{2Wa}{\rho L}\{1-\sqrt{\frac{V_0 - V_{GS}}{V_a}}\}$$

$$\cong g_{m0}\{1-\sqrt{\frac{V_0 - V_{GS}}{V_a}}\} \tag{3.3.11}$$

となる。ここで

$$V_a = \frac{qN_d a^2}{2\varepsilon}, \qquad g_{m0} = 3\frac{I_{DSS}}{V_a} \tag{3.3.12}$$

である。g_mは$\sqrt{|V_{GS}|}$に依存し、ゲートバイアス$|V_{GS}|$が浅いほど大きくなる。

例：図 3-29 で仮定した FET はどのような FET かを考察してみる。Si 中の誘電率及び電子移動度を

$$\varepsilon/\varepsilon_0 = 11.8\ \text{(Si)}, \quad \mu_e = 1.5\times 10^3\ cm^2/V\cdot sec\ \text{(electron mobility in Si)}$$

と仮定する。図 3-29 では $V_a = qN_d a^2/2\varepsilon = 4.6\,V$ を仮定した。

ここでチャンネルの幅を$2a = 4.5\mu m$とすると

$$N_d = 2\varepsilon V_a/qa^2 = 1.19\times 10^{21}\ m^{-3}$$

$$\rho = 1/(qN_d\mu_e) = 0.0350\ \Omega\cdot m$$

更に$L = 0.2mm,\quad W = 2mm\quad (W/L = 10)$にすると

$$2aW/\rho L = 4\varepsilon\mu_e V_a W/aL = 1.28mS$$

$$I_{DSS} \sim (2aW/3\rho L)V_a = 1.96mA$$

$$g_{m0} \approx 5.9mS$$

となり、実際の FET に近いパラメーターを得る。

接合型 FET の回路記号は図 3-30 のように書かれる。N チャンネル FET はゲートからチャンネルに向かう矢印、P チャンネル FET はチャンネルから外向きの矢印でゲート・チャンネル間の接合方向を示す。またゲート・チャンネル間の接合容量は図 3-31 に示すようにゲート・ソース間容量C_{iss}及びゲート・ドレイン間帰還容量C_{rss}の２種類の容量で表わされる。図に対応する等価回路モデルは図 3-32 のように表わされる。接合型 FET はゲートが逆バイアスされているためゲート漏れ電流は$10\sim 100pA$程度と非常に小さく、小信号ゲート入力抵抗r_gは$r_g \sim 10^{12}\Omega$程度と極めて大きいため入力インピーダンスは容量性となる。

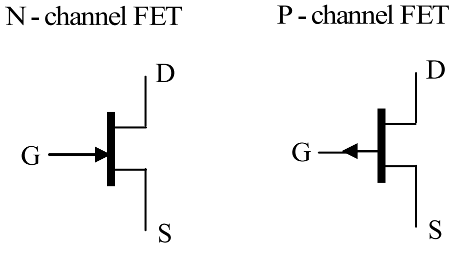


図 3-30　接合型 FET の回路記号

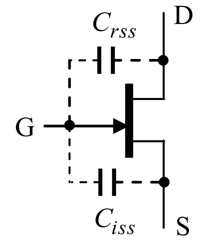


図 3-31　FET の接合容量

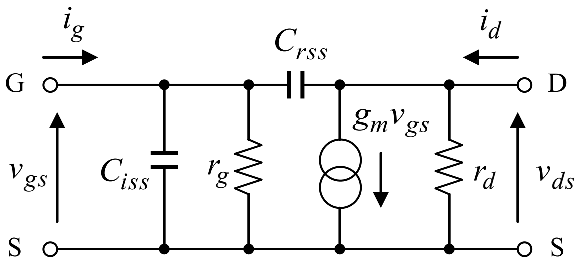


図 3-32　FET の等価回路

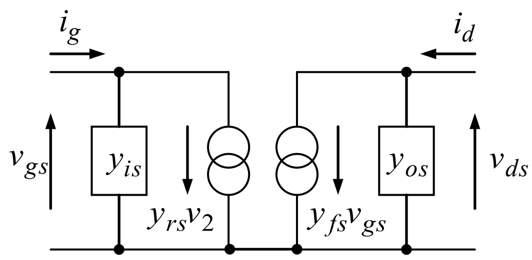


図 3-33　y パラメータ表示

FET の等価回路は図 3-32 で表わされ

$$\left.\begin{aligned} i_g &= \{1/r_g + j\omega(C_{iss} + C_{rss})\}v_{gs} - j\omega C_{rss}v_{ds} \\ i_d &= \{1/r_g + j\omega(C_{iss} - C_{rss})\}v_{gs} + (r_d + j\omega C_{rss})v_{ds} \end{aligned}\right\}$$

が成立する。これより図 3-33 に示すアドミッタンス四端子行列表示

$$\begin{pmatrix} i_g \\ i_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{is} & y_{rs} \\ y_{fs} & y_{os} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{gs} \\ v_{ds} \end{pmatrix}$$

における y パラメータは

$$\left.\begin{aligned} & y_{is} = 1/r_g + j\omega(C_{iss} + C_{rss}), \quad y_{rs} = -j\omega C_{rss} \\ & y_{fs} = g_m - j\omega C_{rss}, \qquad y_{os} = 1/r_d + j\omega C_{rss} \end{aligned}\right\}$$

となる。通常の小信号用 FET ではゲート漏れ電流 I_G が小さいため、入力電流性雑音は $\sim 0.01\,pA/\sqrt{Hz}$程度と非常に小さくほとんどの場合無視できる。

４章　増幅器

4-1 理想増幅器

増幅器を表す記号は図 4-1 のように記され、増幅度 A が信号振幅及び周波数によらず一定、入力インピーダンスが無限大、出力インピーダンスが 0 である増幅器を、理想増幅器と定義する。出力の極性が入力と逆極性になるものを反転増幅器、同極性のものを非反転増幅器と云う。また、図 4-1(b)において出力と逆極性と云う意味で負符号を付した入力端子を反転入力、正符号を付した出力と同極性の入力を非反転入力と云う。実際の増幅器は理想増幅器とはほど遠く、使用する条件のもとでいかに理想増幅器に近づけるかが回路設計の命題である。理想増幅器に近づける重要な技術がフィードバック（feedback）である。

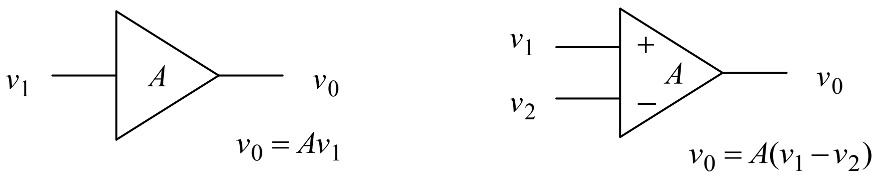


図 4-1　増幅器の記号

4-2 帰還増幅器（feedback amplifier）

図 4-2 に示すように、増幅器の出力yの一部βy ($|\beta|<1$)を入力xに重畳することを帰還（フィードバック）と云う。βは帰還率と云い、$\beta>0$すなわち入力信号と逆極性で重畳する場合を負帰還（negative feedback)、同極性$\beta<0$の場合を正帰還（positive feedback）と云う。これを式で表わせば

$$y=A(x-\beta y) \qquad (4.2.1)$$

となり、これをyについて解くことで出力yが

$$y=\frac{A}{1+\beta A}x \qquad (4.2.2)$$

と求まる。ここで

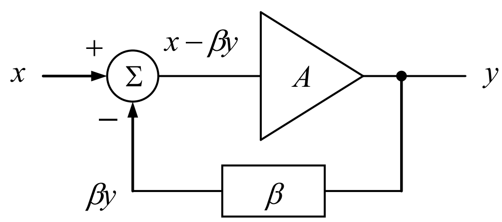


図 4-2　フィードバックループ

A　　：開ループ利得（open loop gain）

$$K=\frac{A}{1+\beta A} \quad ：閉ループ利得（closed loop gain） \qquad (4.2.3)$$

と呼ぶ。また、βAは入力へ戻される出力の大きさであり、これを帰還量と呼ぶ。

(a) $|\beta A| >> 1$では

$$K = 1/\beta \tag{4.2.4}$$

となり、出力$y = \beta^{-1}x$は増幅器自身の利得と無関係に帰還率のみで決まることになる。すなわち、系の出力はAに非線形等があってもほとんど影響されないことになる。

(b) $\beta A = -1$では

$$K = \infty \tag{4.2.5}$$

となり、入力がなくても（$x = 0$）有限な出力yがあることになり、系が自己発振していることを意味する。一般に$\beta A < -1$では系は不安定（発振状態）である。フィードバックループの安定性（発振）については後で述べる。

4-2-1 フィードバックループの安定性

一般にA, β, Kは複素数であって（角）周波数ωの関数であるが、ここではとりあえずβは定数であると仮定する。この場合Aがn次系ならばKもn次系である。(注:nは伝達関数の分母の次数)

(a) $A(\omega)$ が１次系のとき

開ループ利得を

$$A(\omega) = \frac{A_0}{1 + j\omega/\omega_0} \tag{4.2.6}$$

とすると、閉ループ利得は

$$K(\omega) = \frac{K_0}{1 + j\omega/\{(1+\beta A_0)\omega_0\}} \tag{4.2.7}$$

となる。ここで

$$K_0 = \frac{A_0}{1 + \beta A_0} \tag{4.2.8}$$

である。$|A|$及び$|K|$を図示すると図 4-3 となる。この場合、閉ループ系は安定で利得A_0は$1/(1+\beta A_0)$倍になり、帯域幅ω_0は$(1+\beta A_0)$倍になる。

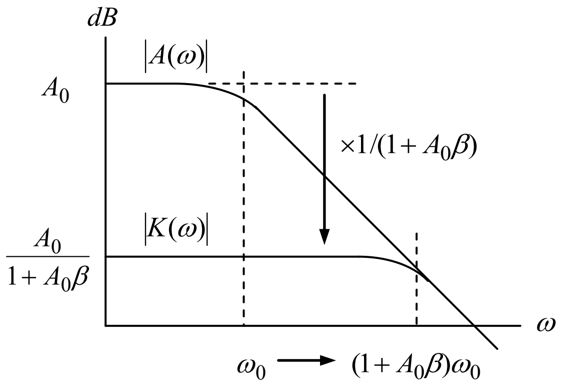


図 4-3　１次系におけるフィードバック（負帰還）の効果

(b) $A(\omega)$が２次系のとき。ω_0をカットオフ周波数（共振周波数)、ζ（$=1/2Q$）をダンピング定数として、開ループ利得$A(\omega)$及び閉ループ利得$K(\omega)$は次式で与えられる。

$$A(\omega) = \frac{A_0}{1 + 2j\zeta\omega/\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} \tag{4.2.9}$$

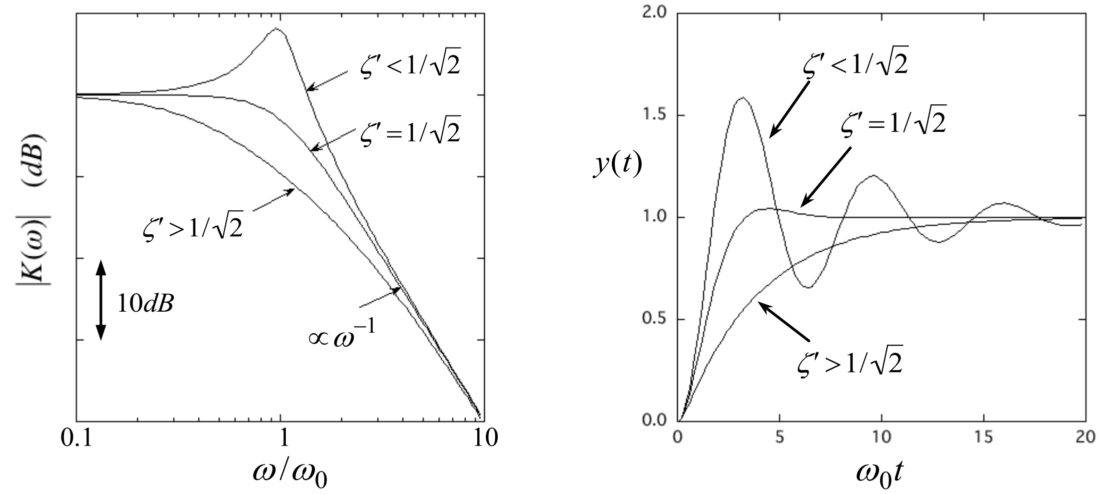
$$K(\omega) = \frac{K_0}{1 + 2j\zeta'\omega/\omega'_0 - \omega^2/\omega'^2_0} \tag{4.2.10}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} \zeta' &= \frac{\zeta}{\sqrt{1+\beta A_0}} \\ \omega'_0 &= \sqrt{1+\beta A_0} \cdot \omega_0 \end{aligned}\right\} \tag{4.2.11}$$

は閉ループ利得のダンピング定数及びカットオフ周波数であり、K_0は(4.2.8)式で与えられる。これを図示すると図 4-4 のようになる。(a)のような周波数特性を持つ系に、$t=0$で立ち上がるステップ状の電圧が入力されたときの出力の時間応答は(b)のようになる。すなわち、ダンピング定数が$\zeta' < 1/\sqrt{2}$である場合には周波数特性にピークを生じ、時間応答（過度応答）には減衰振動が残る。線形システムでは、このような振動を生じないような回路設計を行うことが重要である。

２次系では出力に現れる振動は減衰振動であるので、原則的には安定であるが、本書では出力が振動するときを、狭義の意味で「不安定」と云うことにする。すなわち、系が安定であるためには$\zeta' > 1/\sqrt{2}$でなければならない。もとの開ループ利得が$\zeta > 1/\sqrt{2}$であっても、βA_0が大きくなると$\zeta' < 1/\sqrt{2}$になって不安定になってしまう。



(a) 周波数特性　　　　(b) 時間応答

図 4-4　２次系の応答

非振動限界は次のように求めることができる。$\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$なる$\omega_1$、$\omega_2$により$A(\omega)$の分母が次式のように因数分解できる場合を考察してみよう。

$$A(\omega) = \frac{A_0}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_2)} \tag{4.2.12}$$

ここで

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \qquad (4.2.13)$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} + \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}\right) \qquad (4.2.14)$$

である。ω_2/ω_1をスタガー比と云う。ブロック図で表すと図 4-5(b)のように、$A(\omega)$は二つの１次の周波数特性関数の従属接続であることを意味している。１次の特性関数は RC 積分回路と等価であり、図 4-5(b)は図 4-5(c)のように、カットオフ周波数がそれぞれω_1、ω_2である RC 積分回路の間に利得A_0の理想増幅器を挿入したものと等価である。(4.2.14)式より$\zeta \geq 1$であるので$A(\omega)$は安定である。

また閉ループ利得$K(\omega)$が安定であるためには

$$\zeta' = \frac{1}{2\sqrt{1+A_0\beta}}\left(\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} + \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (4.2.15)$$

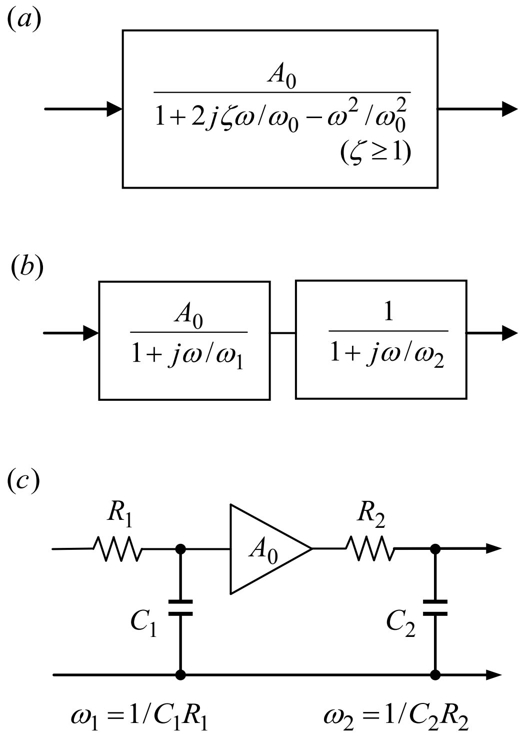


図 4-5　２次系

でなければならず、したがって

$$\beta A_0 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \qquad (4.2.16)$$

でなければならない（図 4-6)。帰還量$A_0\beta$を十分大きくするためには$\omega_2/\omega_1 >> 1$でなければならず、その場合の安定なフィードバック限界（非振動条件）は

$$\beta A_0 \leq \omega_2/2\omega_1 \qquad (4.2.17)$$

となる。

例として、図 4-7 に開ループ利得$A_0 = 60\ \mathrm{dB}$、スタガー比$\omega_2/\omega_1 = 100$の場合の、閉ループ利得の周波数特性$|K(\omega)|$を示す。

$\beta A_0 = 50\ (34\ \mathrm{dB})$で$\zeta' = 1/\sqrt{2}$となり、$\beta A_0 > 34\ \mathrm{dB}$では高域端にピークを生ずることが分かる。$\zeta' = 1/\sqrt{2}\ (Q = 1/\sqrt{2})$の場合を臨界制動（critical damping）と云い、振動と非振動の境界であって、図 4-4(b)に示すようにステップ入力の立ち上がりが僅かに行き過ぎるが、振動することなく定常値に収束する。なお、数学的には$\zeta' = 1\ (Q = 1/2)$を臨界制動と云

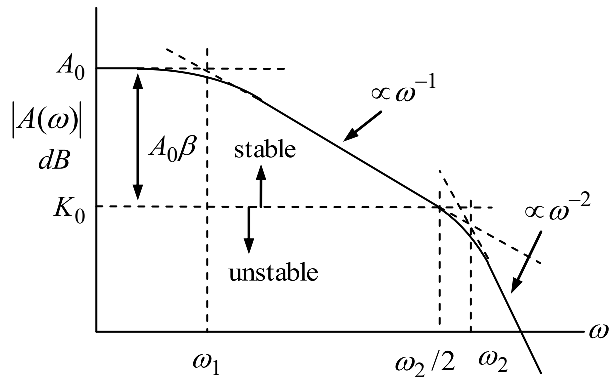


図 4-6　２次系（$\omega_2/\omega_1 >> 1$）の周波数特性

うが、自動制御や電子回路においては、出力が振動することなく立ち上がり時間が最も速くなる条件として$\zeta' = 1/\sqrt{2}$を臨界制動と云うことが多い。周波数特性におけるピークは減衰振動に対応しており、閉ループ出力にはピークに対応する周波数の減衰振動が残る。また、$\zeta' = 1/\sqrt{2}$のときの-3 dB高域遮断周波数は$f_2/2$である。すなわち、平坦な周波数応答を条件にすると、閉ループの周波数帯域は$f_2/2$以上に伸ばすことはできない。

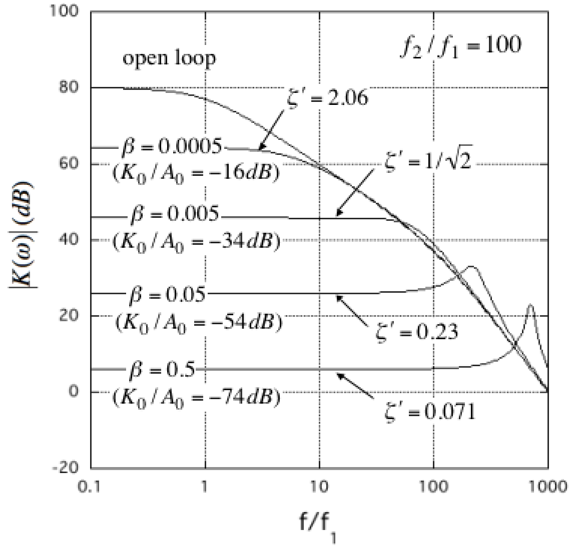


図 4-7　閉ループ利得の周波数特性

また、$\omega_2 = \omega_1$の場合の安定限界はすな

$$\beta A_0 \le 1 \qquad (4.2.18)$$

わち帰還量が１以下に制限されるため、フィードバックはほとんど意味を成さなくなる。一般に開ループ利得が２次以上の系では、カットオフ周波数を低い方から順に$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$として、安定なフィードバック限界は$\beta A_0 \le \omega_2/2\omega_1$で制限され、帰還量を大きくするためには$\omega_1 << \omega_2, \cdots, \omega_n$とすることが必要である。

4-2-2 ラプラス変換

ラプラス変換に基づいてフィードバック系の安定性及び過度応答を議論する。1-2 節及び 1-3 節で述べたように、線形応答系の周波数応答は系の応答を記述する線形微分方程式をフーリエ変換することで求めることができる。入力$x(t)$及び出力$y(t)$のフーリエ振幅をそれぞれ$X(j\omega)$、$Y(j\omega)$として、$G(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega)$を周波数伝達関数または周波数特性関数と云い、$G(j\omega)$によって系の応答が表される。フーリエ変換で議論される周波数伝達関数では、一般に$-\infty < t < \infty$に渡って定常的な信号のみを考えるので、$G(j\omega)$によって過渡現象を議論することはできない。そこで、過渡現象を議論するためには、フーリエ変換を拡張したラプラス変換が適用される。

ラプラス変換はフーリエ変換における$j\omega$を一般の複素数s（ラプラス変数）に拡張したものである。$t \ge 0$で定義されている関数$f(t)$（$t < 0$では$f(t) = 0$とする）のラプラス変換は

$$F(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (4.2.19)$$

で定義される。$F(j\omega)$は$f(t)$のフーリエ振幅である。$F(s)$のラプラス逆変換

$$f(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(s)e^{st}ds \tag{4.2.20}$$

で与えられる。ラプラス変換及び逆変換の存在条件は、$t \geq 0$で$f(t)$が１価関数であって

$$\left|f(t)\right|e^{-\sigma_0 t} < \infty \tag{4.2.21}$$

なるσ_0が存在することであり、逆変換(4.2.20)式の積分路におけるCは$C > \sigma_0$であるものとする。以上のラプラス変換及び逆変換は表になっているので、いちいち積分計算をする必要はない。以下にいくつかの公式を列挙しておく。

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \tag{4.2.22}$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (u(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}) \tag{4.2.23}$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \tag{4.2.24}$$

$$\mathcal{L}[t^m e^{at}] = \frac{m!}{(s-a)^{m+1}} \tag{4.2.25}$$

$$\mathcal{L}[t^{-3/2}e^{-a^2/4t}] = \frac{2\sqrt{\pi}}{a}e^{-a\sqrt{s}} \tag{4.2.26}$$

$$\mathcal{L}[\frac{d^n f(t)}{dt^n}] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(+0) \qquad (f^{(k)}(t) = \frac{d^k f(t)}{dt^k}) \tag{4.2.27}$$

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(\tau)d\tau] = \frac{1}{s}F(s) \tag{4.2.28}$$

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s}F(s) \tag{4.2.29}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a) \tag{4.2.30}$$

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s) \tag{4.2.31}$$

$$\mathcal{L}[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau] = \mathcal{L}[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau] = F_1(s)F_2(s) \tag{4.2.32}$$

ここで $f(+0) = \lim_{t \to +0} f(t)$ である。ほとんどの問題は以上の公式を用いることで解くことができ

る。なお、(4.2.26)式は通常の電子回路や自動制御では見かけることはないが、導体表面の表皮効果を扱う際に現れる変換である（同軸伝送線の節参照)。

4-2-3 伝達関数

1-3 節で述べたように、n 次線形応答系の応答は次の線形微分方程式にて記述される。

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \tag{4.2.33}$$

ここで、$x(t)$は系への入力、$y(t)$は出力であり、因果律より

$$n \geq m \tag{4.2.34}$$

でなければならない。上の方程式において、過渡項を無視し$x(t)$、$y(t)$について一つの周波数成分についての定常解を求めるものが交流理論である。交流理論は上式においてd/dtを$j\omega$に置き換えて解を求めたものである。これは上式をフーリエ変換し、フーリエ成分を求めることに対応する。

(4.2.33)式をラプラス変換すると

$$\left.\begin{aligned} &Y(s) = G(s)X(s) + \sum_{k=0}^{n-1} H_k(s) y^{(k)}(+0) - \sum_{k=0}^{m-1} F_k(s) x^{(k)}(+0) \\ &G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \\ &H_k(s) = \frac{\sum_{r=0}^{n-k-1} a_{k+r+1} s^r}{\sum_{r=0}^{n} a_r s^r}, \qquad F_k(s) = \frac{\sum_{r=0}^{m-k-1} b_{k+r+1} s^r}{\sum_{r=0}^{m} b_r s^r} \end{aligned}\right\} \tag{4.2.35}$$

となるが、全ての初期値を

$$\left.\begin{aligned} x^{(k)}(+0) = 0 \quad (k = 0, \cdots, m) \\ y^{(k)}(+0) = 0 \quad (k = 0, \cdots, n) \end{aligned}\right\} \tag{4.2.36}$$

とすると

$$Y(s) = G(s)X(s) \tag{4.2.37}$$

となり、$G(s)$を n 次の伝達関数と呼ぶ（伝達関数は全ての初期値を 0 として定義されることに注意)。$G(s)$は 1-2-4 節で述べた周波数伝達関数 (1.2.58)式において、$j\omega$をsに置き換えたものに等しい。すなわち交流理論で得られる周波数伝達関数の$j\omega$をsと置き換えることで、伝達関数が求まる。この伝達関数を用いて系の過渡応答、安定性を求めることができる。

なお、以上では伝達関数の次数として有限な次数を前提としたが、伝達関数の次数を決められ

ない系として、時間遅れ系 $y(t) = f[x(t-\tau)]$ がある。前節の公式にあるように $x(t-\tau)$ のラプラス変換は存在するので、時間遅れ要素を含む系についても伝達関数が定義できる。この場合 $\mathcal{L}[x(t-\tau)] = e^{-\tau s}X(s)$ であるため、伝達関数の次数を定義することはできない。

4-2-4 過渡応答と周波数特性

まず伝達関数と周波数伝達関数の関係を確認しておく。単一周波数の正弦波入力

$$x(t) = x_0 e^{j\omega t} \tag{4.2.38}$$

の場合、$x(t)$ のラプラス変換は

$$X(s) = \frac{x_0}{2}\mathcal{L}[e^{j\omega t}] = \frac{x_0}{s - j\omega} \tag{4.2.39}$$

である。ここで簡単化のために伝達関数のポールは１次とすると、$G(s)$ は

$$G(s) = R_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{s - p_i} \tag{4.2.40}$$

と展開できる。ここで R_0 は定数

$$R_i = [(s - p_i)G(s)]_{s=p_i} \tag{4.2.41}$$

は i 番目のポール $s = p_i$ における留数である。したがって出力 $Y(s)$ は

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) \\ &= x_0\left(\frac{R_0}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{(s - p_i)(s - j\omega)}\right) \end{aligned} \tag{4.2.42}$$

となる。ここで

$$\frac{1}{(s - p_i)(s - j\omega)} = \frac{1}{p_i - j\omega}\left(\frac{1}{s - p_i} - \frac{1}{s - j\omega}\right) \tag{4.2.43}$$

を用いてラプラス逆変換を行うと、出力の時間応答は次のように求まる。

$$\begin{aligned} y(t) &= x_0\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{R_0}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{p_i - j\omega}\left(\frac{1}{s - p_i} - \frac{1}{s - j\omega}\right)\right] \\ &= x_0\left\{R_0 e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{p_i - j\omega}(e^{p_i t} - e^{j\omega t})\right\} \\ &= G(j\omega)x_0 e^{j\omega t} + x_0\sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{p_i - j\omega}e^{p_i t} \end{aligned} \tag{4.2.44}$$

$G(s)$ が安定な伝達関数ならば $\mathrm{Re}[p_i] < 0$ でなければならないことから、十分時間が経った（$t \to \infty$）定常状態では

$$y(t) = G(j\omega)x_0 e^{j\omega t} \tag{4.2.45}$$

となる。すなわち、$G(j\omega)$は定常状態における周波数特性（周波数伝達関数）を表している。これで$s \to j\omega$の置き換えで周波数伝達関数が得られることが証明できた。これはナイキスト線図の解釈において実際的な意味を持つ。

(a) 1次系

$G(s)$が１次系

$$G(s) = \frac{G_0}{s-a} \tag{4.2.46}$$

である場合の、インパルス応答及びステップ応答を考える。

<u>インパルス入力</u>

$$x(t) = x_0 \delta(t) \tag{4.2.47}$$

に対する応答は

$$X(s) = x_0 \mathcal{L}[\delta(t)] = x_0$$

より

$$Y(s) = G(s)x_0 \tag{4.2.48}$$

となる。一般にインパルス応答は伝達関数自身の応答となる。したがって

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]x_0 = G_0 x_0 e^{at} \tag{4.2.49}$$

となる。なおインパルス信号では、$\delta(t)$ の次元は $[t^{-1}]$ であるため、x_0の次元は $[x(t) \cdot t]$であることに注意する必要がある。

$a = \alpha + j\omega$の場合、$\alpha < 0$では$e^{at} = e^{\alpha t} e^{j\omega t} \to 0\ (t \to \infty)$より$y(t)$は安定であるが、$\alpha > 0$の場合は$y(t)$は周波数$\omega$で振動しながら発散する（不安定）。すなわち$\mathrm{Re}(a)$の正負により系の安定性が決まる。

$\mathrm{Re}(a) < 0$ ：安定

$\mathrm{Re}(a) = 0$ ：定常振動（不安定）

$\mathrm{Re}(a) > 0$ ：振動しながら発散（不安定）

<u>ステップ入力</u>

$$x(t) = x_0 u(t) \tag{4.2.50}$$

に対しては

$$X(s) = x_0 \mathcal{L}[u(t)] = \frac{x_0}{s}$$

より、出力は

$$Y(s) = G(s)\frac{x_0}{s} = \frac{G_0}{s(s-a)} x_0 \tag{4.2.51}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{G_0}{s(s-a)}]x_0 = -\frac{G_0}{a} x_0 \{\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}] - \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}]\}$$

$$= -\frac{G_0}{a} x_0 (1 - e^{at}) u(t) \tag{4.2.52}$$

となる。

(c)　２次系

　$G(s)$ が２次系の場合。

$$G(s) = \frac{G_0}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \tag{4.2.53}$$

$G(s)$の分母は特性方程式

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \tag{4.2.54}$$

の根

$$s_\pm = \left(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_0 \tag{4.2.55}$$

を用いて

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = (s - s_+)(s - s_-) \tag{4.2.56}$$

と因数分解できるので、次のように部分分数に分解できる。

$$G(s) = \frac{G_0}{(s-s_+)(s-s_-)} = \frac{G_0}{s_+ - s_-}(\frac{1}{s-s_+} - \frac{1}{s-s_-}) \tag{4.2.57}$$

<u>インパルス応答</u>

　$Y(s) = G(s)x_0$ は

$$y(t) = \frac{G_0}{s_+ - s_-}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-s_+} - \frac{1}{s-s_-}]x_0$$

$$= \frac{G_0}{s_+ - s_-}(e^{s_+ t} - e^{s_- t})x_0$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{G_0 x_0 e^{-\zeta\omega_0 t}}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 t) & (0 \le \zeta < 1) \\ G_0 x_0 t e^{-\omega_0 t} & (\zeta = 1) \\ \dfrac{G_0 x_0 e^{-\zeta\omega_0 t}}{\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}}\sinh(\sqrt{\zeta^2-1}\,\omega_0 t) & (1 < \zeta) \end{cases} \tag{4.2.58}
$$

となる。また $\zeta < 0$ では $e^{-\zeta\omega_0 t}$ により $t \to \infty$ で発散する（不安定)。

$-1 \le \zeta < 0$ ： 振動しながら発散

$\zeta \le -1$ ： 一方向に発散

なお

$\zeta \ge 0$ では $\mathrm{Re}[s_\pm] \le 0$ → 安定もしくは減衰振動

$\zeta < 0$ では $\mathrm{Re}[s_\pm] > 0$ → 発散（不安定）

であり、これは一般の n 次系においても成立する。

ステップ応答

ステップ入力

$$x(t) = x_0 u(t)$$

のラプラス変換は

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \frac{x_0}{s}$$

したがって出力のラプラス変換は

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)X(s) \\
&= \frac{G_0}{s_+ - s_-}\left(\frac{1}{s-s_+} - \frac{1}{s-s_-}\right)\frac{x_0}{s} \\
&= \frac{G_0 x_0}{s_+ - s_-}\left(\frac{1}{s_+}\frac{1}{s-s_+} - \frac{1}{s_-}\frac{1}{s-s_-} - \frac{s_+ + s_-}{s_+ s_-}\frac{1}{s}\right)
\end{aligned} \tag{4.2.59}
$$

となり、この逆変換即ち出力 $y(t)$ は

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{G_0 x_0}{s_+ - s_-}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s_+}\frac{1}{s-s_+} - \frac{1}{s_-}\frac{1}{s-s_-} + \frac{s_+ - s_-}{s_+ s_-}\frac{1}{s}\right] \\
&= \frac{G_0 x_0}{s_+ - s_-}\left\{\frac{1}{s_+}e^{s_+ t} - \frac{1}{s_-}e^{s_- t} + \frac{s_+ - s_-}{s_+ s_-}u(t)\right\}
\end{aligned}
$$

となる。ここで

$$s_\pm = (-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2})\omega_0$$

は特性方程式

$$s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2=0$$

の根である。従って出力 $y(t)$ は

$$y(t)=\begin{cases}\dfrac{G_0x_0}{\omega_0^2}[1-e^{-\zeta\omega_0 t}\{\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t)+\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t)\}] & (-1<\zeta<1)\\ \dfrac{G_0x_0}{\omega_0^2}(1-e^{\mp\omega_0 t}) & (\zeta=\pm1)\\ \dfrac{G_0x_0}{\omega_0^2}[1-e^{-\zeta\omega_0 t}\{\cosh(\sqrt{\zeta^2-1}\cdot\omega_0 t)+\dfrac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\sinh(\sqrt{\zeta^2-1}\cdot\omega_0 t)\}] & (|\zeta|>1)\end{cases}$$

(4.2.60)

となる。

4-2-5 伝達関数の安定条件（ナイキストの安定条件）

有限な入力 $x(t)$ に対して出力 $y(t)$ が有限であるための条件は、ナイキストの安定条件としてよく知られている。

$$Y(s)=G(s)X(s) \tag{4.2.61}$$

において、$G(s)$及び$X(s)$の極（ポール）をそれぞれ $p_i\ (i=1,2,\cdots,n)$、$q_j\ (j=1,2,\cdots,r)$とする。簡単化のため p_i、q_j が全て１次のポールであるとすると、$Y(s)$は

$$Y(s)=K_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-p_i}+\sum_{j=1}^{r}\frac{K'_j}{s-q_j} \tag{4.2.62}$$

と展開できる。これをラプラス逆変換すると

$$y(t)=K_0\delta(t)+\sum_{i=1}^{n}K_ie^{p_it}+\sum_{j=1}^{r}K'_je^{q_jt} \tag{4.2.63}$$

となる。したがって $t\to\infty$において、全ての p_i、q_j について

$\mathrm{Re}(p_i)>0, \mathrm{Re}(q_j)>0$ ならば $e^{p_it}\to\infty, e^{q_jt}\to\infty$：不安定

$\mathrm{Re}(p_i)<0, \mathrm{Re}(q_j)<0$ ならば $e^{p_it}\to 0, e^{q_jt}\to 0$：安定

$\mathrm{Re}(p_i)<0, \mathrm{Re}(q_j)=0$ ならば $e^{p_it}\to 0, e^{q_jt}\to e^{j\,\mathrm{Im}(q_j)t}$：定常振動（定常振動入力）

$\mathrm{Re}(p_i)=0$ ならば $e^{p_it}\to e^{j\,\mathrm{Im}(p_i)t}$：$G(s)$の極の周波数で定常振動（不安定）

となる。また p_i、q_j に m 次のポールが含まれる場合には

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s-a)^m}]=\frac{t^{m-1}e^{at}}{(m-1)!} \tag{4.2.64}$$

となるので同じ議論が成立する。

したがって、有限な入力（$\mathrm{Re}(q_j) \le 0\ (j = 0,1,\cdots,r)$）に対して出力 $y(t)$ が安定であるためには、$G(s)$ の全てのポール p_i の実数部が負（$\mathrm{Re}(p_i) < 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$）でなければならない。閉ループにおいて以上述べた安定条件が満たされているか否かを、図形的に判別する方法をナイキストの安定判別法と云う。特性方程式

$$1 + \beta A(s) = 0 \tag{4.2.65}$$

の根、すなわち閉ループ伝達関数

$$G(s) = \frac{A(s)}{1 + \beta A(s)} \tag{4.2.66}$$

のポールを $p_i\ (i = 1,2,\cdots,n)$ とする。ループが安定であるためには全てのポールの実数部が $\mathrm{Re}(p_i) < 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$ でなければならない。これを複素 s 平面に書くと図 4-8 のように $G(s)$ が安定であるためには、全てのポールは左半平面になければならないことになる。

そこで図 4-8(a) に示すように s 平面上に $s = -j\omega$ から出発して、虚軸上の軌跡 Γ_1 に沿って $s = +j\omega$ に至り、そこから右半平面の半径無限大の円弧 Γ_2 に沿って $s = -j\omega$ に至る軌跡 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ を考える。上の安定条件は「軌跡 Γ が囲む領域の中にポールがないこと」と言い換えることができる。これを複素 $\beta A(s)$ 平面（$\mathrm{Re}[\beta A(s)]$ を横軸、$\mathrm{Im}[\beta A(s)]$ を縦軸にとった複素平面）に等角写像すると、ポール p_i は特性方程式 $\beta A(s) = -1$ の根であるから、s 平面における全ての p_i は、$\beta A(s)$ 平面では点 $(-1, j0)$ に対応することになる。また $A(s)$ として n 次系を考え、$n > m$（m は $A(s)$ の分子の次数）とすると、Γ_2 上では $|s| = \infty$ のため $A(s)|_{\Gamma_2} = 0$ であり（$n = m$ の場合は有限な実数となる）、Γ_2 は $\beta A(s)$ 平面の原点に写像される。したがって s 平面で $s = -j\infty$ から $s = +j\omega$ に至る軌跡 Γ_1 は、$\beta A(s)$ 平面では図 4-8(b) に示すように原点から出発して原点に至る軌跡 Γ_1' に写像される。これをナイキスト線図と云う。

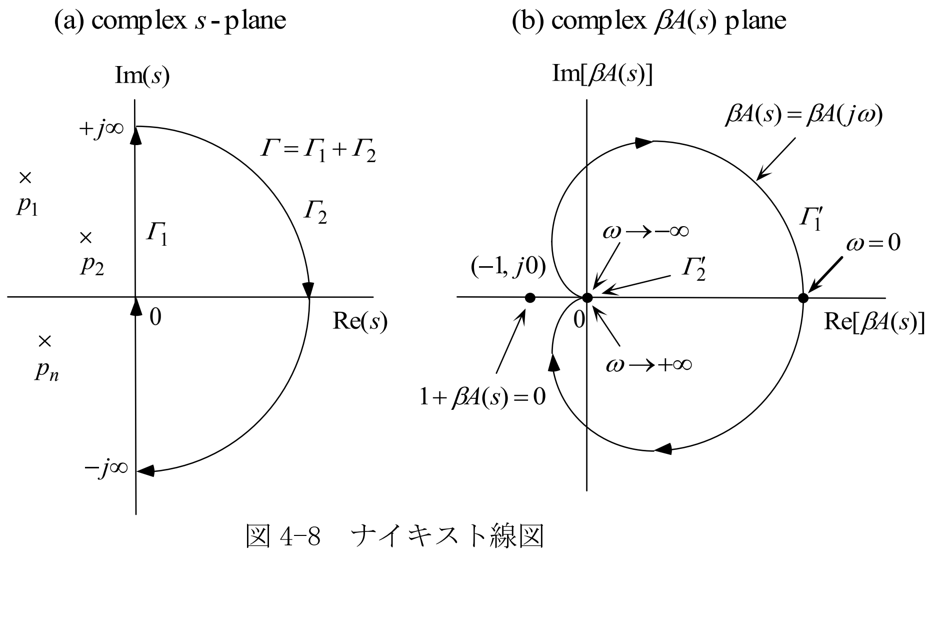


図 4-8　ナイキスト線図

Γ_1'上では$s = j\omega$なので、ナイキスト線図では周波数伝達関数$A(j\omega)$のみを考えればよく、開ループ周波数伝達関数$A(j\omega)$で議論できるので便利である。また$A^*(j\omega) = A(-j\omega)$より、ナイキスト線図は常に実軸に対して対称である。等角写像では軌跡に沿って進むとき、軌跡の右側の領域は写像してもやはり右側に写像されるので、s 平面でΓで囲まれる領域は$\beta A(s)$平面ではΓ_1'で囲まれる領域に対応する。

したがって、安定条件は$\beta A(s)$平面において、点$(-1, j0)$がΓ_1'で囲まれる領域の外になければならないことになる。これがナイキスト線図によるナイキストの安定判別法である。

開ループ伝達関数$A(s)$が安定、すなわち$A(s)$のポールがｓ平面内の右半平面内に存在しない場合は以上の議論でよいが、$A(s)$のポールが右半平面内に存在する場合には更に一般化した議論が必要である。有限次数の開ループ伝達関数$A(s)$は s の有理関数であるのでこれを

$$A(s) = \frac{F(s)}{H(s)}$$

と書くと閉ループ伝達関数$G(s)$は

$$G(s) = \frac{F(s)}{H(s) + \beta F(s)}$$

と書ける。ここで$F(s)$及び$H(s)$はsの多項式である。そこでp_iをｓ平面の左半平面内に、p_k'を右半平面内に存在する$G(s)$のポール（$\mathrm{Re}[p_i] < 0, \mathrm{Re}[p_k'] > 0$）とし、$q_j$、$q_r'$をそれぞれ左半平面内及び右半平面内に存在する$A(s)$のポール（$\mathrm{Re}[q_j] < 0, \mathrm{Re}[q_r'] > 0$）とすると$H(s)$及び$H(s) + \beta F(s)$は次のように因数分解できる

$$H(s) = a\prod_{j=1}^{n-n_q}(s - q_j)\prod_{r=1}^{n_q}(s - q_r')$$

$$H(s) + \beta F(s) = b\prod_{i=1}^{n-n_p}(s - p_i)\prod_{k=1}^{n_p}(s - p_k')$$

従って

$$\frac{A(s)}{G(s)} = \frac{H(s) + \beta H(s)}{H(s)} = \frac{b\prod_{i=1}^{n-n_p}(s - p_i)\prod_{k=1}^{n_p}(s - p_k')}{a\prod_{j=1}^{n-n_q}(s - q_j)\prod_{r=1}^{n_q}(s - q_r')}$$

であることから、特性方程式は次のように因数分解することができる。

$$1 + \beta A(s) = \alpha\frac{\prod_{i=1}^{n-n_p}(s - p_i)\prod_{k=1}^{n_p}(s - p_k')}{\prod_{j=1}^{n-n_q}(s - q_j)\prod_{r=1}^{n_q}(s - q_r')} \tag{4.2.67}$$

ここで$\alpha\,(= b/a)$は定数である。$G(s)$が安定であるためにはp_k'がないこと、即ち$n_p = 0$であることである。さて$s = q_j$、$s = q_r'$においては閉ループ伝達関数は$G(s)\big|_{s=q_j} = G(s)\big|_{s=q_r'} = 1/\beta$ なる有限値になるので、$A(s)$が不安定ポール（$\mathrm{Re}[q_r'] > 0$）を有していても直接$G(s)$を不安定にするこ

とはない。このときのナイキスト線図は次のようになる。s 平面においてΓを一周すると、p_i、q_jは閉曲線Γの外にあるので$(s-p_i)$、$(s-q_j)$の偏角はもとへ戻るが、$(s-p_i')$及び$(s-q_j')$の偏角は-2π増加するので、(4.2.67)式中の偏角はそれぞれ

$$\prod_{i=1}^{n-n_p}(s-p_i)\to\prod_{i=1}^{n-n_p}(s-p_i),\qquad \prod_{j=1}^{n-n_q}(s-q_j)\to\prod_{j=1}^{n-n_q}(s-q_j)$$

$$\prod_{k=1}^{n_p}(s-p_k')\to e^{-j2n_p\pi}\prod_{k=1}^{n_p}(s-p_k'),\qquad \prod_{r=1}^{n_q}(s-q_r')\to e^{-j2n_q\pi}\prod_{r=1}^{n_q}(s-q_r')$$

だけ変化する（軌跡Γは時計回りであるので偏角の変化は負になる）。

したがって$1+\beta A(s)$の偏角の変化は

$$1+\beta A(s)\to\{1+\beta A(s)\}e^{-j2(n_p-n_q)\pi} \tag{4.2.68}$$

となる。ここで、$1+\beta A(s)$の偏角は点$(-1,j0)$に対する$\beta A(s)$の偏角であり、ナイキスト線図Γ_1'は点$(-1,j0)$の回りを$N=n_p-n_q$回時計回り方向に回転することになる（$N<0$は反時計回り方向の回転を意味する）。開ループ伝達関数$A(s)$が２個の不安定ポール(q_1',q_2')を有するときのナイキスト線図の例を図 4-9 に示す。

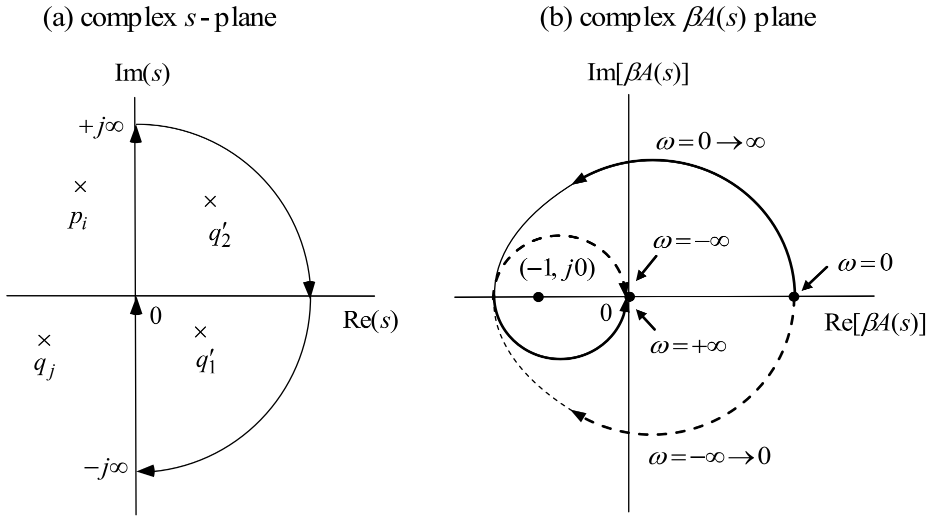


図 4-9　開ループ伝達関数$A(s)$が２個の不安定
ポール(q_1',q_2')を有するときのナイキスト線図

この場合ナイキスト線図は$(-1,j0)$の回りを２回転する。安定条件は$n_p=0$であるので、

閉ループが安定であるためには$N=-n_q$、すなわちナイキスト線図の軌跡は点$(-1,j0)$の回りを、右半平面内にある開ループ伝達関数のポールの個数と同じ回数反時計回りに回転しなければならない。

但し、q'_rがm次のポールである場合にはそのポール数はm個と数える。これが一般の場合のナイキストの安定条件である。以上の議論は伝達関数が s の有理関数（任意の次系）の場合に限ったが、伝達関数が非有理関数となる時間遅れ要素を含む系についても成立する。

例として、電磁石電源やモーターの回転角制御等によく用いられる

$$A(s) = A_0 / s \tag{4.2.69}$$

なる開ループ伝達関数を考えてみる。電磁石電源では直流領域における残差（基準値と出力の差）をゼロに近づけたいと云う意図から$1/s$がよく使われ、またモーターの回転角制御では、回転速度$d\theta/dt$はモーター駆動電圧vに比例する（$d\theta/dt = A_0 v$）ため、回転角は$\theta(s) = (A_0/s)V(s)$となる。$A(s)$は$s=0$にポールを有するので、s平面における軌跡Γのとり方として図 4-10(a)に示すように、閉曲線が囲む領域内に$s=0$を含まないように$s = \varepsilon e^{j\theta}$ $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$なる半円弧$\Gamma_2^{(1)}$でポールを避けて一周する軌跡$\Gamma^{(1)}$、または$s = \varepsilon e^{j\theta}$ $(-\pi/2 > \theta > -3\pi/2)$なる半円弧$\Gamma_2^{(2)}$によってポールを避ける軌跡$\Gamma^{(2)}$の二通りがある。

$\Gamma^{(1)}$は安定、$\Gamma^{(2)}$は内部にポールを含むので不安定になるように思われるが、安定性は軌跡の選び方によらずいずれの軌跡でも安定である。これらに対応するナイキスト線図$\beta A(s)$は図 4-10(b)のようになる。$\Gamma^{(1)}$に対応する軌跡$\Gamma'^{(1)}$は点$(-1, j0)$を内部に含まないので安定であり、$\Gamma^{(2)}$に対応する$\Gamma'^{(2)}$は点$(-1, j0)$を内部に含むがその回りを反時計回りに一回転するのでやはり安定である（$\Gamma^{(2)}$内のポール数n_qは 1 個）。

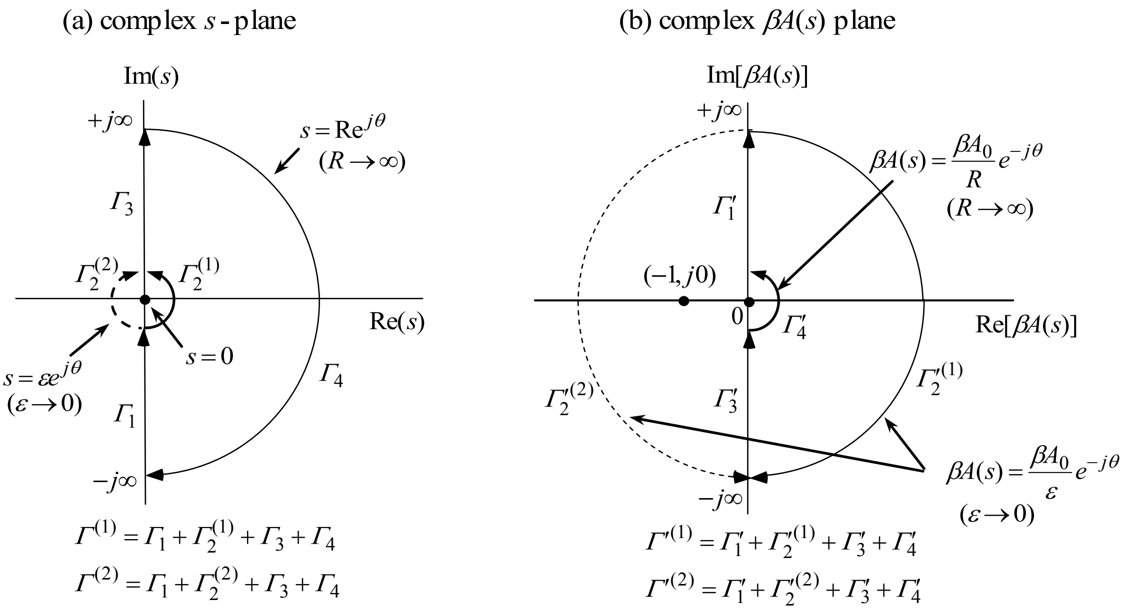


図 4-10　$A(s) = A_0/s$のナイキスト線図

以上のように、一般化されたナイキストの条件により、開ループ伝達関数が不安定（$\mathrm{Re}(q'_k) > 0$なるポールq'_kを有している）であっても、安定な閉ループ伝達関数を実現することができること

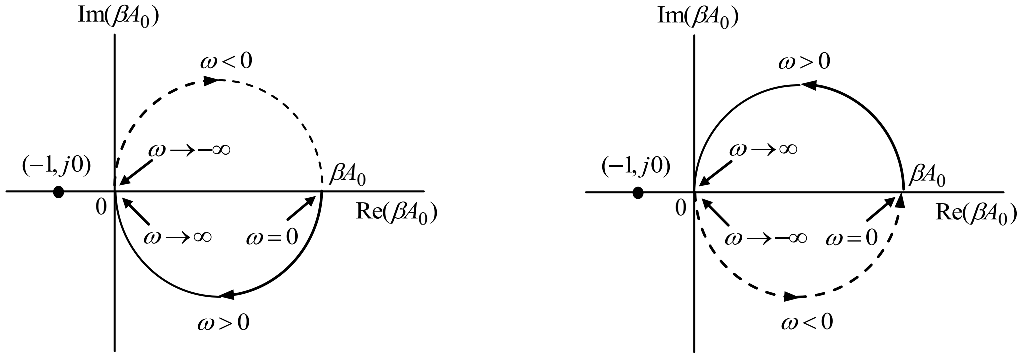
が分かる。複数のフィードバックを多重にかけた系ではこのようなことがよく起きる。例えば、多重フィードバックループで構成されているシンクロトロンの加速高周波システム等がよい例である。またメカトロニクス分野等において、複数のセンサー信号で一つの動作をフィードバック制御するような場合にも起きる。

4-2-6 ナイキスト線図の例

１次系

$$A(s)=\frac{\omega_0}{s+\omega_0}A_0 \tag{4.2.70}$$

$\omega_0>0$ の場合は図 4-11(a)のように $\beta A(j\omega)$ の軌跡が囲む領域内に点 $(-1, j0)$ を含まないので安定である。



(a)　$\omega_0>0$　　　　(b)　$\omega_0<0$

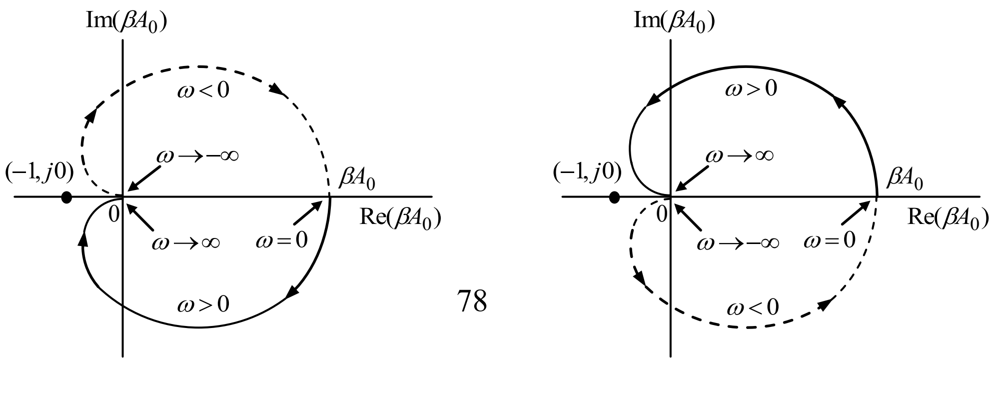
図 4-11　１次系

一方 $\omega_0<0$ の場合は、図(b)のように ω を $-\infty$ から ∞ まで変えたときの軌跡 $\beta A(j\omega)$ の進む方向が逆転する。この場合は軌跡の囲む領域は円の外側である。点 $(-1, j0)$ は ω を $-\infty$ から ∞ まで変えたときの軌跡 $\beta A(j\omega)$ の進む方向に対して常に右側の領域にあり、必ず不安定となる。

２次系

$$A(s)=\frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}A_0 \tag{4.2.71}$$

$\zeta>0$ では図 4-12(a)のように点 $(-1, j0)$ は $\beta A(j\omega)$ の軌跡が囲む領域内にないので安定である。



(a)　　　　　　　　　　　　　　　　　(b)

図 4-12　２次系

一方$\zeta<0$では図(b)のように軌跡の進行方向が逆転するので、図 4-11(b)の議論と同様常に不安定である。図 4-11(a)及び図 4-12(a)のように、βA_0の大きさに係らず常に安定な系を絶対安定系と呼ぶ。

３次系

$$A(s)=\frac{A_0}{(s+a)(s+b)(s+c)} \tag{4.2.72}$$

$$(a,b,c>0)$$

A_0が大きいと点 $(-1,j0)$ が軌跡$\beta A(j\omega)$の囲む領域内に含まれるようになるため、不安定となる。即ち安定なβA_0の上限が存在する（図 4-13）。一般に３次以上の系は必ず安定限界が存在する。

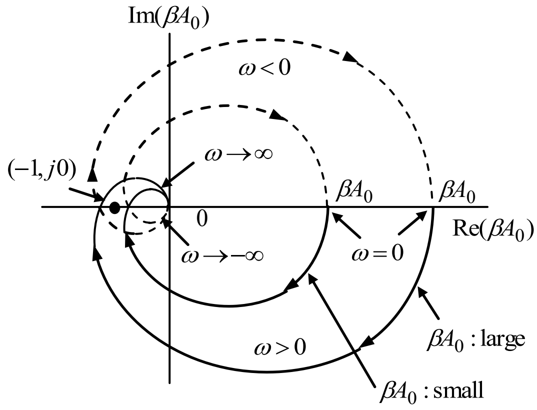


図 4-13　３次系

フェーズシフター

$$A(s)=A_0\frac{\omega_0-s}{\omega_0+s} \tag{4.2.73}$$

$$A(j\omega)=A_0\frac{1-j\omega/\omega_0}{1+j\omega/\omega_0} \tag{4.2.74}$$

この場合$\beta A_0\geq 1$では必ず不安定になる。（編注:フェーズシフターはオールパスフィルターともいい、位相補償、同期検波、同期整流などに使用される）

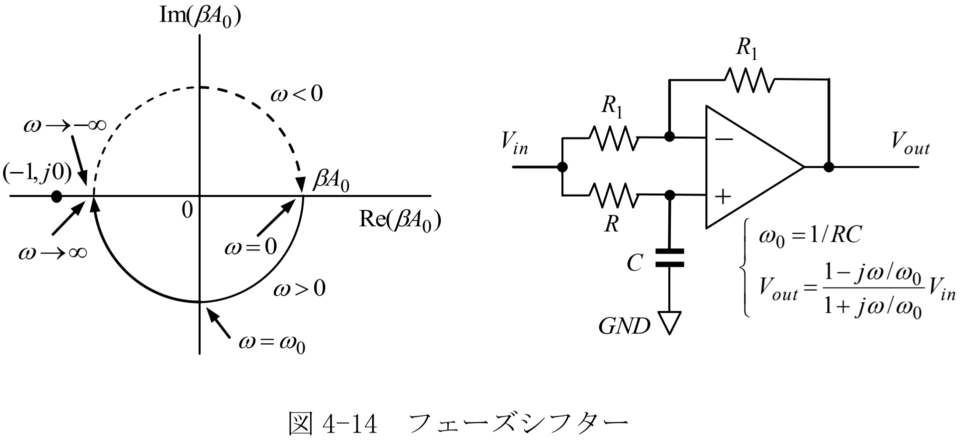


図 4-14　フェーズシフター

遅延回路（時間遅れ要素）

$$y(t) = A_0 x(t-\tau) \tag{4.2.75}$$

ここで

$$\mathcal{L}[x(t-\tau)] = e^{-\tau s} X(s)$$

より

$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= A_0 e^{-\tau s} X(s) \\ A(s) &= A_0 e^{-\tau s} \end{aligned}\right\} \tag{4.2.76}$$

$$A(j\omega) = A_0 e^{-j\omega\tau} \tag{4.2.77}$$

したがってナイキスト線図は図 4-15 となりフェーズシフターと同様$\beta A_0 \geq 1$では必ず不安定になる。

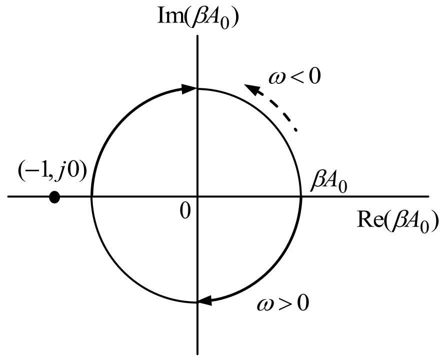
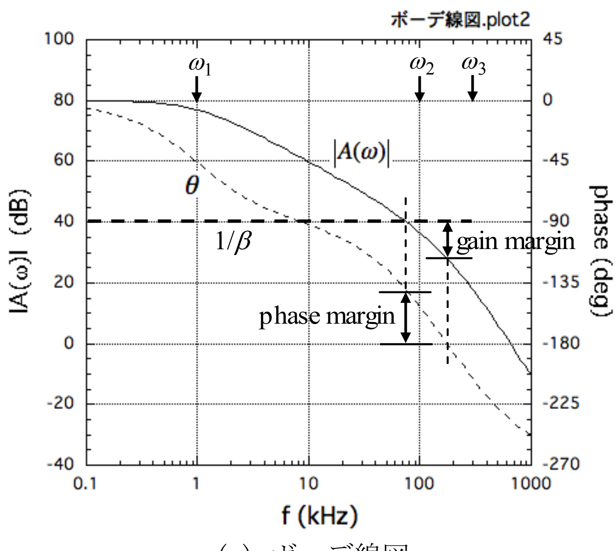


図 4-15　遅延回路

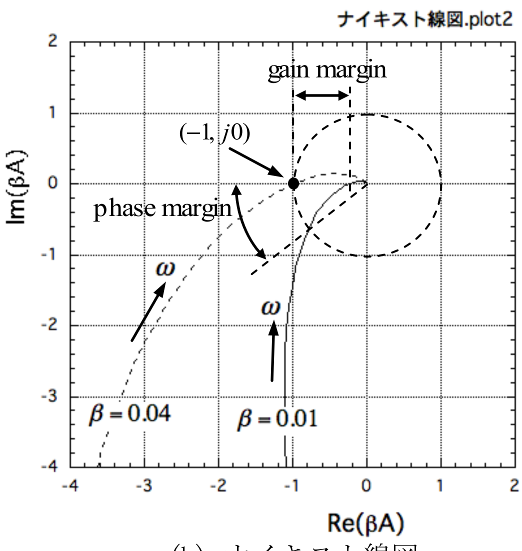
4-2-7 ボーデ線図（Bode diagram）

ナイキスト線図では一巡ループ利得βAが 1 に近い領域で安定性を判定するので、オープンループ利得が非常に大きい（数 10dB～100dB 以上）通常の電子回路設計においては、ナイキスト線図は使いにくい。実際の回路設計では、ナイキスト線図と同じことであるが、オープンループ利得の大きさ$|A(\omega)|$（いわゆる周波数特性）と、$A(\omega)$の位相$\theta = \tan^{-1}[\mathrm{Im}\{A(\omega)\}/\mathrm{Re}\{A(\omega)\}]$を同時に２次元グラフにプロットした「ボーデ線図（Bode diagram）」が通常用いられる。例として図 4-16 に$A_0 = 1\times10^4\,(80dB),\ \omega_1 = 2\pi\times1kHz,\ \omega_2 = 2\pi\times100kHz,\ \omega_3 = 2\pi\times300kHz$とした３次系

$$A(j\omega) = \frac{A_0}{(1+j\omega/\omega_1)(1+j\omega/\omega_2)(1+j\omega/\omega_3)}$$



(a) ボーデ線図



(b) ナイキスト線図

図 4-16　ボーデ線図(a)とナイキスト線図(b)

のボーデ線図とナイキスト線図を示す。$|\beta A(j\omega)|=1$となるときの$A(j\omega)$の位相θが、$-180°$よりどれだけ大きいかを位相余裕（phase margin）と云い、位相θが$-180°$に達したときの利得$|A(j\omega)|$が$1/\beta$よりどれだけ小さいかを利得余裕（gain margin）と云う。閉ループ応答

$$K(j\omega)=\frac{A(j\omega)}{1+\beta A(j\omega)}$$

が振動しないためには位相余裕を$45°$以上獲保することが必要である。図 4-16 の例では、$\beta=0.01$（閉ループ利得$40dB$）では位相余裕が約$40°$であり、わずかに振動が残るがおおむね安定である。また$\beta\geq 0.04$（閉ループ利得$28dB$以下）ではループが発振する（不安定）。

通常の電子回路設計においてはボーデ線図で十分であるが、オープンループ利得$A(j\omega)$が不安定ポールを持つ場合や、多重フィードバック系等の設計においてはボーデ線図では判定困難な場合が多く、そのような場合にはナイキスト線図が用いられる。

4-2-8 ラウス・フルビッツの安定性判別法

次数が高くパラメーターの多い系では、フィードバック・ループの安定性のパラメーター依存性を、ナイキストの安定判別法にて図形的に調べるのは極めて煩雑な作業となる。そこで、解析的に伝達関数の安定性を調べる方法としてラウス・フルビッツの安定判別法がある。

n次系を考えるものとし、伝達関数$G(s)$の特性方程式

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0=0 \tag{4.2.78}$$

の係数により次の$n-1$個の行列式

$$\left.\begin{array}{l} D_1=a_{n-1},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3}\end{vmatrix} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_{n-1}=\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots\cdots & & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}\end{array}\right\} \tag{4.2.79}$$

を作る。$G(s)$が安定、すなわち特性方程式の全ての根の実数部が負であるための必要十分条件は、$a_n, a_{n-1},\cdots,a_0$ および $D_1,D_2,\cdots,D_{n-1}$ の全てが正であることである。

$$\left.\begin{array}{l} a_n>0,\quad a_{n-1}>0,\quad \cdots,\quad a_0>0 \\ D_1>0,\quad D_2>0,\quad \cdots,\quad D_{n-1}>0\end{array}\right\} \tag{4.2.80}$$

これをラウス・フルビッツの安定判別法と云う。これにより、任意の次数の多次系の安定性を判定することができる。この方法では、安定限界を解析的に求めることができるが、過渡応答特性を調べることができないため、実際の電子回路の設計ではあまり見かけないが、多次系の解析には極めて有用である。

例えばシンクロトロンの加速高周波システムでは、ビームと加速高周波電圧間の位相振動をダンプするための「位相フィードバック」、加速空胴の共振周波数をフィードバック制御する「チューニングループ」、ビーム軌道を安定化するために BPM 信号をフィードバックして RF 周波数を制御する「ビームポジション・フィードバック」、変化する周波数に対して RF 電圧を一定に保つ「AVC ループ」の４種類のフィードバック・ループが同時にかけられ、ビーム伝達関数を含んだ多重フィードバック・ループを構成している。そのため伝達関数の次数は最低４次、ループの構成要素のカットオフ周波数を考慮すると８次以上にもなり、例えばビームローディングをパラメーターにした安定限界を調べるのに、ナイキストの安定判別法では極めて煩雑になるため全体を見通すことが困難である。そこで、F. Pedersen は高周波システムの解析にラウス・フルビッツの判定法を適用して安定限界に対する解析解を求めている（IEEE Trans. on Nuclear Sience, NS-22, No.3, 1975, p.1906）。

多重フィードバックの例として図 4-17 のような２重フィードバック系を考える。

$$\left.\begin{aligned} &Y'(s) = A_1(s)\{X(s) - H_2(s)Y(s) - H_1(s)Y'(s)\} \\ &Y(s) = A_2(s)Y'(s) \end{aligned}\right\} \tag{4.2.81}$$

より、伝達関数 $G(s) = Y(s)/X(s)$ は

$$G(s) = \frac{A_1(s)A_2(s)}{1 + H_1(s)A_1(s) + H_2(s)A_1(s)A_2(s)} \tag{4.2.82}$$

で与えられる。簡単化のために帰還率 $H_1(s), H_2(s)$ は定数

$$H_1(s) = h_1, \qquad H_2(s) = h_2 \tag{4.2.83}$$

であるとする。

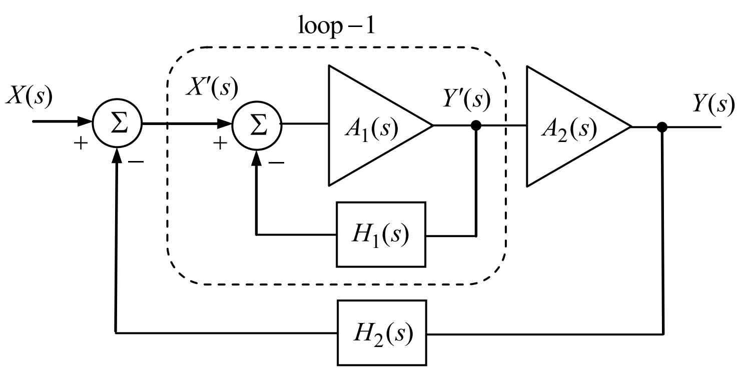


図 4-17　２重フィードバック系

ここで$A_1(s)$として３次系（条件付安定系）を考え、その周波数特性を

$$A_1(j\omega)=\frac{k_1}{(1+j\omega/\omega_1)(1+j\omega/\omega_2)^2} \qquad (\omega_1>0,\ \omega_2>0) \tag{4.2.84}$$

と仮定する。(4.2.84)式より伝達関数$A_1(s)$は

$$A_1(s)=\frac{\omega_1\omega_2^2k_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)^2} \tag{4.2.85}$$

と書け、loop-1 の伝達特性は

$$Y'(s)=G'(s)X'(s) \tag{4.2.86}$$

$$G'(s)=\frac{A_1(s)}{1+H_1(s)A_1(s)}=\frac{\omega_1\omega_2^2k_1}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)^2+\omega_1\omega_2^2h_1k_1} \tag{4.2.87}$$

となる。loop-1 の伝達関数$G'(s)$の特性方程式は

$$s^3+(\omega_1+2\omega_2)s^2+(2\omega_1+\omega_2)\omega_2s+\omega_1\omega_2^2(1+h_1k_1)=0 \tag{4.2.88}$$

であり、ラウス・フルビッツの係数行列式は

$$\begin{cases} D_1'=\omega_1+2\omega_2 \\ D_2'=(\omega_1+2\omega_2)(2\omega_1+\omega_2)\omega_2-\omega_1\omega_2^2(1+h_1k_1) \end{cases} \tag{4.2.89}$$

で与えられる。従って loop-1 に対する安定条件は$D_2'>0$より

$$h_1k_1<2(\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}+2) \tag{4.2.90}$$

となる。一方、図 4-17 のクローズドループ特性は

$$Y(s)=G(s)X(s) \tag{4.2.91}$$

$$G(s)=\frac{\omega_1\omega_2^2k_1A_2(s)}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)^2+\omega_1\omega_2^2h_1k_1+\omega_1\omega_2^2h_2k_1A_2(s)} \tag{4.2.92}$$

と書ける。ここで$A_2(s)$として１次系

$$A_2(s)=\frac{\omega_3k_2}{s+\omega_3} \tag{4.2.93}$$

を仮定すると、クローズドループ伝達関数$G(s)$は

$$G(s)=\frac{\omega_1\omega_2^2\omega_3k_1k_2}{(s+\omega_1)(s+\omega_2)^2(s+\omega_3)+\omega_1\omega_2^2h_1k_1(s+\omega_3)+\omega_1\omega_2^2\omega_3h_2k_1k_2} \tag{4.2.94}$$

となる。この特性方程式は

$$\begin{aligned} &s^4+(\omega_1+2\omega_2+\omega_3)s^3+(\omega_2^2+2\omega_1\omega_2+2\omega_2\omega_3+\omega_1\omega_3)s^2 \\ &+(\omega_1\omega_2^2+\omega_2^2\omega_3+2\omega_1\omega_2\omega_3+\omega_1\omega_2^2h_1k_1)s \\ &+(\omega_1\omega_2^2\omega_3+\omega_1\omega_2^2\omega_3h_1k_1+\omega_1\omega_2^2\omega_3h_2k_1k_2)=0 \end{aligned} \tag{4.2.95}$$

で与えられ、ラウス・フルビッツの係数行列式は

$$\left.\begin{aligned}D_1 &= a_3\\ D_2 &= a_3a_2 - a_4a_1\\ D_3 &= a_1D_2 - a_3^2a_0\end{aligned}\right\} \tag{4.2.96}$$

となる。ここで

$$\left.\begin{aligned}a_4 &= 1\\ a_3 &= \omega_1 + 2\omega_2 + \omega_3\\ a_2 &= \omega_2(\omega_2 + 2\omega_3) + \omega_1(2\omega_2 + \omega_3)\\ a_1 &= \omega_2\omega_3(2\omega_1 + \omega_2) + \omega_1\omega_2^2(1 + h_1k_1)\\ a_0 &= \omega_1\omega_2^2\omega_3(1 + h_1k_1 + k_1h_2k_2)\end{aligned}\right\} \tag{4.2.97}$$

である。参考に

$$k_1 = 5\times10^3,\quad \omega_1 = 2\pi\times1kHz,\quad \omega_2 = 2\pi\times1MHz$$
$$k_2 = 10,\quad \omega_3 = 2\pi\times10MHz,\quad h_2 = \pm0.02$$

を仮定したときの、loop-1 の帰還率 h_1 の関数としての D_2, D_3 を図 4-18 に示す。$D_2 > 0, D_3 > 0$ となる領域が安定領域である。図中には(4.2.89)式の D_2' も示しており、$D_2' < 0$ となる領域 $(h_1 > 0.41)$ は loop-1 が単独では不安定となる領域である。 $h_2 = -0.02$ では $h_1 < 0.64$ が安定領域である。即ち $0.41 < h_1 < 0.64$ では loop-1 が単独では不安定にもかかわらず全体としては安定であることを示している。また、$h_2 = +0.02$ では安定領域が $h_1 < 0.16$ に制限されてしまう。

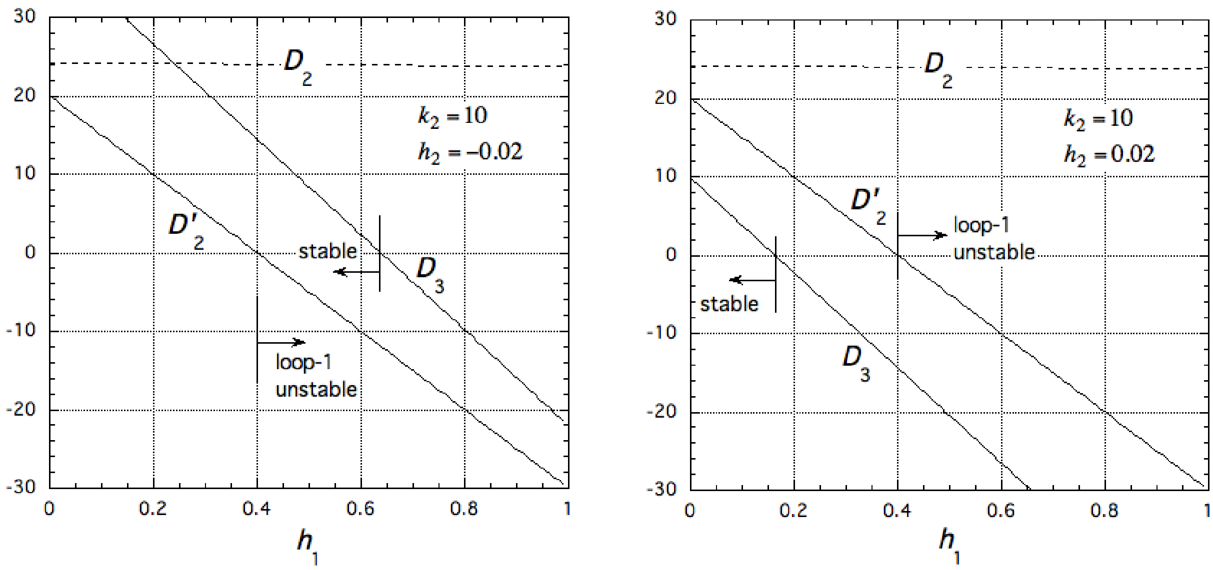


図 4-18　２重フィードバック系（図 4-15）の安定領域

D_2' は $D_2'/(\omega_1^3\times10^{10})$、$D_2$ は $D_2/(\omega_1^3\times10^{10})$、

D_3 は $D_3/(\omega_1^6\times10^{20})$ である。

以上のように多重フィードバック系では個々のループの安定性のみを考えても不十分であり、個々のループが不安定でも全体としては安定になり得る、またはその逆もあるので、個々の場合について十分な考察が必要になる。

4-2-9 特性方程式の根による安定性判定

ナイキストの安定判別法またはラウス・フルビッツの判別法により、考えている系が安定か否かは判定できるが、過度特性についてはほとんど分からない。そこで、特性方程式の根と過度特性について考察しておく。n 次系を考え、その特性方程式は重根を持たないものとしよう。(4.2.63)式より、伝達関数の特性方程式の根を p_i とすると出力応答は

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n}K_i e^{p_i t} \tag{4.2.98}$$

で与えられる。ここで２次系を考えると

$$p_{1,2}=-\zeta\omega_0 \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0 \tag{4.2.99}$$

であり（(4.2.57)式参照）、過度応答が振動やオーバーシュートしないためには $\zeta>1/\sqrt{2}$ 即ち $\mathrm{Re}(p_i)<-|\mathrm{Im}(p_i)|$ でなければならない。これは(4.2.97)式の各項について成立し、出力 $y(t)$ が特性方程式の根の周波数 $|\mathrm{Im}(p_i)|$ で振動しないためには全ての根に対して

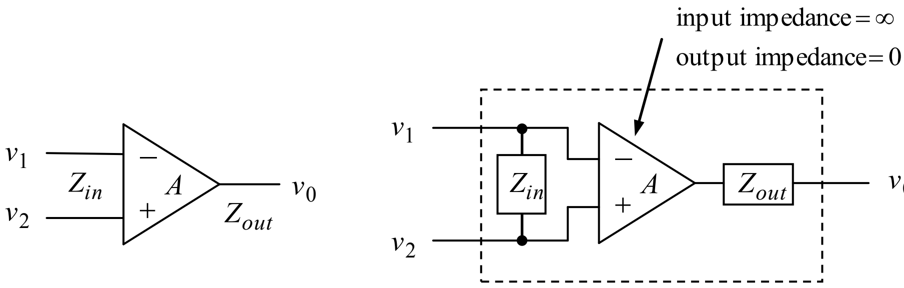
$$\mathrm{Re}(p_i)<-|\mathrm{Im}(p_i)| \tag{4.2.100}$$

であることが要求される。

即ち、最も直接的な安定性及び過度応答特性についての判定は、特性方程式を Mathematica 等の計算ソフトウェアを利用して解き、周波数特性 $|G(\omega)|$ の形を見ながら、おおむね $|G(\omega)|>1$ の領域にある全ての根について $\mathrm{Re}(p_i)<-|\mathrm{Im}(p_i)|$ が満たされているか否かを判定すれば良い。これまでは次数の高い系の特性方程式の根を求めることが大変であったが、パソコンが普及している現在ではこの方法が最も簡便でかつ確実、見通しの良い方法ではないかと思われる。なお、時間遅れ要素を含む系においては特性方程式の複素根を求めることが困難であり、この方法は使用できない。

4-3 反転増幅器

利得 $A(\omega)$、反転・非反転入力間の入力インピーダンス Z_{in}、出力インピーダンス Z_{out} の増幅器を図 4-19(b)のように定義する。



(a) (b)

図 4-19　増幅器

このような増幅器を用いて図 4-20 のようなフィードバック反転増幅器を考えると

$$\left.\begin{aligned} & i_1 = \frac{v_i - v_1}{Z_1} = \frac{v_1 - v_0}{Z_2} + \frac{v_1}{Z_{in}} \\ & i_L = i_0 + \frac{v_1 - v_0}{Z_2} \\ & v_0 = -A(\omega) v_1 - Z_{out} i_0 \\ & v_0 = Z_L i_L \end{aligned}\right\} \tag{4.3.1}$$

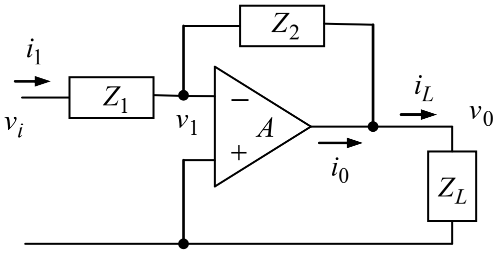


図 4-20　フィードバック増幅器

が成立する。これより

$$\left.\begin{aligned} & v_0 = G(\omega) v_i \\ & G(\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1} \frac{\beta\{A(\omega) - Z_{out}/Z_2\}}{1 + \beta A(\omega) + \dfrac{Z_{out}}{Z_L}\left\{1 + \beta Z_L\left(\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_{in}}\right)\right\}} \end{aligned}\right\} \tag{4.3.2}$$

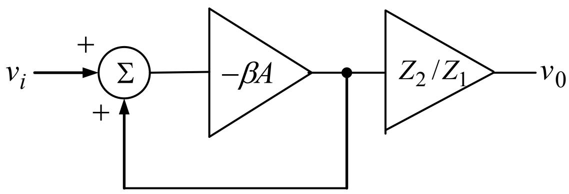
$G(\omega)$は閉ループ利得であり

$$\beta = \frac{1}{1 + Z_2/Z_1 + Z_2/Z_{in}} \tag{4.3.3}$$

である。ここで増幅器の出力インピーダンスは十分小さく、$|Z_{out}/Z_L| << 1,$ $|\beta Z_{out}/Z_1| << 1,$

$|\beta Z_{out}/Z_{in}| << 1$とすると

$$\left.\begin{aligned} & G(\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1} \frac{\beta A(\omega)}{1 + \beta A(\omega)} \\ & \beta = \frac{1}{1 + Z_2/Z_1} \end{aligned}\right\} \tag{4.3.4}$$



を得る。これを図 4-2 に対応するループ図

に書き直すと図 4-21 のようになる。この場合の増幅器自身の入力インピーダンスは

図 4-21　反転増幅器のフィードバックループ

$$Z'_{in} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{Z_2}{1 + Z_2/Z_{in} + A(\omega)} \qquad (4.3.5)$$

となり、フィードバック増幅器としての入力インピーダンス $Z_i = v_i / i_1$ は

$$Z_i = Z_1 + \frac{Z_2}{1 + Z_2/Z_{in} + A(\omega)}$$

$$\cong Z_1 + \frac{Z_2}{1 + A(\omega)} \qquad (4.3.6)$$

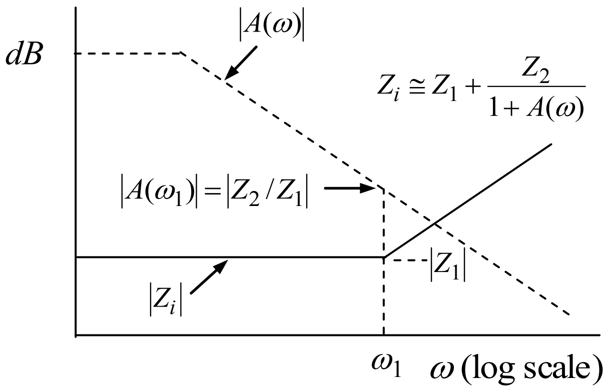


図 4-22　入力インピーダンス

となる。Z_i の周波数特性の概念図を図 4-22 に示す。Z_i はオープンループゲイン $A(\omega)$ が $|A(\omega_1)| = |Z_2/Z_1|$ に減少する周波数 ω_1 まで $Z_i = Z_1$ となるが、$\omega > \omega_1$ では周波数に比例して増加する。

また、出力インピーダンス Z_0 は

$$v_0 = \frac{Z_L}{Z_L + Z_0} v_0 \big|_{Z_L \to \infty}$$

より

$$Z_0 = Z_L \left(\frac{v_0 \big|_{Z_L \to \infty}}{v_0} - 1 \right)$$

$$= Z_L \frac{G(\omega)\big|_{Z_L \to \infty} - G(\omega)}{G(\omega)}$$

$$= \frac{Z_{out}}{1 + \beta\{A(\omega) + Z_{out}(1/Z_1 + 1/Z_{in}\}}$$

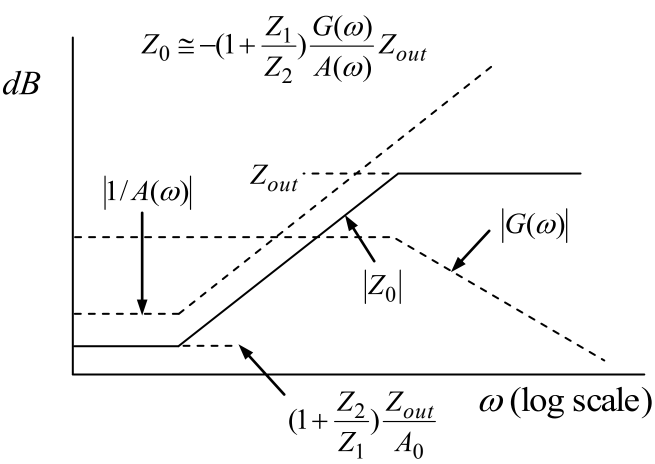


図 4-23　出力インピーダンス

ここで

$$|Z_{out}| << |Z_1|, |Z_{in}| \quad \text{及び} \quad |A(\omega)| >> \left| \frac{Z_{out}}{Z_1} + \frac{Z_{out}}{Z_{in}} \right|$$

であるものとすると

$$Z_0 = \frac{Z_{out}}{1 + \beta A(\omega)} \cong -(1 + \frac{Z_1}{Z_2}) \frac{G(\omega)}{A(\omega)} Z_{out} \qquad (4.3.7)$$

となる。オープンループゲイン $A(\omega)$ のカットオフ周波数（第 1 ポール）までは、反転増幅器の出力インピーダンス Z_0 は非常に低いインピーダンス $Z_0 \cong (1 + Z_1/Z_2) Z_{out} / A_0$ となる。それ以上の周波数では周波数に比例して増加し、クローズドループゲインのカットオフ周波数以上ではオペ

アンプ自身の出力インピーダンスZ_{out}に等しくなる。

以上より$|\beta A(\omega)| >> 1$なる領域では

$$\left.\begin{aligned} &G(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1} \\ &Z_i = Z_1 + \frac{Z_2}{A(\omega)}, \quad Z_0 = \frac{Z_{out}}{\beta A(\omega)} \end{aligned}\right\} \tag{4.3.8}$$

と近似され、開ループ利得の十分大きい反転増幅器では、フィードバック増幅器の入力インピーダンスはZ_1のみで決まり、増幅器自身の入力インピーダンスの影響は無視できる。すなわち増幅器自身の反転入力端子は実効的なインピーダンスがゼロと見なせることになる。これをイマジナリーショート（仮想短絡）と云う。またフィードバックにより実効的な出力インピーダンスが小さくなる（$|Z_0| << |Z_{out}|$）。

4-4 非反転増幅器

フィードバックをかけた非反転増幅器の構成を図 4-24 に示す。図より次の回路方程式を得る。

$$\left.\begin{aligned} &i_1 = \frac{v_i - v_1}{Z_{in}} = \frac{v_1 - v_0}{Z_2} + \frac{v_1}{Z_1} \\ &i_L = i_0 - \frac{v_0 - v_1}{Z_2} \\ &v_0 = A(\omega)(v_i - v_1) - Z_{out} i_0 = Z_L i_L \end{aligned}\right\} \tag{4.4.1}$$

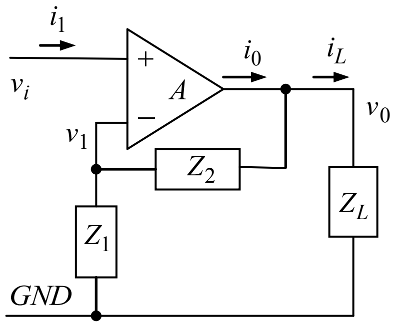


図 4-24　非反転増幅器

これより

$$\left.\begin{aligned} &v_0 = G(\omega) v_i \\ &G(\omega) = \frac{A(\omega)(1 + Z_2/Z_1) + Z_{out}/Z_{in}}{1 + Z_2/Z_1 + Z_2/Z_{in} + A(\omega) + Z_{out}\{1/Z_L + (1 + Z_2/Z_L)(1/Z_1 + 1/Z_{in})\}} \end{aligned}\right\} \tag{4.4.2}$$

となる。ここで$|Z_{out}/Z_{in}| << 1, \quad |Z_{out}/Z_1| << 1, \quad |Z_{out}/Z_L| << 1$とすると

$$\left.\begin{aligned} &G(\omega) = (1 + \frac{Z_2}{Z_1}) \frac{\beta A(\omega)}{1 + \beta A(\omega)} \\ &\beta = \frac{1}{1 + Z_2(1/Z_1 + 1/Z_{in})} \end{aligned}\right\} \tag{4.4.3}$$

と近似され、入力インピーダンスは

$$Z_i = \frac{v_i}{i_1} = \frac{A(\omega)}{G(\omega)} Z_{in} \tag{4.4.4}$$

となる。図 4-25 に示すように非反転増幅器の入力インピーダンス Z_i は、オープンループゲインのカットオフ周波数以上では周波数に反比例して減少するので、高入力インピーダンスが必要な場合には注意が必要である。

なお、Z_{in} は増幅器自身の非反転入力と反転入力の間のインピーダンスであるが、実際の増幅器では入力バイアス回路等によりそれぞれの入力とグランドの間にインピーダンス Z_+, Z_- が存在する。これらのインピーダンスはフィードバックには影響されず、実際の入力インピーダンスは

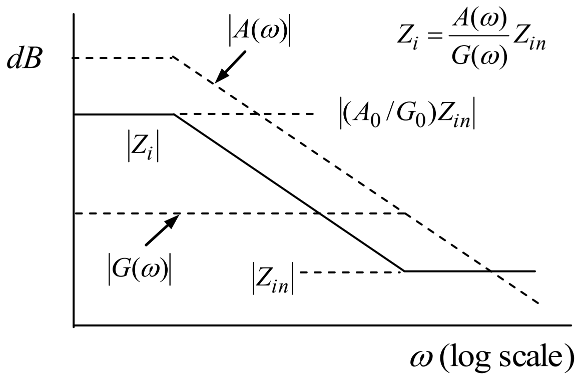


図 4-25　フィードバック増幅器の入力インピーダンス

$$Z_i = \left(\frac{A(\omega)}{G(\omega)} Z_{in} // Z_+\right) \tag{4.4.5}$$

となる。オペアンプ IC 等のデータシートには通常 $Z_{in} // Z_+$ が記載されており、Z_{in} と $Z_\pm$ の区別はされていないので注意が必要である。さらに $|Z_2/Z_{in}| << 1$ では(4.4.3)式は

$$\left.\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{A(\omega)}{1+\beta A(\omega)} \\ \beta &= \frac{1}{1+Z_2/Z_1} \end{aligned}\right\} \tag{4.4.6}$$

となる。即ち、オープンループゲインが十分大きく $|\beta A(\omega)| >> 1$ である周波数領域では

$$G(\omega) = \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1} \tag{4.4.7}$$

と近似でき、クローズドループゲインは Z_2/Z_1 のみで決まる。

出力インピーダンス Z_0 は

$$v_0 = \frac{Z_L}{Z_L + Z_{out}} v_0 \Big|_{Z_L \to \infty}$$

より

$$Z_0 = Z_L \left(\frac{v_0\left(_{Z_L \to \infty}\right.}{v_0} - 1 \right)$$

$$= \frac{Z_{out}}{1 + \beta A(\omega) + \beta Z_{out}(1/Z_{in} + 1/Z_1)}$$

したがって $|\beta Z_{out}(1/Z_{in} + 1/Z_1)| << 1$

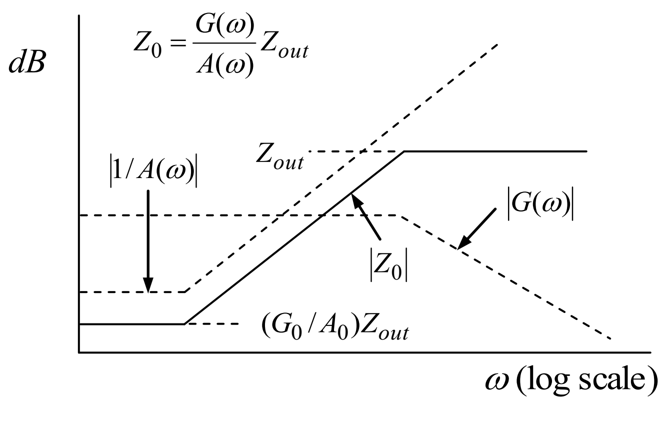


図 4-26　フィードバック増幅器の出力インピーダンス

ならば

$$Z_0 = Z_{out}\frac{G(\omega)}{A(\omega)}\frac{1+Z_2/Z_1+Z_2/Z_{in}}{1+Z_2/Z_1}$$

$$= Z_{out}\frac{G(\omega)}{A(\omega)} \qquad (|Z_2/Z_{in}| << 1) \tag{4.4.8}$$

となる（図 4-26）。

５章　トランジスター増幅回路

5-1 増幅器の雑音指数（noise figure NF）

増幅器の利得をGとして、出力雑音をv_{no}としたとき

$$v_{ni} = v_{no}/G \tag{5.1.1}$$

を入力換算雑音と云う。各段の利得が$G_1, G_2, \cdots, G_k$であるような多段増幅器を考え、各段の入力換算雑音を$v_{n1}, v_{n2}, \cdots, v_{nk}$とすると、出力雑音は

$$v_{no} = (G_1 G_2 \cdots G_k) v_{ns} + (G_1 G_2 \cdots G_k) v_{n1} + (G_2 \cdots G_k) v_{n2} + \cdots + G_k v_{nk} \tag{5.1.2}$$

となる。ここでv_{ns}は信号源の雑音であり、v_{ns}及び$v_{n1}, v_{n2}, \cdots, v_{nk}$は互いに無相関雑音とする。したがって増幅された信号源の雑音パワーの期待値$(G_1 G_2 \cdots G_k v_{ns})^2$に対する出力雑音パワーの期待値の比は

$$\begin{aligned} NF &= \frac{(G_1 G_2 \cdots G_k)^2 v_{ns}^2 + (G_1 G_2 \cdots G_k)^2 v_{n1}^2 + (G_2 \cdots G_k)^2 v_{n2}^2 + \cdots + G_k^2 v_{nk}^2}{(G_1 G_2 \cdots G_k)^2 v_{ns}^2} \\ &= 1 + \frac{v_{n1}^2}{v_{ns}^2} + \frac{v_{n2}^2}{G_1^2 v_{ns}^2} + \cdots + \frac{v_{nk}^2}{(G_1 G_2 \cdots G_{k-1})^2 v_{ns}^2} \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

となる。これを雑音指数 NF と云う。NF は、信号を増幅することによる S/N 比の劣化を表す。$G_1, G_2, \cdots, G_k$が全て１より大きいものとすると、初段の雑音v_{n1}がNFに最も大きく寄与する。すなわち多段の低雑音増幅器を製作するときは、初段の雑音を十分小さくすることが重要である。

5-2　等価雑音帯域幅

一様連続なパワースペクトルaを持つ白色雑音信号$x(t)$をローパスフィルター（LPF）を通して観測することを考える。ここで抵抗の熱雑音の場合は$a^2 = 2kTR$である。LPF の周波数特性関数を$G(j\omega)$として出力$y(t)$は

$$y(t) = a \int_{-\infty}^{\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{5.2.1}$$

で与えられる。そこで

$$\Delta f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left| G(j\omega) \right|^2 d\omega \tag{5.2.2}$$

とおくと

$$\overline{y^2(t)} = 2a^2 \Delta f_n \tag{5.2.3}$$

となり、Δf_nを等価雑音帯域幅という。

カットオフ周波数ω_cの１次 LPF では

$$\left|G(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+\omega^2/\omega_c^2} \tag{5.2.4}$$

より

$$\Delta f_n = \frac{\omega_c}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} f_c \tag{5.2.5}$$

即ち等価雑音帯域幅は$-3dB$信号帯域幅 $f_c = \omega_c/2\pi$ の $\pi/2$倍となる。また２次バターワース LPF（$Q=1/\sqrt{2}$）の場合は$\Delta f_n = (\pi/2\sqrt{2}) f_c$ である。更に２次 BPF の場合は

$$G(j\omega) = \frac{j\omega/\omega_0 Q}{1+j\omega/\omega_0 Q - \omega^2/\omega_0^2} \tag{5.2.6}$$

より $f_0 = \omega_0/2\pi$ として

$$\Delta f_n = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{x^2/Q^2}{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}dx = \frac{\pi}{2}\frac{f_0}{Q} \qquad (Q>1/2) \tag{5.2.7}$$

となり、１次 LPF の場合と同様等価雑音帯域幅は$-3dB$信号帯域幅 f_0/Q の $\pi/2$倍となる。$x(t)$ として抵抗Rの熱雑音電圧を考えると、$2a^2 = 4kTR$より $\overline{y^2(t)} = 4kTR\Delta f_n$ であり、雑音の平均パワーを評価する帯域幅は$-3dB$信号帯域幅Δf ではないことに注意することが必要である。

5-3 トランジスターの入力換算雑音

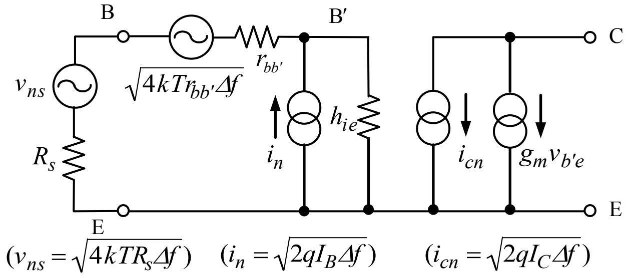
電流は電子の流れであり、単位時間に流れる電子数Nは$\overline{(\Delta N)^2} = N$なる統計的変動をしている。したがって$\tau$なる時間内での電流の揺らぎは

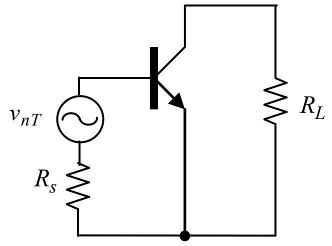
$$(\Delta I)^2 = qI/\tau \tag{5.3.1}$$

となる。これより$\Delta f = 1/2\tau$なるバンド幅に対応する電流の揺らぎi_nは

$$i_n^2 = 2qI\Delta f \tag{5.3.2}$$

で与えられ、白色スペクトルを有する。これを電流のショット雑音と云う。





(a)雑音等価回路　　　　　　　　　　　　　　(b)入力換算雑音

図 5-1　トランジスターの雑音等価回路

エミッター接地増幅回路において、コレクターバイアス電流のショット雑音 $i_{cn}=\sqrt{2qI_C\Delta f}$ およびベース電流のショット雑音 $i_n=\sqrt{2qI_B\Delta f}$ を考慮すると、図 5-1(a)のような雑音等価回路が書ける。R_s は信号源内部抵抗、$v_{ns}=\sqrt{4kTR_s\Delta f}$ は R_s の熱雑音、$v'_n=\sqrt{4kTr_{bb'}\Delta f}$ はベース拡がり抵抗 $r_{bb'}$ の熱雑音である。ここでコレクター抵抗 $1/h_{ce}$ は十分大きく、帰還率 h_{re} は十分小さいものとして無視した。なお Δf は等価雑音帯域幅（5-2 節参照）であることに注意。

図 5-1(a) より

$$v_{b'e}=h_{ie}\left(\frac{v_{ns}+v'_n-v_{b'e}}{R_s+r_{bb'}}+i_n\right) \tag{5.3.3}$$

したがって

$$v_{b'e}=\frac{h_{ie}(v_{ns}+v'_n)+(R_s+r_{bb'})h_{ie}i_n}{R_s+r_{bb'}+h_{ie}} \tag{5.3.4}$$

である。ここで図 5-1(b)のように、雑音電圧をまとめて v_{nT} なる等価入力雑音電圧で表わすと、v_{nT} は

$$g_m v_{b'e}+i_{cn}=\frac{h_{fe}}{R_s+r_{bb'}+h_{ie}}v_{nT} \tag{5.3.5}$$

で与えられる。ここで $g_m=qI_C/kT$ より $i_{cn}^2=2kTg_m\Delta f$、$i_n^2=2kTg_m\Delta f/h_{fe}$ と書き直し、雑音源は互いに無相関であるものとすると v_{nT} は

$$\begin{aligned} v_{nT}^2 &= v_{ns}^2+v_n'^2+(R_s+r_{bb'})^2 i_n^2+\frac{(R_s+r_{bb'}+h_{ie})^2}{h_{ie}^2 g_m^2}i_{cn}^2 \\ &= 4kTR_s\Delta f+4kTr_{bb'}\Delta f+(R_s+r_{bb'})^2 i_n^2+\frac{(R_s+r_{bb'}+h_{ie})^2}{h_{ie}^2}v_n^2 \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

となる。ここでトランジスターが発生するショット雑音

$$v_n=\frac{i_{cn}}{g_m}=\sqrt{\frac{2kT\Delta f}{g_m}},\qquad i_n=\sqrt{2qI_B\Delta f} \tag{5.3.7}$$

をそれぞれ「入力換算電圧雑音」及び「入力換算電流雑音」と呼ぶ。v_n は $R_s=0\,\Omega$ のときの入力換算雑音電圧、即ちトランジスタが発生する雑音である。

比 v_{nT}/v_{ns} は信号源の熱雑音に対する雑音電圧の増加を表わしており

$$NF=v_{nT}^2/v_{ns}^2 \tag{5.3.8}$$

を雑音指数（noise figure）と呼ぶ。

$$NF=1+\frac{r_{bb'}}{R_s}+\frac{g_m(R_s+r_{bb'})^2}{2R_s h_{fe}}\left(1+\frac{1}{h_{fe}}\right)+\frac{(R_s+r_{bb'})}{R_s h_{fe}}+\frac{1}{2R_s g_m} \tag{5.3.9}$$

通常NFは$NF(dB)=10\log(NF)$にてデシベルで表示される。入力換算電圧雑音v_n は信号源抵抗R_sによらず一定であるが、入力換算電流雑音による雑音電圧$R_s i_n$はR_sに比例して大きくなるため、あるR_sに対してNFが最小になるコレクター電流が存在する。

NFを最小にする条件は

$$\frac{d(NF)}{dg_m}=\frac{1}{2R_s}\{\frac{(R_s+r_{bb'})^2}{h_{fe}}(1+\frac{1}{h_{fe}})-\frac{1}{g_m^2}\}=0$$

より

$$g_m=\frac{h_{fe}\sqrt{1/(1+h_{fe})}}{R_s+r_{bb'}}\cong\frac{\sqrt{h_{fe}}}{R_s+r_{bb'}} \tag{5.310}$$

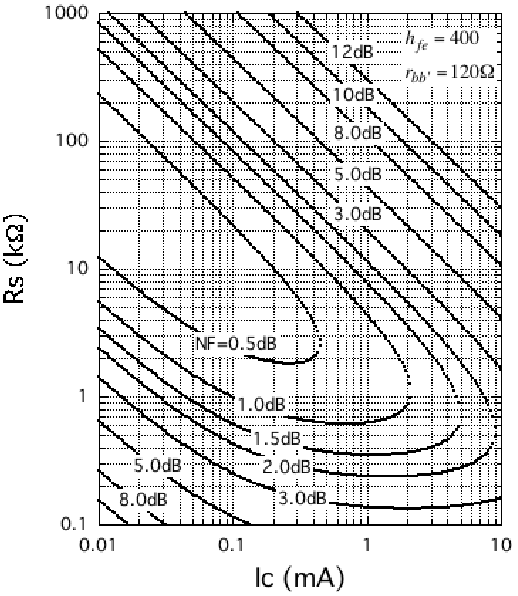
となる。信号源抵抗R_sに対してNFを最小にするg_m即ちコレクターバイアス電流は

$$I_C=\frac{kT\sqrt{h_{fe}}}{q(R_s+r_{bb'})} \tag{5.3.11}$$

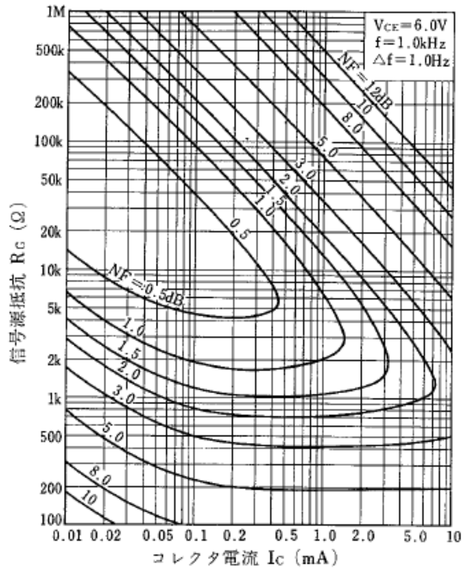
で与えられ、そのときのNFは

$$\begin{aligned}(NF)_{\min}&=1+\frac{r_{bb'}}{R_s}+\frac{R_s+r_{bb'}}{R_s}\frac{1+\sqrt{1+h_{fe}}}{h_{fe}}\\&\cong1+\frac{r_{bb'}}{R_s}+\frac{R_s+r_{bb'}}{R_s\sqrt{h_{fe}}}\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

で与えられる。これで分かるようにh_{fe} が大きいほど NF は小さくなる。(5.3.9)式において$h_{fe}=400$、$r_{bb'}=120\Omega$ として NF を計算すると、図 5-3（a）のような NF マップを得る。これは 2SC1845 のデータシートに記載されている NF マップ（図(b)）と定性的に合っている。



（a）計算値（$h_{fe}=400$、$r_{bb'}=120\Omega$）



（b）2SC1845 の NF マップ

（NEC 半導体データシートより）

図 5-3　雑音指数等高線（NF マップ）

例として、$h_{fe}=200,\quad r_{bb'}=100\Omega,\quad T=298K$とすると、(5.3.11)式より NF を最小にするコレクターバイアス電流は

$$
\begin{aligned}
R_s &= 50\Omega \quad \rightarrow \quad I_C = 2.4mA \quad (NF = 5.1dB)\\
R_s &= 1k\Omega \quad \rightarrow \quad I_C = 330\mu A \quad (NF = 0.73dB)\\
R_s &= 10k\Omega \quad \rightarrow \quad I_C = 36\mu A \quad (NF = 0.36dB)
\end{aligned}
$$

となる。実際の回路設計においては、データシートに記載されている NF マップから最適値を推定する。

以上ではトランジスターの入力換算雑音はショット雑音のみを考えたが、実際には雑音パワーが$1/f$に比例する$1/f$雑音が重畳する。また電流が大きくなると電流とともに雑音の増加が大きくなる。通常の使用条件におけるトランジスターでは$1/f$雑音とショット雑音が等しくなる周波数は数10～数100 Hzであり、これ以下の低周波領域では$1/f$雑音が主な雑音となる。観測帯域を$f_1 \sim f_2$ とすると、$1/f$雑音領域では雑音電圧の期待値は

$$v_n^2 \propto \int_{f_1}^{f_2} \frac{1}{f}\,df = \ln\frac{f_2}{f_1} \tag{5.3.13}$$

となり、原理的には DC で対数的無限大となる。実際には観測時間Tは有限であるので、周波数の下限f_1は$f_1 \sim 1/T$となる。$f_2 >> 1/T$として実効的な観測帯域幅をf_2とすると、雑音パワーはほぼ $\log(f_2)$ に比例することになるので､直流に近い領域での S/N は帯域幅を狭くしても対数的にしか改善されないので、直流に近い領域の信号を扱う場合には$1/f$雑音に十分気をつけることが必要である。(編注：$1/f$雑音の起源は分かっていない。半導体回路の場合、半導体の表面電荷の不規則な移動が原因ともいわれている。)

5-4 静電シールド及び磁気シールド

雑音で悩まされるのが、外部から電子回路に混入する外来雑音である。外来雑音は信号源と電子回路間及び電子回路間の信号伝送経路のグランド電位の違いによって混入するものがほとんどであり、このような外来雑音を抑制する信号伝送方式には、平衡型伝送方式及び電流伝送方式があるが、これらについては他の節で述べることにする。本節では、そのような方法でも除ききれない外来雑音を抑制するときによく使われる、静電シールド及び磁気シールドについての一般的な議論を行う。

よく知られているように、金属製の閉じた箱（静電シールド箱）の内部の静電ポテンシャルは一定であり、外部のポテンシャルが揺らいでも内部のポテンシャルは一様であり、電磁気的に極めて静かな環境である。このため、外来雑音を抑制するには、電子回路を金属製のシールド箱で

覆うのが効果的である。特に微小信号の信号源とそれを処理する電子回路をシールドで覆うことは日常的によく行われている。シールドが効果的であると云うことは、シールド内部から外部のポテンシャルが見えないことを意味しており、このためには理想的にはシールドに隙間がないことが望まれる。しかしながら実際には信号の入出力線や電源線の接続のために、シールドには必ず開口が必要であり、完全に閉じた箱は実際上は不可能である。そこで、シールドに開口がある場合、どの程度外部の電場が内部に浸透するかを議論してみよう。

モデルを簡単化するために、図 5-2 のように半径aの筒があるものと仮定し、穴の入口から内部へ向かう距離をzとする。穴の入口$(r,z)=(0,0)$に電荷qの点電荷を置いたとき、点電荷の発生する電場又はポテンシャルがzとともにどのように減衰するか考察する。点電荷の作る静電ポテンシャル$\phi(r,\theta,z)$はポアソン方程式

$$\nabla^2\phi(r,\theta,z)=0 \tag{5.4.1}$$

を満たすが、軸対称性

$$\partial\phi/\partial\theta=0$$

を考慮すると、ϕは(r,z)のみの関数$\phi(r,z)$となり、ポアソン方程式は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{5.4.2}$$

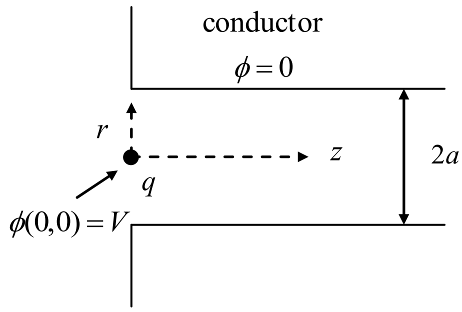


図 5-2　シールドに開いた孔の影響

となる。ここでz依存性がe^{-kz}なる解を求めると

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+k^2\phi=0 \tag{5.4.3}$$

となり、解は０次のベッセル関数で与えられる。

$$\phi(r,z)=VJ_0(kr)e^{-kz} \tag{5.4.4}$$

ここでVは点電荷の位置でのポテンシャル$\phi(0,0)=V$である。$r=a$では$\phi(a,z)=0$であることから、$J_0(ka)=0$でなければならず、$k=2.40/a,\quad 5.52/a,\quad 8.65/a,\cdots$を得る。そこで外場の減衰長を$L=1/k$で定義すると、最も長い減衰長は

$$L=a/2.40 \tag{5.4.5}$$

となる。また、$\phi(r,z)$による電場は

$$E_r=-\frac{\partial\phi}{\partial r}=kVJ_1(kr)e^{-kz},\qquad E_z=-\frac{\partial\phi}{\partial z}=kVJ_0(kr)e^{-kz},\qquad E_\theta=-\frac{\partial\phi}{\partial\theta}=0 \tag{5.4.6}$$

である。ここで$J_1(2.40)=0.52$である。したがって穴の入口（$z=0$）における外場は、zとともに $e^{-z/L}$ に比例して減衰することになる。図 5-3 に示すように、$z=3a$では $e^{-3a/L_a}=7.5\times10^{-4}$（減衰率$62.5dB$）、$z=6a$では $e^{-6a/L_a}=5.6\times10^{-7}$（減衰率$125dB$）であり、穴の深さが直径の３倍以上あれば外場は十分減衰することになる。すなわち、シールドに隙間がある場合、隙間のサイズがシールドの厚さの 1/３以上では外場が十分減衰しないため、十分なシールド効果を得

るには、隙間の深さを隙間のサイズの３倍以上とることが望まれる。磁気シールドに関してはシールド材の透磁率が十分大きければ、上記の電荷を磁荷に置き換えることで全く同じ議論が成立する。

以上はz方向に電場（又は磁場）成分を持つ静電場（又は静磁場）についての議論であるが、時間的に変化する電磁波の場合は次のようになる。図 5-3 における穴の中を伝搬するTE_{mn}モードの電磁波を考えると、穴の中の電磁波は

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= E_0 \frac{j\omega\mu}{y'_{mn}/a}\cos m\theta J'_m(\frac{y'_{mn}}{a}r)e^{jk_{mn}z} \\ E_r &= E_0 \frac{j\omega\mu m}{(y'_{mn}/a)^2}\sin m\theta \frac{1}{r} J_m(\frac{y'_{mn}}{a}r)e^{jk_{mn}z} \\ E_z &= 0 \\ H_r &= E_0 \frac{jk_{mn}}{y'_{mn}/a}\cos m\theta J'_m(\frac{y'_{mn}}{a}r)e^{jk_{mn}z} \\ H_\theta &= -E_0 \frac{jk_{mn}m}{(y'_{mn}/a)^2}\sin m\theta \frac{1}{r} J_m(\frac{y'_{mn}}{a}r)e^{jk_{mn}z} \\ H_z &= E_0 \cos m\theta J_m(\frac{y'_{mn}}{a}r)e^{jk_{mn}z} \end{aligned}\right\} \tag{5.4.7}$$

で与えられる。ここでy'_{mn}は$J'_m(x)=0$の根、k_{mn}は対応する波数

$$J'_m(y'_{mn})=0, \qquad k_{mn}=\sqrt{(\omega/c)^2-(y'_{mn}/a)^2} \tag{5.4.8}$$

である。周波数が低く自由空間での波長が穴径aより十分大きく、$\lambda >> 2\pi a/y'_{mn}$即ち

$$\omega << cy'_{mn}/a \tag{5.4.9}$$

である場合には $k_{mn}=jy'_{mn}/a$ となり、振幅減衰長は

$$L_{mn}=-1/jk_{mn}=a/y'_{mn} \tag{5.4.10}$$

で与えられる。y'_{mn}の最も小さい、すなわち減衰長の最も長いモードはTE_{11}モードであり最大減衰長は

$$(L_{mn})_{\max}=a/y'_{11}=a/1.84 \cong 0.54a \tag{5.4.11}$$

である。図 5-3 に示すように、減衰率は

$$e^{jk_{11}z}=\begin{cases} -32.2dB & (z=2a) \\ -64.3dB & (z=4a) \\ -96.5dB & (z=6a) \end{cases}$$

であり、静電場の場合より減衰長は長くなるが、穴の深さを穴径の３倍以上とす

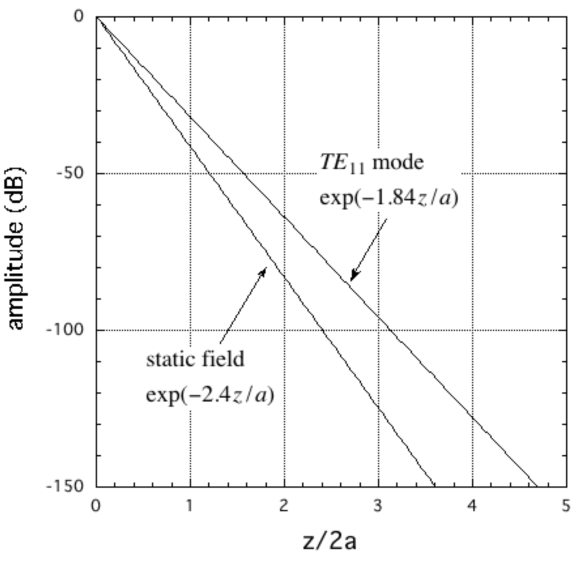


図 5-3　外場の振幅減衰

ることで、静電場の場合と同様十分な外場の減衰が期待できる。なお TM 波についても TE 波と同様TM_{01}モードの減衰
長が最も長く、長波長近（$(\omega/c) >> a$）では静電場の減衰長（(5.4.5)式）に一致する。但しTM 波の減衰長は TE 波より短いので、TE 波のみを考えれば十分である。

以上、雑音抑制のためのシールドは極力密閉箱とすること、密閉が不可能の場合は、隙間及び穴はそれらの最大サイズの「３倍」以上深さを延長することが、十分なシールド効果を期待する上で重要なポイントである。特に、金網を用いてシールドを行う場合は、１重では効果が薄いので間隔をあけて２重、３重にすると、シールド効果が劇的に向上する。なお、信号伝送に多用される同軸ケーブルは外部導体がシールドの役目を担っているが、外部導体が編組線の場合は網目の隙間のためにさほど高いシールド効果は望めない。十分なシールド効果を期待する場合は、外部導体が２重の網線層で構成されているもの、あるいは外部導体が導体テープで構成されているケーブルを選択することが肝要である。

5-5 単段増幅回路

5-5-1 エミッターフォロア

標準的なエミッター接地増幅回路を考える前に、エミッター帰還による実効的なg_m及び入力インピーダンスの変化を知るために、エミッターフォロア回路を取り上げる。エミッターフォロアはコレクター接地回路の別名であり、図 5-4(a) に示すようにエミッターにインピーダンスR_eを挿入することで、入力電圧に追随するエミッター電圧が得られることからこのように呼ばれるもので、利得１の増幅回路である。

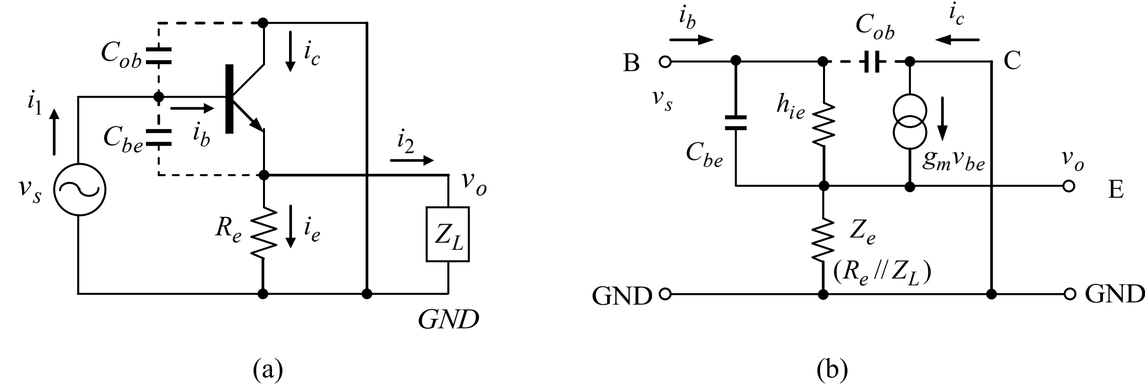


図 5-4　エミッターフォロア

図 5-4(a)は(b)図の等価回路で表され

$$\left.\begin{array}{l} i_b = (1/h_{ie} + j\omega C_{be})(v_s - v_o) + j\omega C_{ob} v_s \\ i_c = g_m (v_s - v_o) - j\omega C_{ob} v_s \\ v_o = (i_b + i_c) Z_e \end{array}\right\} \quad (5.5.1)$$

が成立する。ここでZ_eはR_eと負荷インピーダンスZ_Lの並列インピーダンス

$$Z_e = R_e // Z_L = R_e Z_L / (R_e + Z_L) \quad (5.5.2)$$

である。(5.5.1)式を解くことで

$$v_o = \frac{(1 + h_{fe} + j\omega C_{be} h_{ie}) Z_e}{h_{ie} + (1 + h_{fe} + j\omega C_{be} h_{ie}) Z_e} v_s \quad (5.5.3)$$

が得られ、v_s、v_oの関係は図 5−5 の等価回路で表わされる。

また、出力インピーダンスZ_oは

$$v_o = \frac{Z_L}{Z_o + Z_L} v_o \Big|_{Z_L = \infty} \quad (5.5.4)$$

より

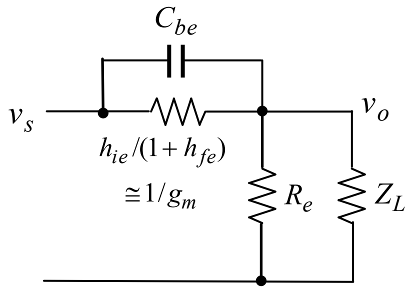


図 5−5　入出力間の等価回路

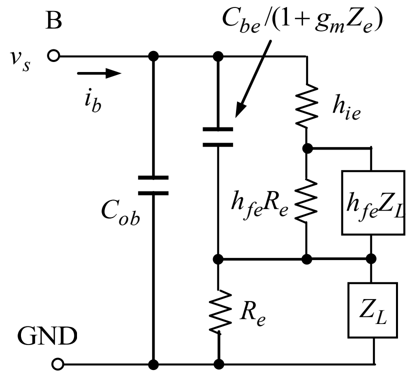


図 5−6　入力インピーダンスの等価回路

$$Z_o = Z_L \frac{v_o|_{Z_L=\infty} - v_o}{v_0}$$

$$= \frac{1}{1/R_e + (1 + h_{fe})/h_{ie} + j\omega C_{be}} \quad (5.5.5)$$

であり、図 5−5 は出力側からみた等価回路であることが分かる。更に(5.5.1)式より

$$i_b = \{\frac{1}{\dfrac{1}{1/(h_{ie} + h_{fe} Z_e) + j\omega C_{be}/(1 + g_m Z_e)} + Z_e} + j\omega C_{ob}\} v_s \quad (5.5.6)$$

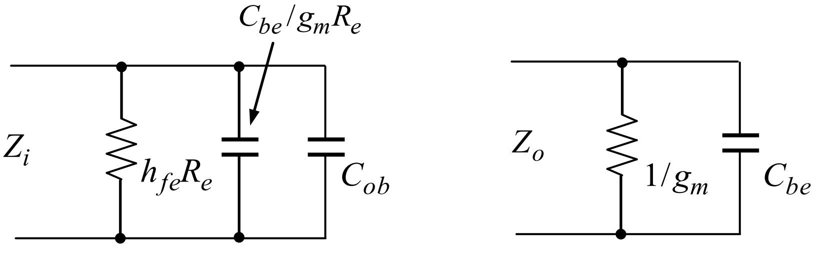
と書け、入力インピーダンスの等価回路は図 5−6 のようになる。通常は

$$h_{fe}|Z_e| >> h_{ie}, \quad g_m|Z_e| >> 1, \quad \omega C_{be}/g_m << 1$$

が成立するので

$$\left.\begin{aligned} v_o &= \left(1-\frac{1}{g_m Z_e}\right)v_s \\ \frac{1}{Z_o} &= g_m + j\omega C_{be} \\ \frac{1}{Z_i} &= \frac{1}{h_{fe}Z_e} + j\omega\frac{C_{be}}{g_m Z_e} + j\omega C_{ob} \end{aligned}\right\} \tag{5.5.7}$$

と近似され、Z_eが純抵抗（$Z_e = R_e$）の場合等価回路は図 5-7 のように近似される。



(a)　　　　　　　　　　(b)

図 5-7　(a)入力インピーダンス及び(b)出力インピーダンスの等価回路

5-5-2 エミッター接地増幅回路

最も基本的なトランジスター増幅回路として、図 5-8 に示すエミッター接地型増幅回路の設計を行う。v_sは入力信号電圧、v_oは増幅された出力信号電圧である。エミッター接地型増幅回路は全てのトランジスター増幅回路の基本であり、後に述べるアナログ IC の動作を理解するためにも、煩雑ではあるが本節及び、5-5 節、5-6 節で詳細な解析を行うことにする。

<u>バイアス回路の設計</u>

ベースバイアス電圧は電源電圧V_{cc}をR_1、R_2による分圧回路にて作り、エミッターにはバイアスの温度安定化のためにエミッター抵抗R_3を挿入する。R_4はコレクター負荷抵抗、R_Lは出力負荷抵抗である。信号はC_1を介して入力し、C_3を介して出力する。エミッターにはR_3による利

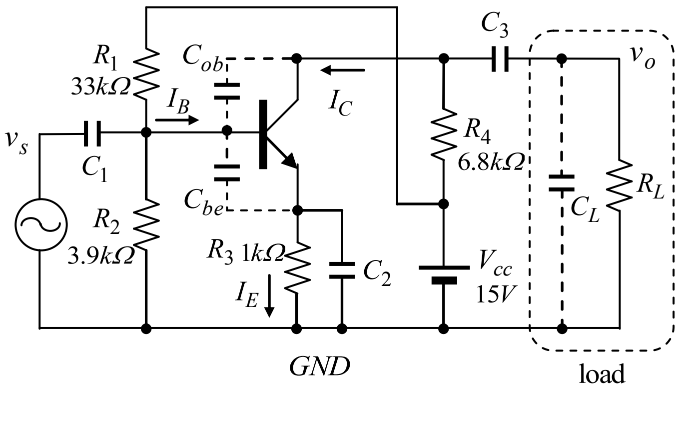


図 5-8　エミッター接地増幅回路

得の低下を避けるため、R_3に並列にC_2を接続し信号に対するエミッター回路のインピーダンスを下げている。

電源電圧V_{cc}は$15V$としよう。最初にコレクターバイアス電流I_Cを決める。ここでは雑音は考慮せず標準的に$I_C = 1mA$と仮定する。$h_{FE} >> 1$とすると、エミッター電圧は

$$V_E = (1 + 1/h_{FE}) I_C R_3 \cong I_C R_3$$

であるから、コレクター・エミッター間電圧は

$$V_{CE} = V_{cc} - (R_3 + R_4) I_C$$

であり、コレクターの信号の最大振幅は$V_{cc} - R_3 I_E$となる。そこで信号の正及び負側の振れ幅を同じ（$\pm(V_{cc} - R_3 I_E)/2$）にするためには$V_{CE} = R_4 I_C$とすればよい。3-2-6 節で考察したように、I_Cの温度安定度を

$$\partial I_C / \partial T \cong -(\partial V_{BE} / \partial T)/R_3 \sim 2\ \mu A/°C$$

程度に抑えるため、$R_3 = 1k\Omega$とする。これよりコレクター抵抗は$R_4 = (V_{cc}/I_C - R_3)/2 \ = 7k\Omega$となる。抵抗の標準系列には$7k\Omega$は存在しないので、$6.8k\Omega$ないしは$7.5k\Omega$で代用すればよい。

ベース電圧V_Bは$V_B = V_{BE} + I_C R_3$であるので、$(V_{cc} - V_B)/R_1 = I_B + V_B / R_2$より

$$R_2 = \frac{R_1 (V_{BE} + R_3 I_C)}{V_{cc} - V_{BE} - (R_3 + R_1 / h_{FE}) I_C} \tag{5.5.8}$$

を得る。ここで$R_1 << h_{FE} R_3$なるようにR_1を選ぶことで

$$R_2 / R_1 \cong (V_{BE} + R_3 I_C)/(V_{cc} - V_{BE} - R_3 I_C) \tag{5.5.9}$$

が得られる。

ここで図 5-9 にあるように、トランジスターではV_{BE}はほぼ一定で、Si トランジスターでは$V_{BE} \cong 0.6V$で近似してよい。これより$R_2 / R_1 = 0.119$となる。そこで$R_1 = 33k\Omega$とすれば、$R_2 = 3.93k\Omega \cong 3.9k\Omega$となる。ちなみに$R_1 << h_{FE} R_3$の条件を考慮すると、$h_{FE} = 100$では$R_2 = 4.04k\Omega$、$h_{FE} = 200$では$R_2 = 3.99k\Omega$となり、$h_{FE}$による違いはあまり気にしなくて良いことが分かる。

図 5-8 に記入してある抵抗値は以上の考察で決定した値である。このままではR_1、R_2による入力インピーダンスの低下が困ると云う場合には、トランジスターのh_{FE}を考慮しながらR_1、R_2の値を調整することが必要である。以上のようにバイアスを設

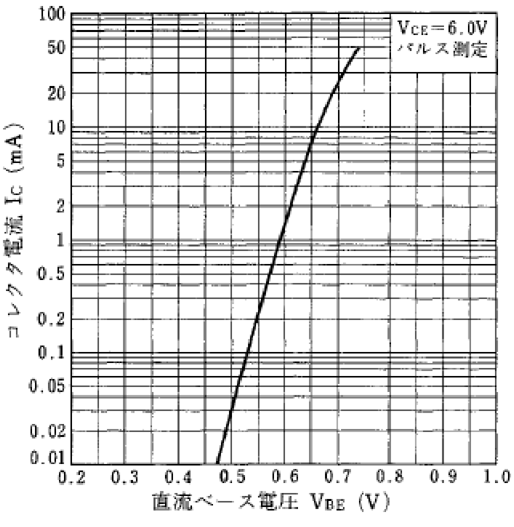


図 5-9　V_{BE}のI_C依存性（2SC1845）

定すると $g_m = qI_C/kT = 39.0mS$, $h_{fe} = 100$ より $h_{ie} = 2.57k\Omega$ となる。ここで小文字の添字は小信号に対するパラメーターであることを表わす。

ゲイン及び周波数特性の設計

低周波領域：

　考えている周波数範囲では入力容量 C_1、出力容量 C_3 のインピーダンスは十分低いものとして無視するとエミッター接地回路の基本形は図 5-10 となる。接合容量 C_{be}、C_{ob} を無視し、エミッターとグランド間のインピーダンスを Z_e とすると

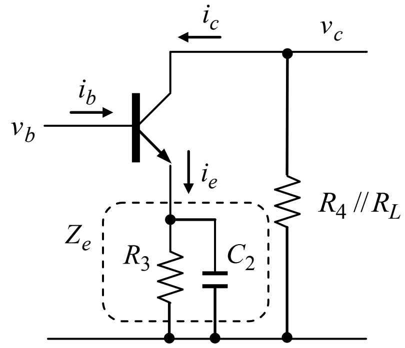


図 5-10　エミッター接地基本回路

$$\left.\begin{aligned} i_c &= g_m v_{be} \\ i_e &= (1+1/h_{fe}) i_c \\ v_b &= v_{be} + Z_e i_e \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.10)$$

より

$$v_{be} = \frac{h_{ie}}{h_{ie} + (1+h_{fe}) Z_e} v_b \qquad (5.5.11)$$

を得る。したがって入力インピーダンス Z_b は

$$\begin{aligned} Z_b &= \frac{v_b}{i_b} = \frac{v_b}{v_{be}/h_{ie}} \\ &= h_{ie} + (1+h_{fe}) Z_e \end{aligned} \qquad (5.5.12)$$

となる。また増幅度は

$$v_c = -(R_4 // R_L) i_c = A v_b \qquad (5.5.13)$$

より

$$A = -\frac{(R_4 // R_L) h_{fe}}{h_{ie} + (1+h_{fe}) Z_e} \qquad (5.5.14)$$

で与えられる。ここで図 5-10 のように

$$Z_e = \frac{R_3}{1 + j\omega C_2 R_3}$$

とすると

$$\begin{aligned} A &= -\frac{(R_4 // R_L) g_m h_{ie}}{h_{ie} + (1+h_{fe}) R_3} \frac{1 + j\omega R_3 C_2}{1 + j\omega R_3 C_2 h_{ie} / \{h_{ie} + (1+h_{fe}) R_3\}} \\ &= -\frac{(R_4 // R_L)}{R_3} \frac{1 + j\omega R_3 C_2}{1 + j\omega C_2 / g_m} \qquad (h_{fe} >> 1,\quad h_{fe} R_3 >> h_{ie}) \end{aligned} \qquad (5.5.14)$$

となる。$R_4 // R_L$はR_4とR_Lの並列抵抗値$R_4 // R_L = 1/(1/R_4 + 1/R_L)$を意味する。$Z_b$の周波数特性を描くと図 5-11(a)のようになり、その等価回路は(b)のように描ける。また、増幅度$|A|$の周波数特性は図 5-12 となる。

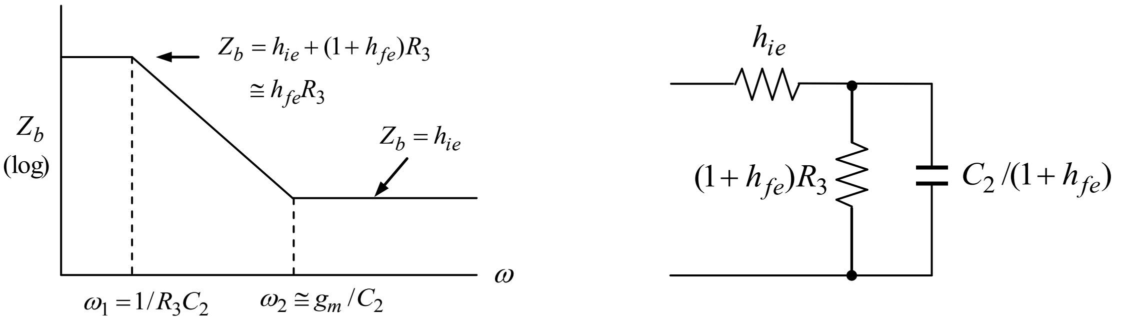


図 5-11　エミッター接地トランジスターの入力インピーダンス

$\omega < \omega_1 = 1/R_3C_2$ではエミッター回路のインピーダンスが大きくなるため、エミッター帰還により増幅度が下がるので、$\omega > \omega_2 = g_m / C_2$となるように出力結合容量$C_2$を設定することが望ましい。$\omega$の下限を

$$\omega_{\min} = 2\pi \times 100 \text{ Hz}$$

として、$\omega_{min} > \omega_2$であるためには

$$C_2 > g_m / \omega_{min} = 62 \,\mu\text{F}$$

であるので、余裕をとって$C_2 = 100 \,\mu\text{F}$とし、$\omega_2 = 2\pi \times 62 \text{ Hz}$とする。また、コレクター電圧と負荷電圧の関係は

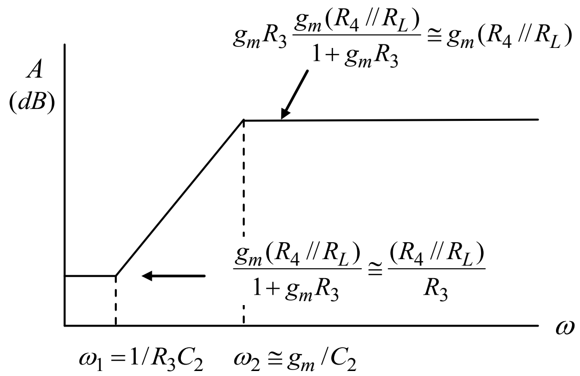


図 5-12　エミッター接地回路の増幅度

$$v_L = -\frac{j\omega C_3(R_4 + R_L)}{1 + j\omega C_3(R_4 + R_L)}(R_4 // R_L)i_c \tag{5.5.15}$$

となることから、出力コンデンサーの容量C_3は

$$\omega_{min} > \omega_3 = 1/C_3(R_4 + R_L) \tag{5.4.16}$$

を満たす必要がある。例えば$R_L = 10 \text{ k}\Omega$とすると$C_3 > 0.095 \,\mu\text{F}$となる。さらに入力コンデンサー$C_1$については

$$\omega_{min} > 1/C_1(h_{ie} // R_1 // R_2) \tag{5.5.17}$$

であることが必要であり、$h_{ie} // R_1 // R_2 = 1.48 k\Omega$より$C_1 > 1.1 \,\mu\text{F}$となる。

高周波領域：

周波数が高い領域では、C_2やC_3のインピーダンスは無視できる程度に十分低いものとし、また低周波領域では無視した接合容量C_{be}、C_{ob}を考慮する必要がある。１段増幅回路のゲイン及び入出力インピーダンスは多段増幅回路の基礎となるので、詳細に考察しておく。

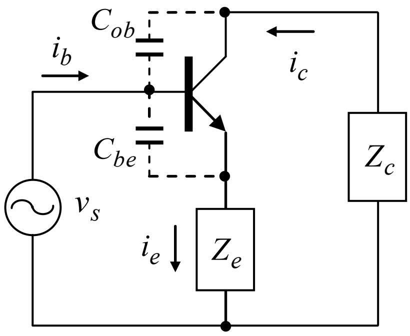


図 5-13　(5.5.19)式の等価回路

$$\left.\begin{aligned} Z_L &= \frac{1}{1/R_L + j\omega C_L} \\ Z_c &= (R_4 /\!/ Z_L) \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.18)$$

と置くと、回路方程式は次のようになる（図 5-3 参照)。

$$\left.\begin{aligned} i_b &= v_{be}/h_{ie} + j\omega C_{be} v_{be} + j\omega C_{ob}(v_b - v_c) \\ i_c &= g_m v_{be} - j\omega C_{ob}(v_b - v_c) \\ i_e &= i_b + i_c \\ v_b &= v_{be} + Z_e i_e \\ v_c &= -Z_c i_c \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.19)$$

これよりゲインA及び入力インピーダンスZ_{in}は

$$v_c = -A v_b$$

$$A = Z_c \frac{h_{fe}}{h_{ie} + (1+h_{fe})Z_e} \frac{1 - j\omega C_{ob}\{1/g_m + (1+1/h_{fe})Z_e + j\omega C_{be} Z_e/g_m\}}{\{1 + j\omega C_{be}/(1/Z_e + g_m(1+1/h_{fe}))\}(1 + j\omega C_{ob} Z_c)} \qquad (5.5.20)$$

$$Z_{in} = \frac{v_b}{i_b} = \frac{h_{ie} + (1+h_{fe})Z_e + j\omega C_{be} h_{ie} Z_e}{1 + j\omega C_{be} h_{ie} + j\omega C_{ob}(1+A)\{h_{ie} + Z_e(1 + j\omega C_{be} h_{ie} + h_{fe})\}} \qquad (5.5.21)$$

となる。また出力インピーダンスをZ_oとすると

$$v_c = \frac{Z_L}{Z_o + Z_L} v_c\big|_{Z_L=\infty}$$

より、Z_oは

$$Z_o = Z_L \frac{v_c\big|_{Z_L=\infty} - v_c}{v_c}$$

$$= Z_L\left(\frac{A\big|_{Z_L=\infty}}{A} - 1\right)$$

より

$$Z_o = \frac{1}{1/R_4 + j\omega C_{ob}} \qquad (5.5.22)$$

となる。$Z_e = 0$の場合は

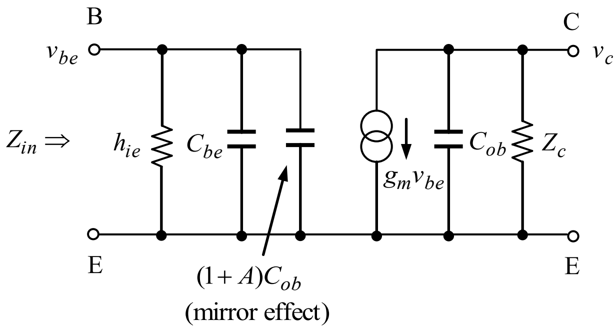


図 5-14　C_{ob}を考慮した等価回路

$$A = g_m Z_c \frac{1 - j\omega C_{ob}/g_m}{1 + j\omega C_{ob} Z_c} \tag{5.5.23}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{1/h_{ie} + j\omega\{C_{be} + (1+A)C_{ob}\}} \tag{5.5.24}$$

となり、Z_oは変わらない。ここで$g_m = 39.0mS$、$C_{ob} = 2pF$では$1/(C_{ob}/g_m) = \ 2\pi \times 3.1GHz$となるので、通常の周波数領域（$\omega < 1/(C_{ob}/g_m)$）では(5.4.23)式右辺の分子の$j\omega C_{ob}/g_m$は無視できる。(5.5.22)、(5.5.23)、(5.5.24)式よりC_{ob}を考慮したトランジスターの等価回路は図 5-14 となる。なお一般にAは複素数であるので、ミラー容量$(1+A)C_{ob}$は周波数によって抵抗やインダクタンスとなることがあるので注意が
必要である。

次に、次節で必要になるZ_eが純抵抗の場合を考える。

$$\left.\begin{aligned} &Z_e = R_e \\ &h_{fe}\ (= g_m h_{ie}) >> 1 \\ &g_m R_e >> 1 \end{aligned}\right\} \tag{5.5.25}$$

では、(5.5.20)式は次のようになる。

$$A = \frac{Z_c}{R_e} \frac{1 - j\omega C_{ob} R_e (1 + j\omega C_{be}/g_m)}{(1 + j\omega C_{be}/g_m)(1 + j\omega C_{ob} Z_c)} \tag{5.5.26}$$

$$Z_{in} = \frac{h_{fe} Z_e (1 + j\omega C_{be}/g_m)}{1 + j\omega\{C_{be} h_{ie} + C_{ob}(1+A) R_e h_{fe}\} - \omega^2 C_{ob}(1+A) C_{be} h_{ie} R_e} \tag{5.5.27}$$

図 5-15 に$Z_e = 0$及び$Z_e = R_e$の場合のゲインA及び入力インピーダンスZ_{in}を示す。トランジスターには 2SC1845 を想定し、以下のパラメータを仮定した。

$$\left.\begin{aligned} &I_C = 1.0mA,\quad h_{fe} = 200\ ,\quad C_{ob} = 2.0pF,\quad g_m = qI_C/kT = 38.7mS \\ &h_{ie} = h_{fe}/g_m = 5.2k\Omega,\quad f_T = 100HMz,\quad C_{be} = 1/(2\pi f_T h_{ie}) = 61.6pF \\ &R_e = 0\Omega,\quad R_4 = 6.8\ k\Omega,\quad R_L = \infty,\quad C_L = 20pF \end{aligned}\right\} \tag{5.5.28}$$

図中のω_1 、ω_2 、ω_3 は(5.4.23)式、(5.4.24)式より

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1 = \frac{1}{\{1 + g_m (R_4 // R_L)\} C_{ob} h_{ie}} = 2\pi \times 58kHz \\ &\omega_2 = \frac{1}{C_L (R_4 // R_L)} = 2\pi \times 1.17MHz \\ &\omega_3 = \frac{g_m C_{ob}}{C_{be}(C_{ob} + C_L)} \approx \frac{g_m C_{ob}}{C_{be} C_L} = 2\pi \times 10MHz \end{aligned}\right\} \tag{5.4.29}$$

で与えられ、各周波数領域における近似形は以下のようになる。

$\omega < \omega_1$：

$$A = g_m(R_4 // R_L) = 263(48.4dB)$$
$$Z_c = (R_4 // R_L) = 6.8k\Omega$$
$$Z_{in} = h_{ie} = 5.2k\Omega$$

$\omega_1 < \omega < \omega_2$：

$$A = g_m Z_c \frac{1}{1 + j\omega C_{ob} Z_c} \approx \frac{g_m}{j\omega(C_{ob} + C_L)}$$
$$Z_c = \frac{(R_4 // R_L)}{1 + j\omega C_L (R_4 // R_L)} \approx \frac{1}{j\omega C_L}$$
$$Z_{in} \approx \frac{1/(g_m C_{ob} / C_L)}{1 + j\omega C_{be} C_L / (g_m C_{ob})}$$
$$(C_{be} >> C_{ob},\quad C_L >> C_{ob})$$

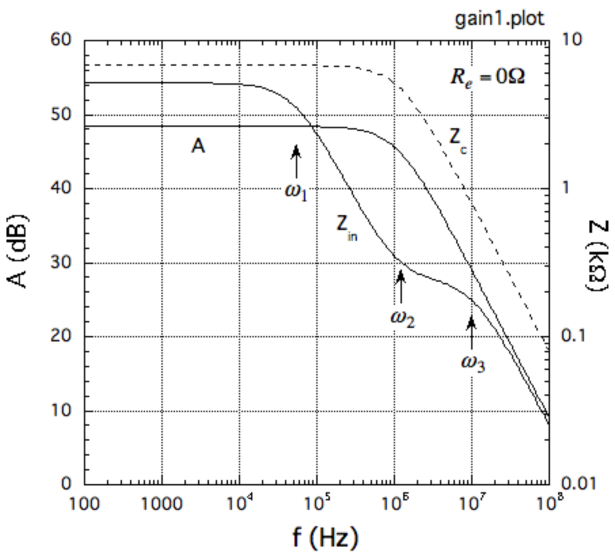


図 5-15　ゲイン及び入出力インピーダンス

$\omega_2 < \omega < \omega_3$：

$$A \approx \frac{g_m}{j\omega(C_{ob} + C_L)}$$
$$Z_c \approx \frac{1}{j\omega C_L}$$
$$Z_{in} \approx \frac{h_{ie}}{1 + j\omega(C_{be} + C_{ob})h_{ie}} \approx \frac{h_{ie}}{1 + j\omega C_{be} h_{ie}}$$

この領域ではAの位相がほぼ$-90°$となるので、ミラー効果によるC_{ob}のインピーダンス$1/j\omega C_{ob} A$は抵抗性となる。

$\omega > \omega_3$：

$$A \approx \frac{g_m}{j\omega(C_{ob} + C_L)}, \qquad Z_c \approx \frac{1}{j\omega C_L}, \qquad Z_{in} \approx \frac{1}{j\omega C_{be}}$$

以上の結果をプロットしたものが図 5-15 である。

$Z_e = R_e$（純抵抗）の場合、$h_{fe} R_e >> h_{ie}$とすると(5.5.26)式、(5.5.27)式より

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{(R_4 // R_L)/R_e}{(1 + j\omega/\omega_2)(1 + j\omega C_{be}/g_m)} \quad (C_{ob} << C_L) \\ &\approx \frac{(R_4 // R_L)/R_e}{1 + j\omega/\omega_2} \quad (1/(C_{be}/g_m) = 2\pi \times 100MHz) \end{aligned} \tag{5.5.30}$$

$\omega < \omega_2$:

$$Z_{in} \approx \frac{h_{fe} R_e}{1 + j\omega/\omega_1} \tag{5.5.31}$$

$\omega > \omega_2$:

$$Z_{in} \approx \frac{C_L R_e}{C_{ob}} \frac{1}{1 + j\omega/\omega_3} \tag{5.5.32}$$

となり、結果をグラフにすると図 5-16 のようになる。

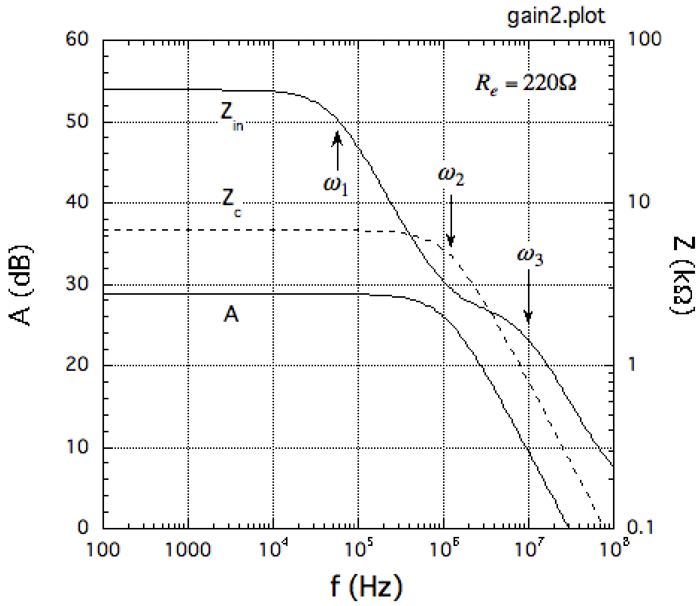


図 5-16　ゲイン及び入出力インピーダンス

（$R_e \neq 0$、$R_L = \infty$）

5-6　２段直結型増幅回

前節で述べた１段増幅回路では、トランジスターの指数関数的特性のために、信号振幅の大きいときには非線形歪みが無視できない。これらの欠点を補うために通常の増幅回路では２段以上の増幅回路で大きなゲインを実現し、それに負帰還をかけて所定のゲインを得るように設計される。増幅度はトランジスター等のパラメーターに依存しないで、負帰還ループの定数だけで決定されるので、安定で線形性の良い特性を実現することができる。

そこで 1970 年代後半から 1980 年代のオーディオ帯域のアンプで、標準回路として多用された図 5-17 に示す２段増幅回路を考える。

バイアス回路の設計

使用するトランジスターは 2SC1845 とし、初段及び２段目の h_{fe} を $h_{fe1} = h_{fe2} = 200$ と仮定する。回路中の時定数が増えると、周波数特性関数の次数が上がって複雑になるので、初段のコレクター出力と２段目のベース入力の間は結合コンデンサーを省略して直結とする。２段増幅にすることで 10^3 (60 dB) 以上の増幅度を得ることができ、出力から初段のエミッターへ負帰還をかけることで精度よく所定のゲインに設定することができる。このような直結増幅回路では直流ゲインが極めて大きく、電源電圧変動や温度変動等によるバイアスの変動が大きくなるので動作点の安定化が必要である。そこで動作点を安定化するために、R_1 を通して２段目のエミッターから初段のベースにバイアスをかけることで、直流的な負帰還をかけてバイアスの安定化を図っている。

トランジスターの場合は、信号源インピーダンスにより初段の雑音指数を最小にするバイアス電流は大きく変わるので、信号源インピーダンスを想定する必要がある。ここでは信号源インピーダンスとして $R_s = 1\,\mathrm{k}\Omega$ を仮定することにする。初段の雑音指数を最小にするコレクターバイアス電流は、$r_{bb'} = 100\,\Omega$ と仮定すると (5.2.9) 式より

$$I_{C1} = kT\sqrt{h_{fe1}}/qR_s$$
$$= 0.33mA$$

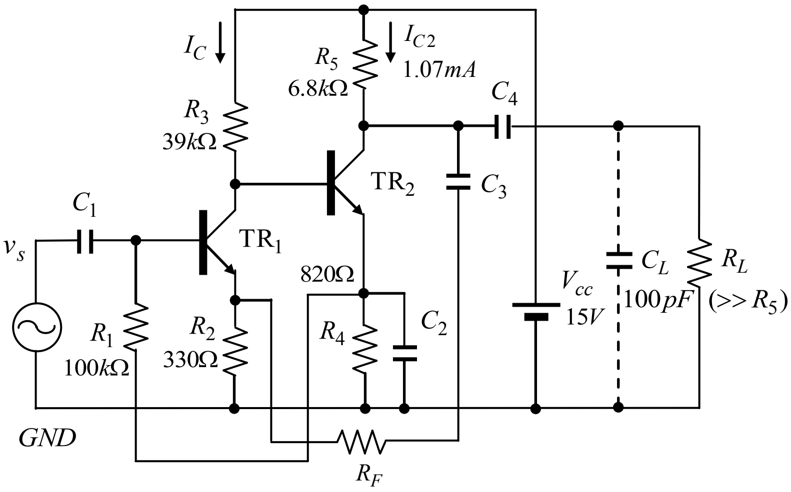


図 5-17　２段直結増幅回路

となり、雑音指数は $(NF)_{min} \cong 1.18\ (0.73dB)$ となる。I_{C1} をこのように決めると、初段のベース電圧は $V_{B1} = (1+1/h_{FE1})R_2 I_{C1} + V_{BE1}$ で与えられ、$V_{BE1} \cong 0.6V$ より $V_{B1} = 0.71V$ となる。したがって $R_1 = 100k\Omega$ とすると、初段のベースバイアスを与えるに必要な２段目のエミッター電圧は $V_{E2} = V_{B1} + R_1 I_{C1}/h_{FE1} = 0.88V$ となる。そこで２段目のエミッター抵抗を $R_4 = 820\,\Omega$ とすれば、必要なコレクターバイアス電流は $1/h_{FE2} << 1$、$I_{C1}/h_{FE1} << I_{C1}$ より $I_{C2} = 1.07mA$ と近似される。従って２段目のベース電圧 V_{B2}、即ち１段目のコレクター電圧は $V_{B2} \cong V_{BE2} + V_{E2}$ $\cong 1.48V$ となり、$R_3 = (V_{cc} - V_{B2})/(I_{C1} + I_{C2}/h_{FE2}) = 40k\Omega$ となるので $R_3 = 39k\Omega$ で代用する。更に、２段目のコレクター電圧のスイング範囲は約 $1V$（エミッター電圧）から $V_{cc} = 15V$（電源電圧）までであるので、その中点にコレクター電圧を設定するものとして $V_{C2} = 8V$ になるようコレクター抵抗 R_5 を決めると $7\,\mathrm{k}\Omega$ になるが、抵抗値の標準系列から近い抵抗を選んで $R_5 = 6.8k\Omega$、$V_{C2} = 7.7V$ とする。

バイアスの安定性

以上で決定した回路のバイアス安定性を調べてみる。TR_1 及び TR_2 のベース・エミッター間接合電圧 V_{BE} の変化分をそれぞれ ΔV_{BE1}、ΔV_{BE2} とすると、直流等価回路は図 5-18 のように表され、直流における回路方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{A_{10}}{R_{c1}}(v_{b1}+\Delta V_{BE1})+\frac{v_{c1}}{R_3}+\frac{v_{c1}+\Delta V_{BE2}}{h_{ie2}+h_{fe2}R_4}=0\\&v_{b1}=A_{20}\frac{R_4}{R_5}(v_{c1}+\Delta V_{BE2})-R_1\frac{(A_{20}R_4/R_5)(v_{c1}+\Delta V_{BE2})+\Delta V_{BE1}}{R_1+h_{ie2}+h_{fe2}R_4}\\&v_{c2}=-A_{20}(v_{c1}+\Delta V_{BE2})\end{aligned}\right\} \tag{5.6.1}$$

で与えられる。

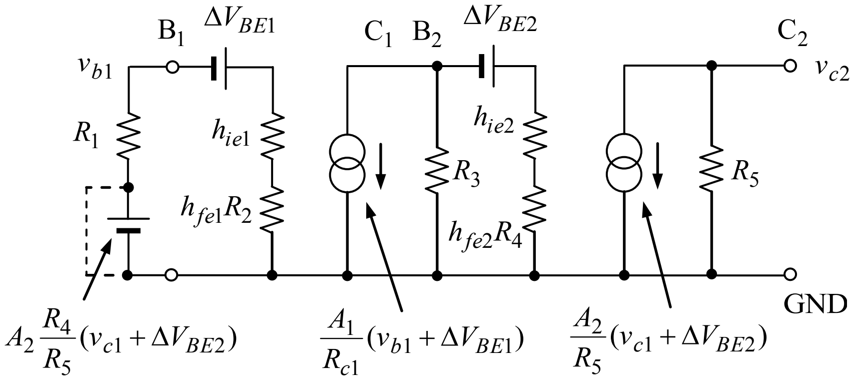


図 5-18　２段直結増幅回路のバイアス安定性解析

ここで

$$\left.\begin{aligned}&A_{10}=\frac{g_{m1}R_{c1}}{1+g_{m1}R_2},\quad A_{20}=\frac{g_{m2}R_5}{1+g_{m2}R_4}\\&\frac{1}{R_{c1}}=\frac{1}{R_3}+\frac{1}{h_{ie2}+h_{fe2}R_4}\end{aligned}\right\} \tag{5.5.2}$$

である。

(5.6.1)式を解くことで

$$\begin{aligned}&\{1+A_{10}A_{20}\frac{R_4}{R_5}\frac{(h_{ie2}+h_{fe2}R_4)}{(R_1+h_{ie2}+h_{fe2}R_4)}\}v_{c2}\\&=A_{10}A_{20}\frac{(h_{ie2}+h_{fe2}R_4)}{(R_1+h_{ie2}+h_{fe2}R_4)}\Delta V_{BE1}+A_{20}\frac{R_{c1}-h_{ie2}-h_{fe2}R_4}{h_{ie2}+h_{fe2}R_4}\Delta V_{BE2}\end{aligned} \tag{5.6.3}$$

が得られる。このままでは見通しが悪いので

$$\left.\begin{aligned}&A_{20}R_4/R_5\cong 1,\quad R_{c1}/A_{10}\cong R_2\\&h_{ie2}<<h_{fe2}R_4,\quad R_{c1}<<h_{fe2}R_4\end{aligned}\right\} \tag{5.6.4}$$

を用いて近似すると

$$v_{c2}=\frac{R_5}{R_4}\Delta V_{BE1}-\frac{R_2R_5}{R_{c1}R_4}(1+\frac{R_1}{h_{fe2}R_4})\Delta V_{BE2} \tag{5.5.5}$$

となる。これに数値を代入すると

$$v_{c2}=8.29\Delta V_{BE1}-0.139\Delta V_{BE2} \tag{5.6.6}$$

従って、$\Delta V_{BE}\cong-2mV/°C$とすると、２段目コレクターバイアス電圧の変動は$v_{c2}\cong-17mV/°C$となる。この程度ならば 50℃程度の温度変化に対しても、コレクター電圧の変動は 1V 以下であり、増幅器としての動作に支障を来すことはない。なお以下の数値

$$\left.\begin{aligned}&h_{fe1}=h_{fe2}=200\\&I_{C1}=0.33mA,\quad I_{C2}=1.07mA\\&g_{m1}=12.9mS,\quad g_{m2}=41.7mS,\quad h_{ie1}=15.5k\Omega,\quad h_{ie2}=4.80k\Omega\\&R_1=100k\Omega,\quad R_2=330\Omega,\quad R_3=39k\Omega,\quad R_4=820\Omega,\quad R_5=6.8k\Omega\end{aligned}\right\} \tag{5.6.7}$$

$$\left.\begin{aligned}&R_{c1}=\frac{1}{1/R_3+1/(h_{ie2}+h_{fe2}R_4)}=31.7k\Omega\\&A_{10}=\frac{g_{m1}R_{c1}}{1+g_{m1}R_2}=77.8,\quad A_{20}=\frac{g_{m2}R_5}{1+g_{m2}R_4}=8.06\end{aligned}\right\} \tag{5.6.8}$$

を(5.6.3)式に代入すると

$$v_{c2}=8.12\Delta V_{BE1}-0.135\Delta V_{BE2} \tag{5.6.9}$$

となり、(5.6.5)式は良い近似であることが分かる。

以上のバイアス安定性は、２段目のエミッターからR_1を介して１段目のベースバイアスをかけていることによるものであり、これをせずにR_1を介して固定電圧からバイアスをかけるものとすると、図 5−18 の破線に示す接続となる。この場合の回路方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{A_{10}}{R_{c1}}(v_{b1}+\Delta V_{BE1})+\frac{v_{c1}}{R_3}+\frac{v_{c1}+\Delta V_{BE2}}{h_{ie2}+h_{fe2}R_4}=0\\&v_{b1}=-R_1\frac{\Delta V_{BE1}}{R_1+h_{ie2}+h_{fe2}R_4}\\&v_{c2}=-A_{20}(v_{c1}+\Delta V_{BE2})\end{aligned}\right\} \tag{5.6.10}$$

となり

$$\begin{aligned}v_{c2}&=\frac{R_5}{R_4}\left(\frac{R_3}{R_2}\frac{h_{fe2}R_4}{R_1+h_{fe2}R_4}\Delta V_{BE1}-\Delta V_{BE2}\right)\\&=609\Delta V_{BE1}-8.3\Delta V_{BE2}\end{aligned} \tag{5.6.11}$$

を得る。この場合は(5.6.5)式に比べて約 75 倍のΔV_{BE1}、ΔV_{BE2}依存性となる。２段目コレクター電圧の変動は$v_{c2}\cong-1.2V/°C$となり、10℃程度の温度変化があるとトランジスターが飽和またはカットオフとなって動作不能になってしまうため、バイアス安定化は不可欠である。

増幅度及び周波数特性の設計

話をいたずらに煩雑にしないために、２段目のエミッター回路の容量C_2は十分大きく、信号に対するインピーダンスは無視できるものとし、信号解析ではR_4, C_2を無視することにする。また、負荷容量C_Lは周波数特性に大きく影響するが、ここでは$C_L = 100pF$と仮定しておく。最初に、周波数特性の評価に必要なパラメータを仮定する。$I_C = 1mA$におけるf_Tが$100MHz$のトランジスターを用いるものとし、$f_T \propto \sqrt{I_C}$を仮定（3.2 節参照）すると

$$f_{T1} = 57MHz, \quad f_{T2} = 103MHz$$

となり、また$C_{be} = g_m / 2\pi f_T$より

$$C_{be1} = 35.4pF, \quad C_{be2} = 63.7pF$$

となる。さらにC_{ob}については

$$C_{ob1} = C_{ob2} = 2pF$$

と仮定する。以上で得た回路定数を以下にまとめる。

$$\left.\begin{aligned}
&h_{fe1} = h_{fe2} = 200, \quad I_{C1} = 0.33mA, \quad I_{C2} = 1.07mA \\
&g_{m1} = 12.9mS, \quad g_{m2} = 41.4mS, \quad h_{ie1} = 15.7k\Omega, \quad h_{ie2} = 4.80k\Omega \\
&R_1 = 100k\Omega, \quad R_2 = 330\Omega\,(R_{e1}) \quad R_4 = 820\Omega \\
&R_3 = 39k\Omega\,(R_{c1}), \quad R_5 = 6.8k\Omega\,(R_{c2}) \\
&C_{be1} = 35.4pF, \quad C_{be2} = 63.7pF, \quad C_{ob1} = C_{ob2} = 2pF
\end{aligned}\right\} \tag{5.6.12}$$

２段目のエミッター回路のバイパス容量C_2は十分大きく信号に対しては十分小さいインピーダンスであるとして、エミッター回路インピーダンスを無視すると、２段増幅回路の等価回路は図 5-19 のように書ける。

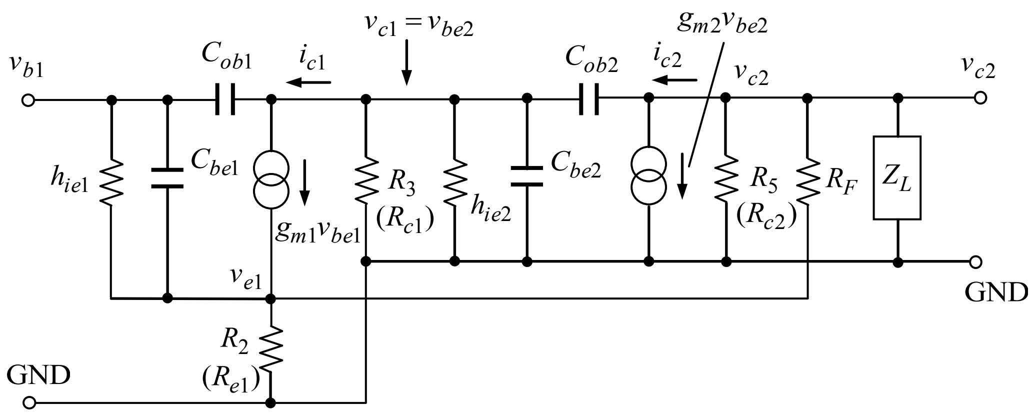


図 5-19　２段直結エミッター接地増幅回路の等価回路

図 5-19 の初段の回路方程式は

$$\left.\begin{aligned}
&i_{b1} = (1/h_{ie1} + j\omega C_{be1})v_{be1} + j\omega C_{ob1}(v_{b1} - v_{c1}) \\
&i_{c1} = g_{m1}v_{be1} - j\omega C_{ob1}(v_{b1} - v_{c1}) \\
&v_{b1} = v_{be1} + v_{e1} \\
&v_{e1} = R_{e1}\{i_{b1} + i_{c1} + (v_{c2} - v_{e1})/R_F\} \\
&v_{c1} = -Z_{c1}i_{c1}
\end{aligned}\right\} \tag{5.6.13}$$

２段目については

$$\left.\begin{aligned}
&i_{b2} = (1/h_{ie2} + j\omega C_{be2})v_{be2} + j\omega C_{ob2}(v_{be2} - v_{c2}) \\
&i_{c2} = g_{m2}v_{be2} - j\omega C_{ob2}(v_{be2} - v_{c2}) \\
&v_{c2} = -Z_{c2}\{i_{c2} + (v_{c2} - v_{e1})/R_F\} \\
&v_{be2} = v_{c1}
\end{aligned}\right\} \tag{5.6.14}$$

で与えられるが、(5.6.13)、(5.6.14)式を厳密に解くことは極めて煩雑になるので、$\omega < 2\pi f_T$として近似解（$\omega C_{ob1}/g_{m1}$、$\omega C_{ob2}/g_{m2}$を無視した解）を求めることにする。(5.6.13)より初段のエミッター電圧は

$$v_{e1} = \frac{g_{m1}R_{e1}v_{b1} + v_{c2}R_{e1}/R_F}{1 + g_{m1}R_{e1} + R_{e1}/R_F} \tag{5.6.15}$$

となる。これより初段のコレクター電圧v_{c1}、即ち２段目のベース入力電圧v_{be2}は

$$v_{be2} = -\frac{Z_{c1}g_{m1}(1 + R_{e1}/R_F)}{(1 + g_{m1}R_{e1} + R_{e1}/R_F)(1 + j\omega C_{ob1}Z_{c1})}(v_{b1} - \frac{R_{e1}}{R_F + R_{e1}}v_{c2}) \tag{5.6.16}$$

で与えられる。これを(5.6.14)式に代入して、２段目のコレクター出力電圧v_{c2}は次のように求まる。

$$v_{c2} = A(\omega)(\alpha v_{b1} - \beta v_{c2}) \tag{5.6.17}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
&A(\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega) \\
&A_1(\omega) = \frac{g_{m1}Z_{c1}}{(1 + j\omega C_{ob1}Z_{c1})\{1 + g_{m1}(R_{e1} /\!/ R_F)\}} \\
&A_2(\omega) = \frac{g_{m2}(Z_{c2} /\!/ R_F)}{1 + j\omega C_{ob2}(Z_{c2} /\!/ R_F)} \\
&\alpha = 1 + \frac{R_{e1}(1 + j\omega C_{ob1}Z_{c1})}{g_{m2}Z_{c1}(R_F + R_{e1})} \cong 1 \\
&\beta = \frac{R_{e1}}{R_F + R_{e1}}(1 - \frac{1 + j\omega C_{ob1}Z_{c1}}{g_{m2}Z_{c1}g_{m1}R_F}) \cong \frac{R_{e1}}{R_F + R_{e1}}
\end{aligned}\right\} \tag{5.6.18}$$

である。したがって

$$v_{c2} = A(\omega)(v_{b1} - \frac{R_{e1}}{R_F + R_{e1}}v_{c2}) \tag{5.6.19}$$

と近似でき、$A(\omega)$は開ループゲイン

$$\beta = \frac{R_{e1}}{R_F + R_{e1}} \tag{5.6.20}$$

は帰還率であることが分かる。$A_1(\omega)$は初段のゲイン、$A_2(\omega)$は２段目のゲイン、Z_{c1} 、Z_{c2} はそれぞれ初段及び２段目のコレクター回路のインピーダンスである。ミラー効果を考慮することで２段目のベース入力インピーダンス$Z_{b2} = v_{be2}/i_{b2}$は

$$\frac{1}{Z_{b2}} = \frac{1}{h_{ie2}} + j\omega\{C_{be2} + (1 + A_2(\omega))C_{ob2}\} \tag{5.6.21}$$

で与えられ、$Z_{c1} = R_3 // Z_{b2}$は

$$\frac{1}{Z_{c1}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{h_{ie2}} + j\omega\{C_{be2} + (1 + A_2(\omega))C_{ob2}\} \tag{5.6.22}$$

となる。ここで$C_{ob2}A_2(\omega)$は２段目のミラー容量である（但し$A_2(\omega)$は複素数なので純容量ではない）。また負荷インピーダンスZ_Lが抵抗R_Lと容量C_Lの並列インピーダンスから成るものとすると、Z_{c2}は

$$\frac{1}{Z_{c2}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_L} + j\omega C_L \tag{5.6.23}$$

で与えられる。以上で求めた開ループゲインにより閉ループ応答は

$$\left.\begin{aligned} &v_{c2} = G(\omega)v_{b1} \\ &G(\omega) = \frac{A(\omega)}{1 + \beta A(\omega)} \\ &\beta = \frac{R_{e1}}{R_F + R_{e1}} \end{aligned}\right\} \tag{5.6.24}$$

となる。$G(\omega)$は閉ループゲインである。

　ここで周波数が十分低い領域のゲインを求めると

$$\left.\begin{aligned} &A_1(0) = \frac{g_{m1}(R_3 // h_{ie2})}{1 + g_{m1}(R_{e1} // R_F)} = 10.6\ (20.5dB) \\ &A_2(0) = g_{m2}(R_5 // R_F // R_L) = 221\ (46.9dB) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{for } R_L = 100k\Omega) \\ &A(0) = 2336\ (67.4dB) \end{aligned}\right\} \tag{5.6.25}$$

であり、２段目のベース入力インピーダンスが比較的低いことから１段目の実効的なコレクター負荷インピーダンスが小さいので、１段目に比べて２段目の利得が圧倒的に大きく、増幅度の大半は２段目で得ている。この状況は一般のオペアンプ IC においても同様である。例として

$$R_F = 33\,\mathrm{k\Omega},\quad R_L = 100\,\mathrm{k\Omega},\quad C_L = 100\,\mathrm{pF} \tag{5.6.26}$$

とした場合の、(5.6.16)、(5.6.20)式のゲイン及び (5.6.21)式のゲイン及びインピーダンスを図示すると図 5-20、図 5-21 のようになる。

初段のゲインは初段のコレクター回路のインピーダンスZ_{c1}に比例するので、5-5-2 節の単段エミッター接地増幅回路と同様

$$\omega_1 = 2\pi \times 74.4\,\text{kHz}, \quad \omega_2 = 2\pi \times 292\,\text{kHz}, \quad \omega_1 = 2\pi \times 2.03\,\text{MHz}$$

なる周波数で図 5-20、5-21 に見られるような変曲点を持つ（注参照）。閉ループが安定な領域はω_3までであり、閉ループ利得の安定領域の広さはスタガー比

$$\omega_3 / \omega_1 \propto 1/(2\pi f_{T2}(C_{ob2} + C_L)) \tag{5.6.27}$$

で与えられる。これより閉ループの安定領域は負荷容量C_Lに大きく影響されることが分かる。

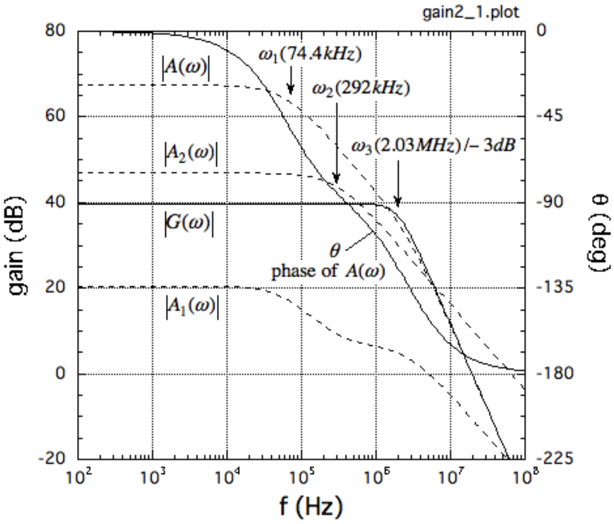


図 5-20　２段直結増幅回路のゲイン

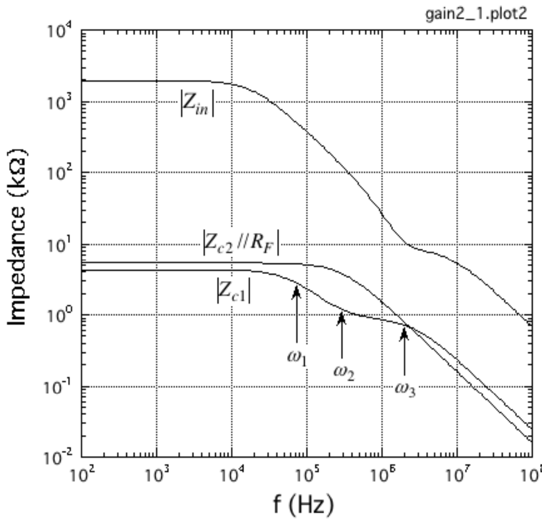


図 5-21　２段直結増幅回路のインピーダンス

注：

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{\{C_{ob1} + C_{ob2} + g_{m2}(R_5 // R_L // R_F)C_{ob2}\}h_{ie2}} \\
\omega_2 &= \frac{1}{(C_{ob2} + C_L)(R_5 // R_L // R_F)} \\
\omega_3 &= \frac{g_{m2}C_{ob2}}{C_{be2}(C_{ob2} + C_L)}
\end{aligned}\right\}$$

一方２段目のコレクター回路のインピーダンスZ_{c2}は周波数ω_2をカットオフとする減衰特性を持つので、２段目のゲイン$A_2(\omega)$はω_2をカットオフとして$-6dB/oct$（$1/\omega$に比例）で減衰する遮断特性を持つ。これよりオープンループゲイン

$$A(\omega)=A_1(\omega)A_2(\omega) \tag{5.6.29}$$

は$\omega_1<\omega<\omega_3$で$-6dB/oct$、$\omega_3<\omega$では$-12dB/oct$なる減衰率で周波数とともに減衰する。即ちω_1が第１ポール、ω_3が第２ポールとなり、フィードバックループが安定であるためには閉ループゲイン$G(\omega)$は

$$|G(\omega)|>|A(\omega_3)|=35dB \tag{5.6.30}$$

でなければならない。従って閉ループの最大平坦領域はω_3までである。

増幅器としての入力インピーダンスZ_{in}は

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_{in}}&=\frac{i_{b1}}{v_{b1}}\\&=(\frac{1}{h_{ie1}}+j\omega C_{be1})\frac{1+(1-G(\omega))R_{e1}/R_F}{1+g_{m1}R_{e1}+R_{e1}/R_F}\\&\quad+j\omega C_{ob1}[1+\frac{Z_{c1}\{g_{m1}(1+(1-G(\omega))R_{e1}/R_F)-j\omega C_{ob1}(1+g_{m1}R_{e1}+R_{e1}/R_F)\}}{(1+j\omega C_{ob1}Z_{c1})(1+g_{m1}R_{e1}+R_{e1}/R_F)}]\end{aligned}$$

により与えられるが、極めて複雑でこのまま解釈することは難しいので計算結果のみを図 5-21 に示す。$\omega<\omega_1$での入力インピーダンスは

$$\begin{aligned}Z_{in}(0)&=h_{ie1}\frac{1+g_{m1}R_{e1}+R_{e1}/R_F}{1+(1-G(0))R_{e1}/R_F}\\&=h_{ie1}\frac{(1+g_{m1}R_{e1})R_F+R_{e1}}{R_F+R_{e1}}\frac{A(0)}{G(0)}\\&=1.98M\Omega\end{aligned} \tag{5.6.31}$$

となり、フィードバック量が多くなるほど（$A(0)/G(0)$が大きいほど）高くなる。

以上の例で分かるようにトランジスター２段直結増幅回路は、閉ループゲインが約$40dB$と高いにもかかわらず帯域幅は$2MHz\ (-3dB)$と非常に広く、利得帯域幅積は$200MHz$にもなる。これは通常のオペアンプ IC では難しいことである。ハイゲイン広帯域増幅器が必要な場合には役に立つので、古い回路ではあるが一考に値する回路であろう。更に次節で述べるように、２段直結増幅回路の出力にエミッターフォロアを追加して出力インピーダンスを下げた回路は、ここ数年広帯域オペアンプとして普及した電流帰還型オペアンプの原型を成すものである。

5-7 出力段にエミッターフォロアを追加した２段直結増幅回路

図5-17の回路では２段目のトランジスターの実効的なコレクター負荷が$(R_5//R_F//Z_L)$であるため、開ループ利得がフィードバック抵抗R_Fに依存し、R_Fを変えて閉ループゲインを変えると２段目のゲイン$A_2(\omega)$が変わってしまうとともに、ミラー効果により１段目のゲイン$A_1(\omega)$まで変わってしまうので、設計をやり直さなければならなくなる。この状況は負荷インピーダンスZ_Lを変える

場合も同様であり、とくに負荷容量C_Lによって特性や安定性が大きな影響を受けてしまい増幅器として汎用性がない。そこで、汎用性を持たせるためには図5-23のように２段目増幅段の出力をエミッターフォロアでバッファーしてやると良い。こうすることで開ループゲインに大きな影響を与えることなく、R_F、Z_Lを変えることができ、増幅器としての汎用性が増す。

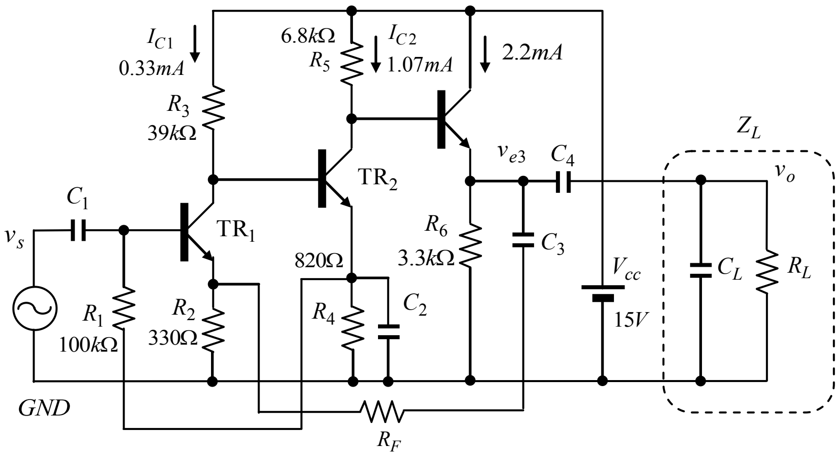


図5-23　出力段にエミッターフォロアを追加した２段直結増幅回路

図5-23に対する等価回路は図5-24のようになり、回路方程式は

$$\left.\begin{aligned}
&i_{b1}=(\frac{1}{h_{ie1}}+j\omega C_{be1})v_{be1}+j\omega C_{ob1}(v_{b1}-v_{c1})\\
&i_{c1}=g_{m1}v_{be1}-j\omega C_{ob1}(v_{b1}-v_{c1})\\
&v_{e1}=R_{e1}(i_{b1}+i_{c1}+\frac{v_o-v_{e1}}{R_F})\\
&v_{b1}=v_{be1}+v_{e1},\qquad v_{c1}=-Z_{c1}i_{c1}
\end{aligned}\right\}\tag{5.6.1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&i_{b2}=(\frac{1}{h_{ie2}}+j\omega C_{be2})v_{c1}+j\omega C_{ob2}(v_{c1}-v_{c2})\\
&i_{c2}=g_{m2}v_{c1}-j\omega C_{ob2}(v_{c1}-v_{c2})\\
&v_{c2}=-Z_{c2}i_{c2}
\end{aligned}\right\}\tag{5.6.2}$$

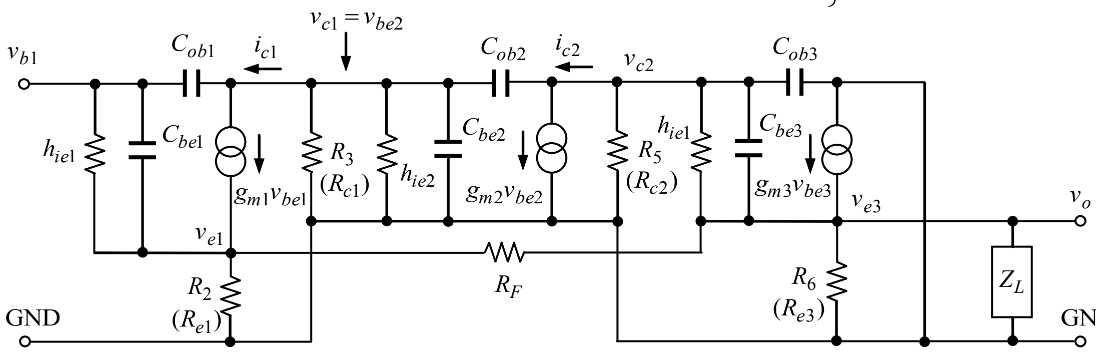


図5-24　図5-23の等価回路

$$\left.\begin{aligned}&(\frac{1}{h_{ie3}}+j\omega C_{be3})v_{be3}+g_{m3}v_{be3}=\frac{v_{e3}}{(R_{e3}/\!/Z_L)}+\frac{(v_{e3}-v_{e1})}{R_F}\\&v_{be3}=v_{c2}-v_{e3}\end{aligned}\right\}\tag{5.6.3}$$

で与えられる。この解は

$$\left.\begin{aligned}&h_{fe1}>>1,\quad h_{fe2}>>1,\quad h_{fe3}>>1\\&\omega C_{be1}/g_{m1}<<1,\quad \omega C_{be2}/g_{m2}<<1,\quad \omega C_{be3}/g_{m3}<<1\\&\omega C_{ob1}((R_{e1}/\!/R_F)+1/g_{m1}<<1\end{aligned}\right\}\tag{5.6.4}$$

のもとでは次のように近似される。

$$\begin{aligned}v_{e3}=&\frac{g_{m3}(R_{e3}/\!/Z_L/\!/R_F)}{1+g_{m3}(R_{e3}/\!/Z_L/\!/R_F)}\cdot\frac{g_{m2}Z_{c1}Z_{c2}}{(R_{e1}/\!/R_F)+1/g_{m1}}\cdot\frac{1}{(1+j\omega C_{ob2}Z_{c2})(1+j\omega C_{ob1}Z_{c1})}\\&\times\left[\left\{1+\beta\frac{(1+j\omega C_{ob2}Z_{c2})(1+j\omega C_{ob1}Z_{c1})}{g_{m2}g_{m3}Z_{c1}Z_{c2}}\right\}v_{b1}-\beta\left\{1-\frac{(1+j\omega C_{ob2}Z_{c2})(1+j\omega C_{ob1}Z_{c1})}{g_{m1}g_{m2}g_{m3}Z_{c1}Z_{c2}R_F}\right\}v_{e3}\right]\end{aligned}\tag{5.6.5}$$

ここで

$$\beta=\frac{R_{e1}}{R_{e1}+R_F}\tag{5.6.6}$$

は帰還率、Z_{c1}、Z_{c2}はそれぞれ１段目及び２段目の実効的コレクター負荷インピーダンスであり、$A_2(\omega)$、$A_3(\omega)$をそれぞれ２段目及びエミッターフォロア段のゲインとして次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{Z_{c1}}=\frac{1}{R_3}+\frac{1}{h_{ie2}}+j\omega\{C_{be2}+C_{ob2}A_2(\omega)\}\\&\frac{1}{Z_{c2}}=\frac{1}{R_5}+\frac{1-A_3(\omega)}{h_{ie3}}+j\omega[C_{be3}\{1-A_3(\omega)\}+C_{ob3}]\end{aligned}\right\}\tag{5.6.7}$$

TR_3として前節の２段直結増幅器と同じく 2SC1845 を想定すると

$$h_{fe3}=200,\quad g_{m3}=83.6mS,\quad C_{be3}=133pF$$

より

$$g_{m2}g_{m3}|Z_{c1}Z_{c2}|>>1\tag{5.6.8}$$

が成立し、(5.6.5)式は

$$v_{e3}=A(\omega)(v_{b1}-\beta v_{e3})\tag{5.6.9}$$

と近似することができて、３段目のエミッター出力は

$$v_{e3}=\frac{A(\omega)}{1+\beta A(\omega)}v_{b1}\tag{5.6.10}$$

負荷端出力v_oは

$$v_o = \frac{Z_L}{R_7 + Z_L} v_{e3} \qquad (5.6.11)$$

で与えられる。ここで$A(\omega)$は開ループゲイン、$A_1(\omega)$、$A_2(\omega)$、$A_3(\omega)$はそれぞれ１段目、２段目及びエミッターフォロア段のゲインである。

$$\left.\begin{aligned} &A(\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega)A_3(\omega) \\ &A_1(\omega) = \frac{g_{m1}Z_{c1}}{\{1+g_{m1}(R_F // R_{e1})\}(1+j\omega C_{ob1}Z_{c1})} \\ &A_2(\omega) = \frac{g_{m2}Z_{c2}}{1+j\omega C_{ob2}Z_{c2}}, \quad A_3(\omega) = \frac{g_{m3}(R_{e3} // Z_L // R_F)}{1+g_{m3}(R_{e3} // Z_L // R_F)} \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.12)$$

これより(5.6.7)式のZ_{c1}、Z_{c2}は

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{Z_{c1}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{h_{ie2}} + j\omega(C_{be2} + \frac{g_{m2}Z_{c2}C_{ob2}}{1+j\omega C_{ob2}Z_{c2}}) \\ &\frac{1}{Z_{c2}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{h_{ie3}\{1+g_{m3}(R_{e3} // Z_L // R_F)\}} + j\omega\{\frac{C_{be3}}{1+g_{m3}(R_{e3} // Z_L // R_F)} + C_{ob3}\} \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.13)$$

となる。なお

$$|(R_{e3} // R_F // Z_L)| >> 1/g_{m3} \qquad (5.6.14)$$

では

$$A_3(\omega) = 1 \qquad (5.6.15)$$

と近似できる。$1/g_{m3} \cong 12\,\Omega$であることから、$Z_L$が$100\,\Omega$程度以上であれば、負荷インピーダンス$Z_L$及び帰還抵抗$R_F$によらず$A_3(\omega)=1$と近似できる。

(5.6.12)式で与えられる開ループゲイン及び位相を図示すると図5-25のようになる。トランジスターが３段のため、２段増幅（図5-20）にに比べて高域端での位相回転が大きく、閉ループゲインを30dB以下に下げることはできない。

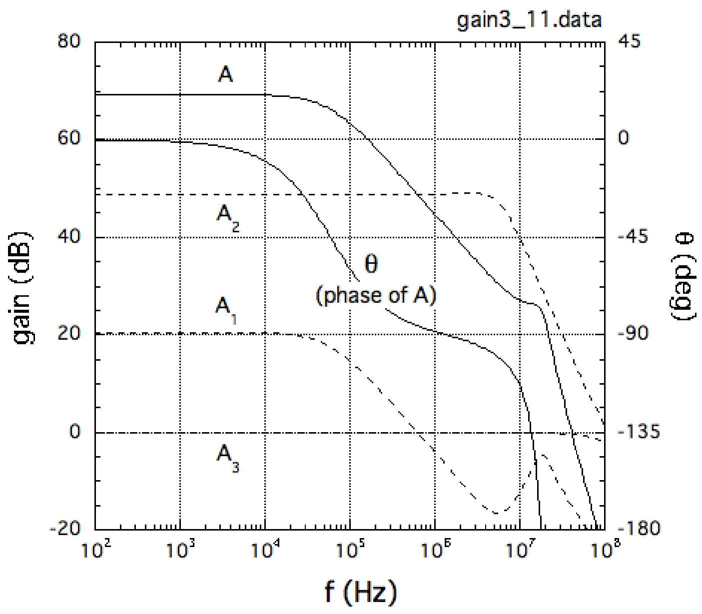


図 5-25　エミッターフォロアを追加した２段直結増幅回路の開ループゲイン

(5.5.27)式より上記増幅回路のゲインの変曲点は

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{\{C_{ob1}+(1+g_{m2}R_5)C_{ob2}\}h_{ie2}} = 2\pi\times 58.5kHz \\
\omega_2 &= \frac{1}{(C_{ob2}+C_{ob3})R_5} = 2\pi\times 5.85MHz \\
\omega_3 &= \frac{g_{m2}C_{ob2}}{C_{be2}(C_{ob2}+C_{ob3})} = 2\pi\times 51.7MHz
\end{aligned}\right\}$$

で与えられるが、ω_3はトランジスターの遷移周波数（f_T）の約 1/2 であり、(5.6.4)式の近似のため f_T 近傍の近似は良くない。

図 5-26 は閉ループゲインの例で、閉ループ 30dB では高域端にピークを生じ不安定になりかけていることが分かる。

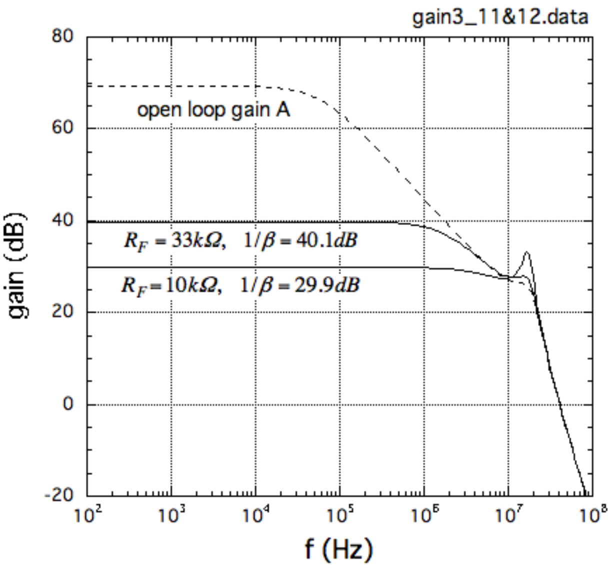


図 5-26　閉ループゲイン

このような閉ループゲインの安定領域の制限を緩和し、広い閉ループゲイン領域を実現する手法が 5-7 節で述べる位相補償である。オペアンプのような汎用増幅回路においては、汎用性をを増すために位相補償は不可欠の技術である。またフィードバック増幅器を製作する場合、位相補償なしではほとんどの場合発振に悩まされる。

電流帰還

帰還抵抗R_Fにより帰還率βを変えると、図 5-27 に示すように閉ループゲインを下げるに従って帯域幅は拡大し、閉ループゲインが$30dB$以下になると帯域端にピークを生ずるようになり、これ以下の閉ループゲインでは不安定（発振状態）になる。ここでエミッター帰還における興味深い性質を見てみよう。(5.6.12)式より $g_{m1}(R_F /\!/ R_{e1}) >> 1$では

$$\beta A_1(\omega) = \frac{(R_{e1} /\!/ R_F)}{R_F}\frac{g_{m1}Z_{c1}}{\{1+g_{m1}(R_F /\!/ R_{e1})\}(1+j\omega C_{ob1}Z_{c1})}$$

$$= \frac{Z_{c1}/R_F}{1+j\omega C_{ob1}Z_{c1}} \qquad (\text{for}\ \ g_{m1}(R_F /\!/ R_{e1}) >> 1) \qquad (5.6.16)$$

であることから、$\beta A(\omega)$は初段のエミッター抵抗R_{e1}にほとんど依存しない。そこで(5.6.10)式を

$$v_{e3} = \frac{1}{\beta} \frac{\beta A(\omega)}{1+\beta A(\omega)} v_{b1} \tag{5.6.17}$$

と書き換えると、エミッター帰還における著しい特徴を見ることができる。

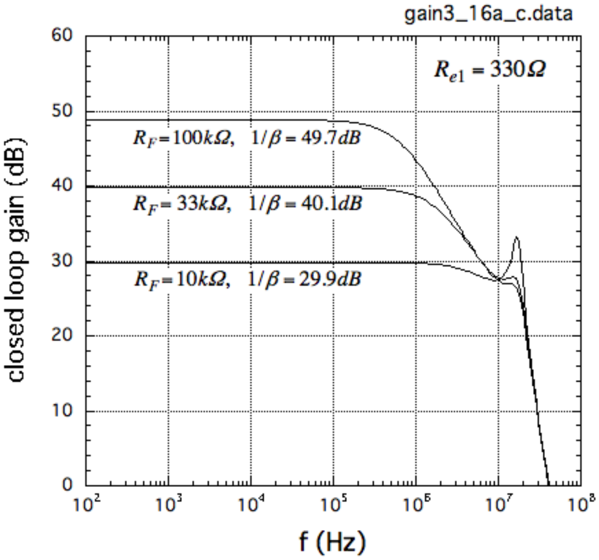


図 5-27　R_Fを変えたときの閉ループゲイン

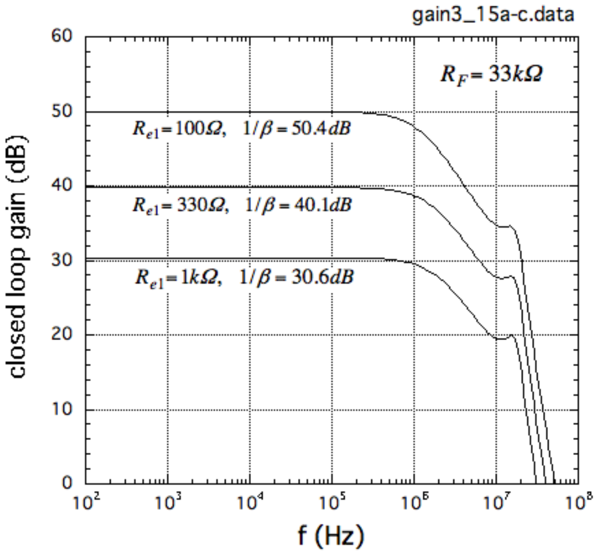


図 5−28　R_{e1}を変えたときの閉ループゲイン

すなわち、R_{e1}を変えることで帰還率$\beta = R_{e1}/(R_{e1}+R_F)$を変えても$\beta A(\omega)/\{1+\beta A(\omega)\}$は変わらず、図 5-28 に見るように閉ループゲインの周波数特性は変化しない。これはフィードバックの一般論で述べた「帰還率を変えて閉ループゲインを変えると閉ループの周波数特性が変わる」という性質とは矛盾する性質である。これを電流帰還（current feedback）と呼び（6−5 節参照）、エミッター帰還の著しい特徴である。電流帰還に対して一般論で述べた通常の帰還を電圧帰還（voltage feedback）と呼ぶ。電流帰還の技術を用いることで 6−5 節で述べるような広帯域増幅器が容易に実現できるようになった。

5−8 位相補償

図 5-25 で分かるようにω_1以上の領域では開ループゲインは$1/\omega$に比例して減少している。このような減少のしかたを、1 オクターブ毎に 6dB 減少するので-6dB/oct の減少率と書く。-6dB/oct で開ループゲインが減少している領域では開ループゲインの位相はほぼ -90° である。したがって 4 章の閉ループの安定性の議論より、閉ループゲインが開ループゲインの-6dB/oct 領域にある場合は安定である。そこで閉ループゲインが 0dB 以上で安定であるようにするには、開ループゲインが 0dB まで-6dB/oct で減少するようにすれば良く、C_{ob2}に並列にコンデンサーC_cを追加す

る、即ち図 5-29 に示すように２段目のトランジスターのベース・コレクター間にC_cを接続して、実効的な帰還容量を増やして周波数ω_1を下げることで実現することができる。

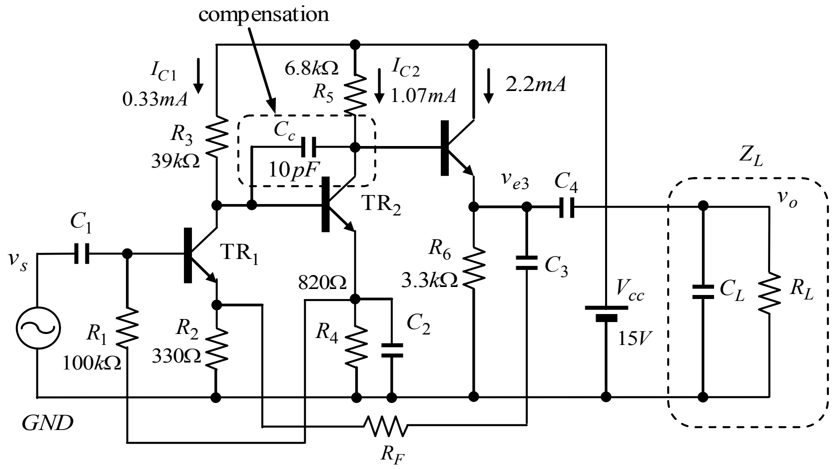


図 5-29　位相補償容量C_cの追加

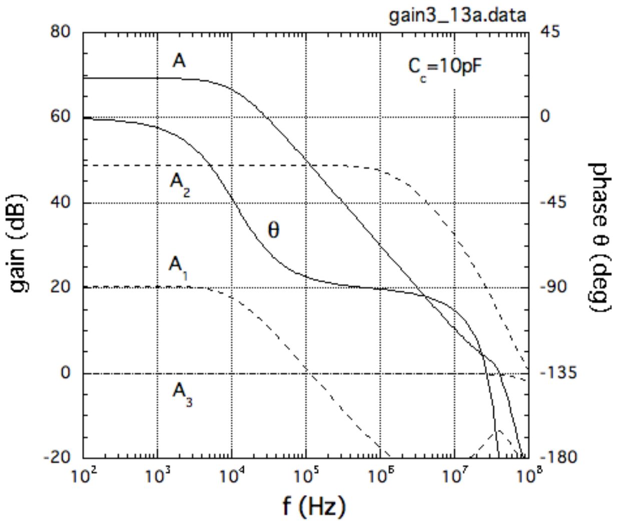


図 5-30　$C_c = 10pF$のときの
開ループゲイン

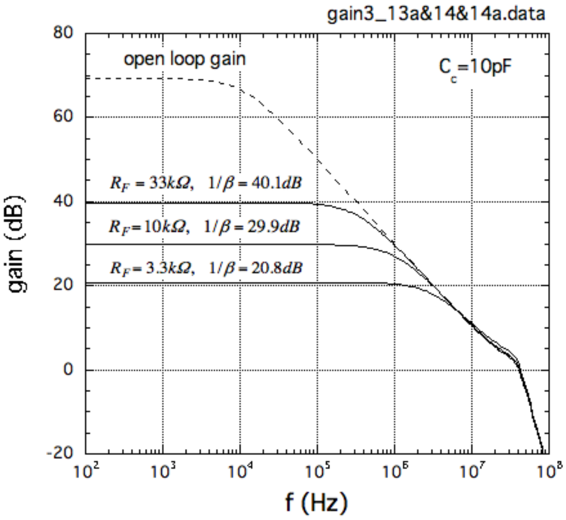


図 5-31　$C_c = 10pF$のときの
閉ループゲイン

この容量C_cを補償容量（compensation capacitor）という。図 5-30 は図 5-25 の特性を持つ回路に$C_c = 10pF$を接続したときの開ループゲインである。ほぼ 0dB まで-6dB/oct で減少しており、図 5-10 に示すように広い範囲の閉ループゲインで安定性が確保される。

図 5-32 に示すように、C_cを大きくするに従ってω_1が下がり、安定領域が広がる。しかしながらC_cを大きくすることは帯域幅を狭めることでもあり、やりすぎると必要な帯域幅が確保できなくなるので、閉ループゲインに応じて必要最小限の容量にとどめるのが良い。汎用オペアンプで

は 0dB まで補償されているものがほとんどであり、帯域幅の自由度がないので、不便な場合もある。

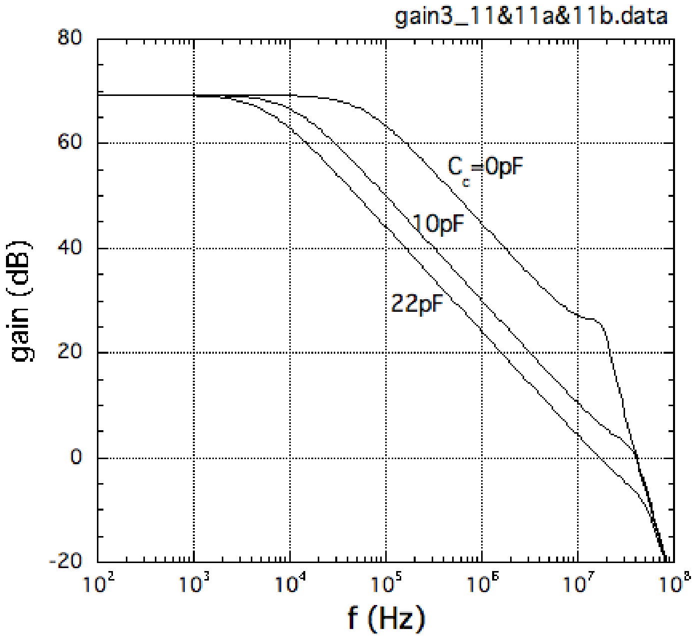


図 5-32　補償容量 C_c による開ループゲインの変化

６章　演算増幅器

演算増幅器とは非反転入力(+)と反転入力(−)の二つの入力を有し、一つの出力（両極性）を持つ増幅回路ユニットである。もともとはアナログ計算機用に工夫された増幅器であり、以下のような特徴を有する。

・非常に高い入力インピーダンス
・非常に低い出力インピーダンス
・フィードバックにより任意のゲインを設定しても安定
・閉ループゲインの精度を保証するため開ループゲインが大きい
・直流増幅可能
・直流安定度が高い
・正負両極性で動作

半導体増幅回路の発展により以上の目標はほとんど満たされ、またこれらは増幅器一般の目標でもあることから、現在では高周波増幅以外のほとんどの増幅器は演算増幅器の回路構成となっている。

6-1　差動増幅回路

演算増幅器（オペアンプ）の入力段には正負両極性の直流電圧を安定に増幅するため、図 6-1 に示す差動増幅回路が用いられる。

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= i_{c1} + I/2 \\ I_2 &= i_{c2} + I/2 \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.1)$$

として、小信号についての直流等価回路は図 6-2 のように書ける。二つのトランジスターの特性が揃っているものとして、回路方程式は次のようになる。

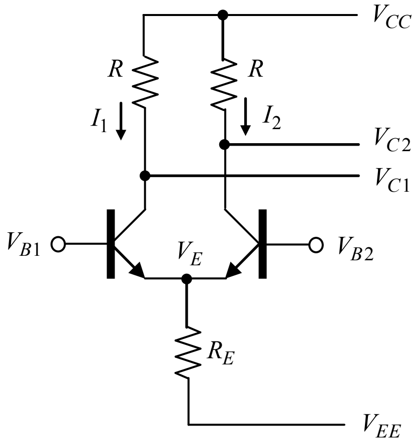


図 6-1　差動増幅回路

$$\left.\begin{aligned} & i_{c1} = g_m(v_{b1} - v_e) + h_{oe}(v_{c1} - v_e) \\ & i_{c2} = g_m(v_{b2} - v_e) + h_{oe}(v_{c2} - v_e) \\ & (g_m + 1/h_{ie})(v_{b1} - v_e) + h_{oe}(v_{c1} - v_e) \\ & \quad + (g_m + 1/h_{ie})(v_{b2} - v_e) + h_{oe}(v_{c2} - v_e) = (v_e + \Delta V_{EE})/R_E \\ & v_{c1} = -R_c i_{c1} + \Delta V_{CC} \\ & v_{c2} = -R_c i_{c2} + \Delta V_{CC} \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.2)$$

これを解いて次式を得る。

$$
\left.\begin{aligned}
i_{c1} &= \frac{g_m}{2}(v_{b1}-v_{b2}) + \frac{1}{2R_E}\frac{v_{c1}+v_{c2}}{2} + \left(\frac{1}{2R_E}-h_{oe}\right)\Delta V_{EE} - h_{oe}\Delta V_{CC} \\
i_{c2} &= -\frac{g_m}{2}(v_{b1}-v_{b2}) + \frac{1}{2R_E}\frac{v_{c1}+v_{c2}}{2} + \left(\frac{1}{2R_E}-h_{oe}\right)\Delta V_{EE} - h_{oe}\Delta V_{CC}
\end{aligned}\right\} \qquad (6.1.3)
$$

ここで$g_m R_E >> 1,\quad h_{oe}R_c << 1$とした。もしトランジスターが理想的であって$h_{oe}=0$ならば、$R_E \to \infty$ではコレクター電流は差信号$(v_{b1}-v_{b2})$（ノーマルモード）のみで決まることになる。差信号$(v_{b1}-v_{b2})$に対する同相信号$(v_{b1}+v_{b2})/2$（コモンモード）の感度の比

$$CMRR = g_m R_E \qquad (6.1.4)$$

を、同相信号除去比 CMRR (common mode rejection ratio) といい、R_Eが大きいほど大きくなる。通常、オペアンプ IC 内に組み込まれる差動増幅回路では、できるだけR_Eを大きくするために図 6-3 に示すようにR_Eの代わりに、次節で述べるカレント・ミラー回路による定電流源が用いられる。実際には共通エミッター回路の定電流源は周波数とともに定電流性が悪化するので、全体としての CMRR、PSRR は~kHz 以上の領域は周波数とともに悪化する。（編注：PSRR=power supply rejection ratio は、電源電圧変動除去比の意。式(6.1.3)の最後の 2 項の寄与の大きさを定量化する）

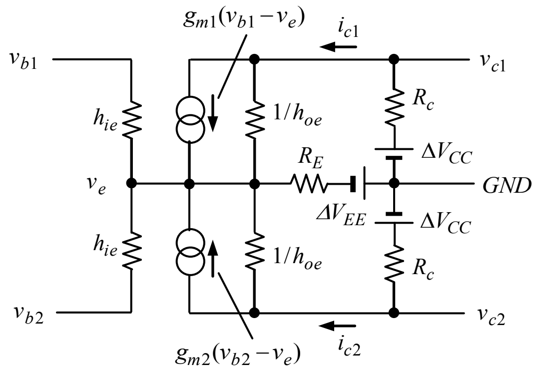


図 6-2　差動増幅回路の直流等価回路

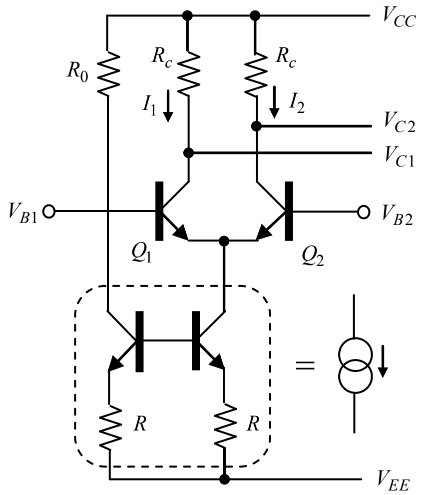


図 6-3　エミッターを定電流源で駆動する差動増幅回路

6-2　定電流源（カレント・ミラー回路）

ここで図 6-3 に出て来た定電流源について述べておく。特性の揃った 2 個のトランジスターを図 6-4 のように接続し、$h_{FE} >> 1$としてベース電流を無視すると、ダイオード接続されたQ_1に電流I_1を流すとベース電圧は

$$V_B = V_{BE1} + RI_1 \qquad (6.2.1)$$

となる。Q_2のベースも同じ電圧なので

$$V_B = V_{BE2} + RI_2 \qquad (6.2.2)$$

なる電流I_2が流れることになる。ここで$V_{BE1} = V_{BE2}$であれば、$I_2 = I_1$となり、Q_2のコレクターにはQ_1と同じ電流が流れることになる。これをカレント・ミラー回路と呼び、IC 内の定電流源としてよく用いられる。図 6-3 のエミッター回路の定電流源はこのようにして作られている。なお電源電圧の変動の影響を除去したい場合には、Q_1のエミッター抵抗を定電圧ダイオードに置き換えた回路が用いられる。

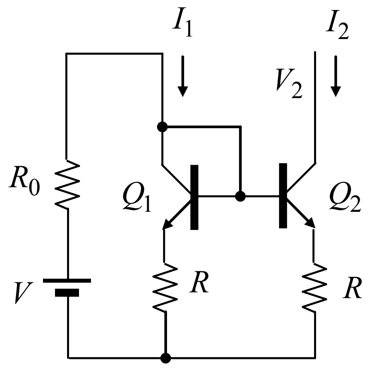


図 6-4　定電流源
（カレント・ミラー回路）

ダイオード接続トランジスターQ_1のインピーダンス$Z_D(\omega) = v_{be}/i$は

$$i_1 = (g_m + \frac{1}{h_{ie}} + h_{oe} + j\omega C_{be})v_{be} \qquad (6.2.3)$$

より

$$\begin{aligned} Z_D &= \frac{1}{g_m(1+1/h_{fe}) + h_{oe} + j\omega C_{be}} \\ &= \frac{1/g_m}{1 + j\omega/\omega_T} \qquad (g_m >> h_{oe},\quad h_{fe} >> 1) \end{aligned} \qquad (6.2.4)$$

ここで$\omega_T = g_m / C_{be}$は遷移周波数である。Q_2についての回路方程式は

$$\left.\begin{aligned} &i_2 = g_m v_{be} + h_{oe}(v_2 - v_e) + j\omega C_{ob}(v_2 - v_e - v_{be}) \\ &-\frac{v_e + v_{be}}{R_0 //(R + Z_D)} = (1/h_{ie} + j\omega C_{be})v_{be} - \frac{v_e + v_{be}}{R_0 //(R + Z_D)} \\ &v_e / R = (g_m + 1/h_{ie} + j\omega C_{be})v_{be} + h_{oe}(v_2 - v_e) \end{aligned}\right\} \qquad (6.2.5)$$

で与えられる。これより

$$v_e = \frac{g_m + 1/h_{ie} + j\omega C_{be}}{1/R + h_{oe}} v_{be} + \frac{h_{oe}}{1/R + h_{oe}} v$$

$$v_{be} = \frac{1/R + h_{oe}}{g_m + 1/h_{ie} + j\omega C_{be}} v_e - \frac{h_{oe}}{g_m + 1/h_{ie} + j\omega C_{be}} v$$

が得られv_e、v_{be}が次のように求まる。

$$v_e = \frac{G_1}{G_2} v \qquad (6.2.6)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&G_1 = h_{oe}/h_{ie} + h_{oe}/(R_0 // (R+Z_D)) + j\omega\{C_{be}h_{oe} + C_{ob}(g_m + 1/h_{ie} + h_{oe} + j\omega C_{be})\} \\
&G_2 = (1/R + h_{oe})/h_{ie} + (g_m + 1/h_{ie} + 1/R + h_{oe})/(R_0 // (R+Z_D)) \\
&\quad + j\omega\{C_{be}(1/(R_0 // (R+Z_D)) + 1/R + h_{oe}) - C_{ob}(g_m + 1/h_{ie} - 1/R - h_{oe} + j\omega C_{be})\} \\
&v_{be} = \frac{(1/R + h_{oe})G_1/G_2 - h_{oe}}{g_m + 1/h_{ie} + j\omega C_{be}} v
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.7}
$$

これらを(6.2.5)のi_2についての式に代入して

$$
i_2 = \{h_{oe} + j\omega C_{ob} - (h_{oe} + j\omega C_{ob})\frac{G_1}{G_2} + (g_m - j\omega C_{ob})\frac{(1/R + h_{oe})G_1/G_2 - h_{oe}}{g_m + 1/h_{ie} + j\omega C_{be}}\} v_2 \tag{6.2.8}
$$

を得、従ってカレントミラー回路のインピーダンス$Z(\omega) = v_2/i_2$は

$$
Z(\omega) = \frac{(g_m + 1/h_{ie} + j\omega C_{be})G_2}{(h_{oe} + j\omega C_{ob})(g_m + 1/h_{ie} + j\omega C_{be})(G_2 - G_1) + (g_m - j\omega C_{ob})\{G_1/R + h_{oe}(G_1 - G_2)\}} \tag{6.2.9}
$$

となる。トランジスターとして2SC1845を仮定し$V = 15V$として、前節の差動回路の共通エミッター回路に用いるものとすると、回路パラメーターは以下のようになる。

$$
\left.\begin{aligned}
&I_C = 0.66mA, \quad h_{fe} = 200, \quad g_m = 25.5mS, \quad h_{ie} = 7.8k\Omega \\
&1/h_{oe} = 600k\Omega, \quad f_T = 81.2MHz, \quad C_{be} = 50pF, \quad C_{ob} = 2pF \\
&R = 1k\Omega, \quad R_0 = 20.8k\Omega
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.10}
$$

(6.2.10)のパラメーターのもとで(6.2.9)式を計算すると図 6-5 のようになる。さらに(6.2.9)式を

$$
\left.\begin{aligned}
&h_{fe} >> 1, \quad g_m >> h_{oe} \\
&R_1 >> R >> 1/g_m
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.11}
$$

のもとで近似することで次の近似式を得る。

$$
\left.\begin{aligned}
&Z(\omega) \cong \frac{(g_m/h_{oe})(h_{ie}//R)}{1 + j\omega/\omega_c} \\
&(g_m/h_{oe})(h_{ie}//R) = 13.6M\Omega \\
&\omega_c = 1/\{2C_{ob}(h_{ie}//R)(g_m/h_{oe})\} \\
&\quad = 2\pi \times 2.9kHz
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.12}
$$

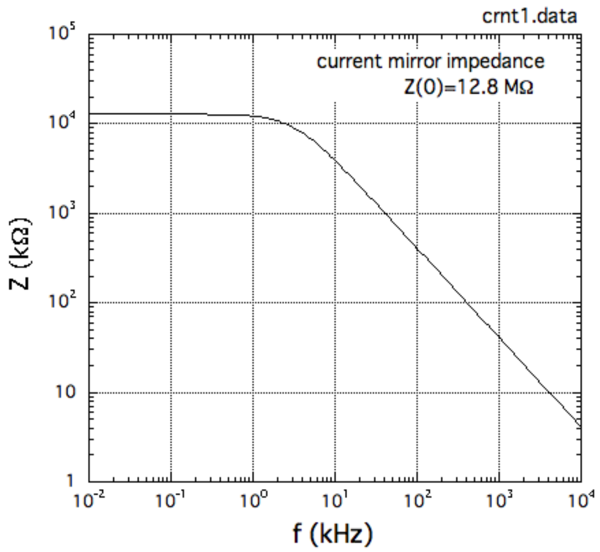


図 6-5　カレントミラー回路のインピーダンス

差動増幅回路のエミッター電流をカレントミラー回路により供給する場合、ω_c以上の周波数でインピーダンスが減少するため CMRR が低下する。

6-3　演算増幅器回路

図 6-5 に演算増幅器の基本的な回路構成を示す。初段は差動増幅回路で構成され、差動増幅回路の出力をシングルエンドに変換するため、一方のコレクター出力だけを２段目のエミッター接地増幅回路で増幅した後、出力インピーダンスを下げるためにコンプリメンタリー・エミッターフォロアを通して出力される。

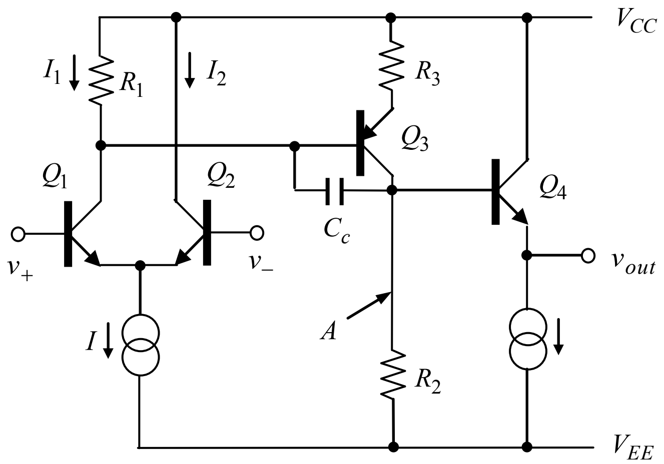


図 6-5　演算増幅器の基本的回路

<u>バイアスの決定</u>

電源電圧は $V_{CC}=15V$ 、$V_{EE}=-15V$ とする。5-5 節の２段直結増幅回路に倣って

$$\left.\begin{array}{l} I_1=I_2=0.33mA, \qquad g_{m1}=g_{m2}=12.8mS \\ I_3\approx 1mA \\ h_{fe1}=h_{fe2}=h_{fe3}=200 \end{array}\right\} \tag{6.3.1}$$

とすると、A 点（出力と同電位）を 0 V とするために

$$R_2I_3+V_D=-V_{EE} \tag{6.3.2}$$

とする。ここで V_D はダイオードの順方向電圧（$V_D=0.6V$）である。(6.23)式の条件を満たす標準系列の抵抗として $R_2=15k\Omega$ とする。このとき

$$I_3=0.96mA, \quad g_{m3}=37.5mS \tag{6.3.3}$$

となる。(6.1.12)式より Q_1 の直流増幅度は

$$A_1(0)=\frac{1}{2}g_{m1}(R_1//(h_{ie3}+h_{fe3}R_3)) \tag{6.3.4}$$

また(5.4)節より Q_3 の直流増幅度は

$$A_2(0)=\frac{g_{m3}R_2}{1+g_{m3}R_3} \tag{6.3.5}$$

であるから、直流増幅度 $A_1(0)A_2(0)$ の R_3 依存性は

$$\frac{d}{dR_3}\{A_1(0)A_2(0)\}<0 \tag{6.3.6}$$

となる。これより増幅度を大きくするには R_3 は小さい方が望ましい。しかしながらバイアスの

温度安定性からはR_3は大きい方が望ましい。

(3.2.27)式より A 点の電圧の温度依存性は

$$\Delta V_A = \frac{\partial I_{C3}}{\partial T} R_2 = -\frac{h_{fe3} R_2}{R_1 + h_{ie3} + h_{fe3} R_3} \left(\frac{\partial V_{BE}}{\partial T} \right)_{I_B} \tag{6.3.7}$$

で与えられる。これを初段及び２段目の直流増幅度(6.3.4)、(6.3.5)式で割って、入力オフセット電圧に換算すると

$$\Delta V_{in} = \frac{\Delta V_A}{A_1(0) A_2(0)} = -\frac{2}{g_{m1} R_1} \left(\frac{\partial V_{BE}}{\partial T} \right)_{I_B} \tag{6.3.8}$$

となる。さらに$g_{m1} = qI_1 / kT$および

$$R_1 I_1 = V_{BE3} + R_3 I_3 \tag{6.3.9}$$

より

$$\Delta V_{in} = -\frac{2kT/q}{V_{BE3} + R_3 I_3} \left(\frac{\partial V_{BE}}{\partial T} \right)_{I_B} \tag{6.3.10}$$

となる。したがって$R_3 I_3 > V_{BE3}$ $(\sim 0.6V)$とすれば温度依存性を低減できるが、その場合には２段目の直流増幅度$A_2(0) \cong R_2 / R_3$ $(< 24\ (27dB))$が極めて小さくなってしまう。増幅度をさげないためにはR_3は$R_3 \sim 1/g_{m3} = 27\Omega$の程度にとどめておきたい。ここでは$R_3 = 100\Omega$としよう。こうすると$V_{BE3} >> R_3 I_3$となるので

$$\Delta V_{in} \approx 0.17 mV/°C \tag{6.3.11}$$

となる。実際のオペアンプでは２段目の温度依存性が小さくなるように、２段目も差動増幅回路構成とし、定電流負荷やカレントミラー回路負荷とすることで、シングルエンド出力に変換しているものが多い。出力段Q_4のV_{BE}の温度依存性による入力換算オフセット電圧は

$$\Delta V_{in}(\mathrm{Q}_4) = \frac{\Delta V_{BE}(\mathrm{Q}_4)}{A_1(0) A_2(0)} \approx -1.3 \mu V/°C \tag{6.3.12}$$

程度となるので無視しても良い。また$R_1 = (V_{BE3} + R_3 I_3)/I_1 = 2.1k\Omega$となるが、これは抵抗の標準系列にはないので$R_1 = 2.2k\Omega$とする。この差を吸収するために初段のコレクター電流を少し減らして$I_1 = I_2 = 0.316mA$と設定し直し、$f_T(1mA) = 100MHz$ $(\propto \sqrt{I_C})$と仮定すると以下のパラメータを得る。

$$\left.\begin{array}{l} I_1 = I_2 = 0.316mA,\quad I_3 = 0.96mA,\quad g_{m1} = g_{m2} = 12.2mS,\quad g_{m3} = 37.5mS \\ h_{fe1} = h_{fe2} = h_{fe3} = h_{fe4} = 200,\quad h_{ie1} = h_{ie2} = 16.4k\Omega,\quad h_{ie3} = 5.33k\Omega \\ R_1 = 2.2k\Omega,\quad R_2 = 15k\Omega,\quad R_3 = 100\Omega,\quad C_{be1} = C_{be2} = 34.5pF,\quad C_{be3} = 61pF \\ C_{ob1} = C_{ob2} = C_{ob3} = C_{ob4} = 2pF \end{array}\right\} \tag{6.3.13}$$

<u>ゲイン及び周波数特性</u>

初段の$CMRR >> 1$としてコモンモードを無視すると、$\omega < 1/(C_{ob1}R_1)$ $(\approx 2\pi \times 36MHz)$として$1 + j\omega C_{ob1}R_1 \cong 1$と近似してQ$_1$のコレクター信号電流$i_{c1}$、電圧$v_{c1}$及びQ$_3$のコレクター信号電圧は、(6.1.2)式

$$\begin{cases} i_{c1} = g_m(v_{b1} - v_e) + h_{oe}(v_{c1} - v_e) \\ i_{c2} = g_m(v_{b2} - v_e) + h_{oe}(v_{c2} - v_e) \end{cases}$$

において、コモンモードを無視して$i_{c2} = -i_{c1}$とすると

$$2i_{c1} = g_m(v_{b1} - v_{b2}) + 2h_{oe}v_{c1} \tag{6.3.14}$$

したがってQ$_1$のコレクターインピーダンスをZ_{c1}として$v_{c1} = -Z_{c1}i_{c1}$より

$$v_{c1} = -\frac{g_m Z_{c1}/2}{1 + h_{oe}Z_{c1}}(v_{b1} - v_{b2}) \tag{6.3.15}$$

すなわち差動モードに対する初段のゲインは

$$A_1 = -\frac{g_m Z_{c1}/2}{1 + h_{oe}Z_{c1}} \tag{6.3.16}$$

となる。あとは 5-5 節に述べた２段直結増幅回路に対する解析と同様にして開ループゲイン$A = A_1A_2$を求めることができる。5-5 節の議論より、開ループゲインは２個のポールω_1、ω_3を持ち

$$A(\omega) = \frac{A_0}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_3)} \tag{6.3.17}$$

となることが示される。ここで

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{(g_{m1}R_{c1}/2)g_{m3}R_2}{(1 + h_{oe}R_{c1})(1 + g_{m3}R_3)} \\ &= \frac{(g_{m1}R_{c1}/2)g_{m3}R_2}{1 + g_{m3}R_3} \qquad (h_{oe}R_{c1} << 1) \end{aligned} \tag{6.3.18}$$

は直流ゲイン、R_{c1}はQ$_1$のコレクター実効抵抗

$$\frac{1}{R_{c1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{h_{fe}R_3} \cong \frac{1}{R_1} \tag{6.3.19}$$

ω_1、ω_3は

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{R_3/R_2}{(C_{ob3} + C_c)R_1} \\ \omega_3 &= \frac{g_{m3}(C_{ob3} + C_c)}{C_{be3}(C_{ob3} + C_c + C_{ob4} + C_L/h_{fe4})} \end{aligned}\right\} \tag{6.3.20}$$

で与えられ、$\omega_1 = 2\pi \times 241kHz$ (for $C_c = C_L = 0$)、$\omega_3 = 2\pi \times 48.9MHz$ (for $C_c = C_L = 0$) であ

る。またC_Lは出力の負荷容量である。

開ループゲイン$|A|$を図示すると図 6-6 となる。閉ループゲインの安定性を$0dB$まで保証するためにはスタガー比ω_3/ω_1をA_0以上

$$\frac{\omega_3}{\omega_1}=\frac{g_{m3}R_1R_2}{R_3}\frac{(C_{ob3}+C_c)^2}{C_{be3}(C_{ob3}+C_c+C_{ob4}+C_L/h_{fe4})}>A_0 \tag{6.3.21}$$

とする必要がある。これより

$$(C_{ob3}+C_c)^2>\frac{g_{m1}R_3/2}{1+g_{m3}R_3}C_{be3}(C_{ob3}+C_c+C_{ob4}+C_L/h_{fe4}) \tag{6.3.21}$$

であるので$\omega_3/\omega_1>A_0$であるためには

$$C_{ob3}+C_c>\frac{1}{2}\left\{\frac{g_{m1}R_3/2}{1+g_{m3}R_3}C_{be3}+\sqrt{\frac{g_{m1}R_3/2}{1+g_{m3}R_3}C_{be3}(\frac{g_{m1}R_3/2}{1+g_{m3}R_3}C_{be3}+4(C_{ob4}+C_L/h_{fe4})}\right\} \tag{6.3.22}$$

であればよいことになる。(6.3.13) のパラメーターを右辺に代入することで$C_L=0$ pF の場合には$C_{ob3}+C_c>18.6pF$となる。即ち$C_L=0pF$の場合は、閉ループゲイン 0dB まで安定性を保証するには

$$C_c>16.6pF$$

とすればよい。負荷容量C_Lが大きくなるに従って、必要な補償容量C_cの容量は大きくなる。

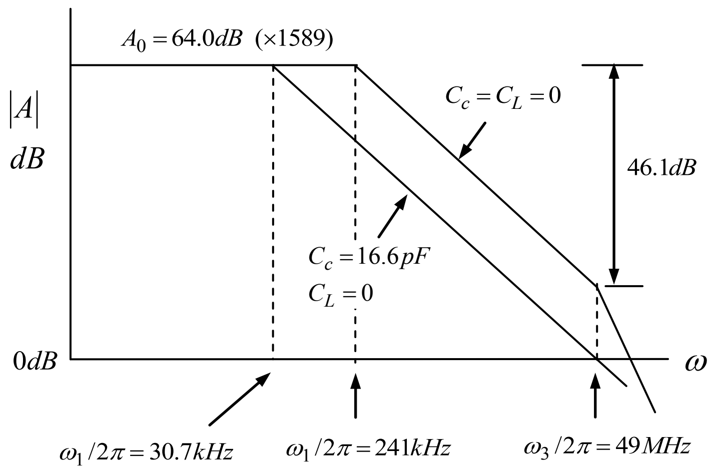


図 6-6　開ループゲインの周波数特性（$C_L=0pF$）

図 6-5 のような簡単な回路構成では開ループゲインは約 60B 程度、また PSRR は２段目のエミッター接地回路のためにあまり大きくなく、またシングルエンド出力とするために、差動増幅の一方のコレクター出力のみを次段で増幅しているので CMRR もあまり大きくなく、演算増幅器としては十分な性能とは云い難い。

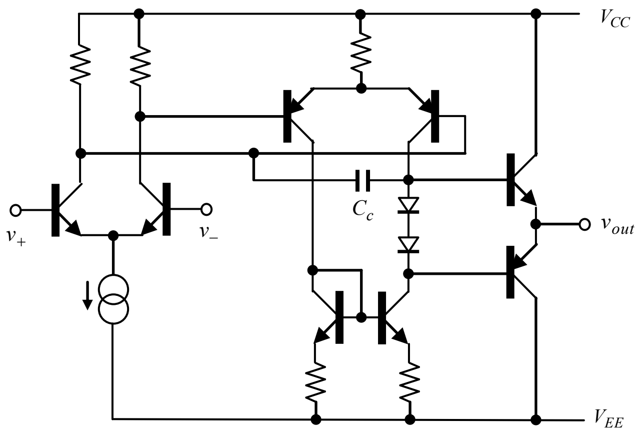


図 6-7　実際のオペアンプ IC の回路構成の例

そこで次節に示すように実際のオペアンプ IC では､図 6-7 のように２段目も差動増幅回路とし、さらにシングルエンド出力への変換は２段目の差動回路のコレクター負荷をカレントミラー回路によるプッシュプル型の定電流源とすることで、大きな開ループゲイン（100dB 以上）と PSRR（90dB 以上）を実現している。出力段は負荷への正負両方向の電流供給能力を対称とするために、コンプリメンタリー・エミッターフォロアと等価な構成となっているのが普通である。

6-4　実際のオペアンプの例

最後に実際のオペアンプの等価回路と開ループゲインの周波数特性の例を示す。図 6-8 は初段の差動増幅回路が FET で構成されている、FET 入力オペアンプ LF155/156/157 (LF355/356/357) の等価回路と特性である。

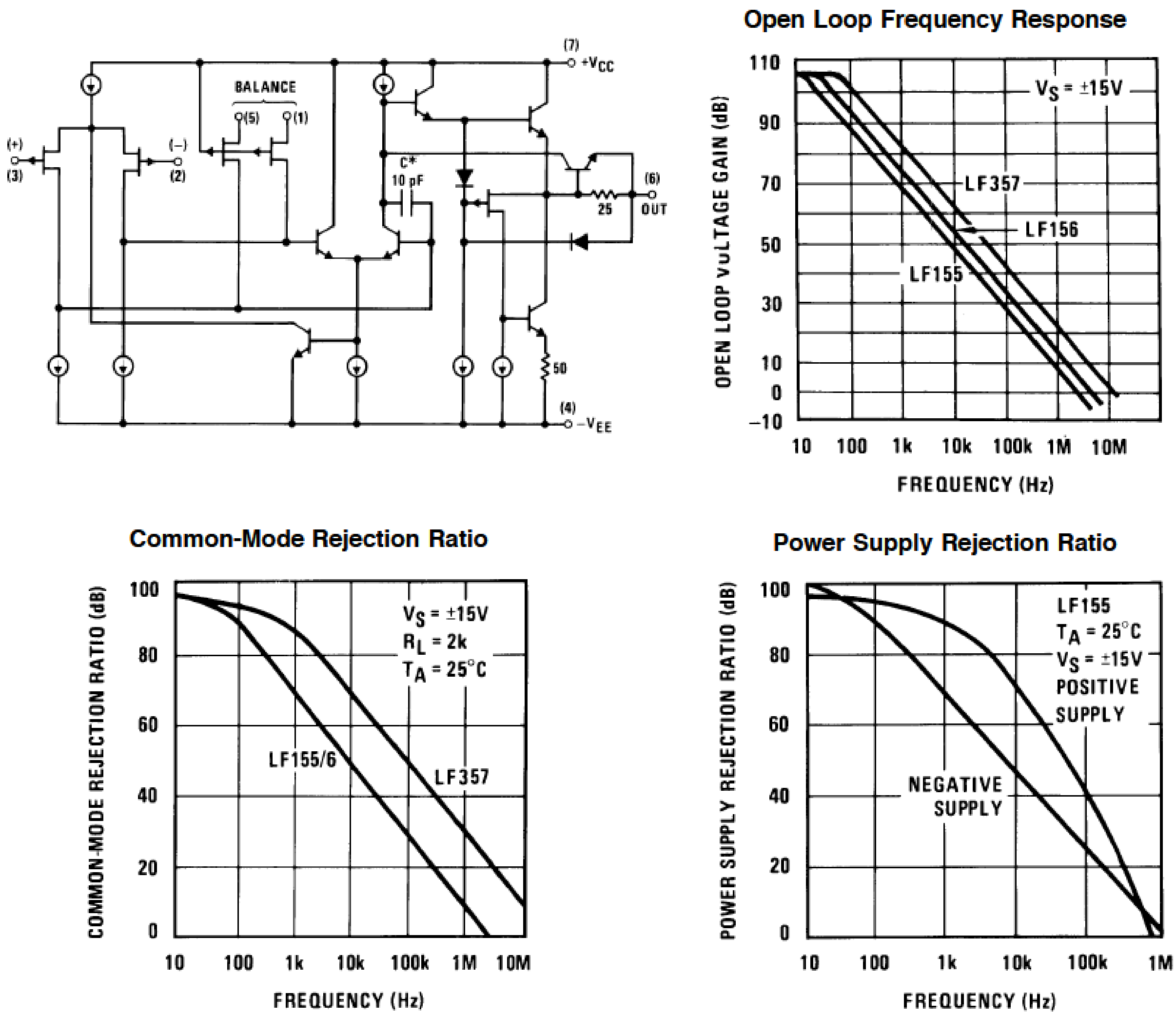


図 6-8　LF355/356/357 の等価回路、開ループゲイン、CMRR 及び PSRR

小さな入力電流を実現するため、初段はジャンクション FET による差動回路になっている。開ループゲインが 1 となるユニティーゲインバンド幅は $3MHz$ 以上、後に述べるスルーレートは $10V/\mu sec$、低周波領域では CMRR、PSRR ともに $90dB$ 以上ある。また、LF155/156 は閉ループゲイン $0dB$ まで安定性が保証されているので、特にローノイズを要求しない場合には使い易いオペアンプ IC である。一方 LF157 は開ループゲインが $14dB$ 以下となる領域では位相遅れのため、安定性が保証される閉ループゲインは $14dB$ 以上と指定されている。FET は一般にトランジスターに比べて g_m が小さいので、初段のゲインを稼ぐためにトランジスターのコレクター電流より大きいドレイン電流で動作させる。このため後に述べるように、次段の位相補償容量を含めた入力容量の充放電時間が短くなり、トランジスター入力型より FET 入力型オペアンプの方が大きなスルーレートとなる。

図 6-9 にトランジスター入力型オペアンプ IC の例として NE5534 の等価回路と特性を示す。

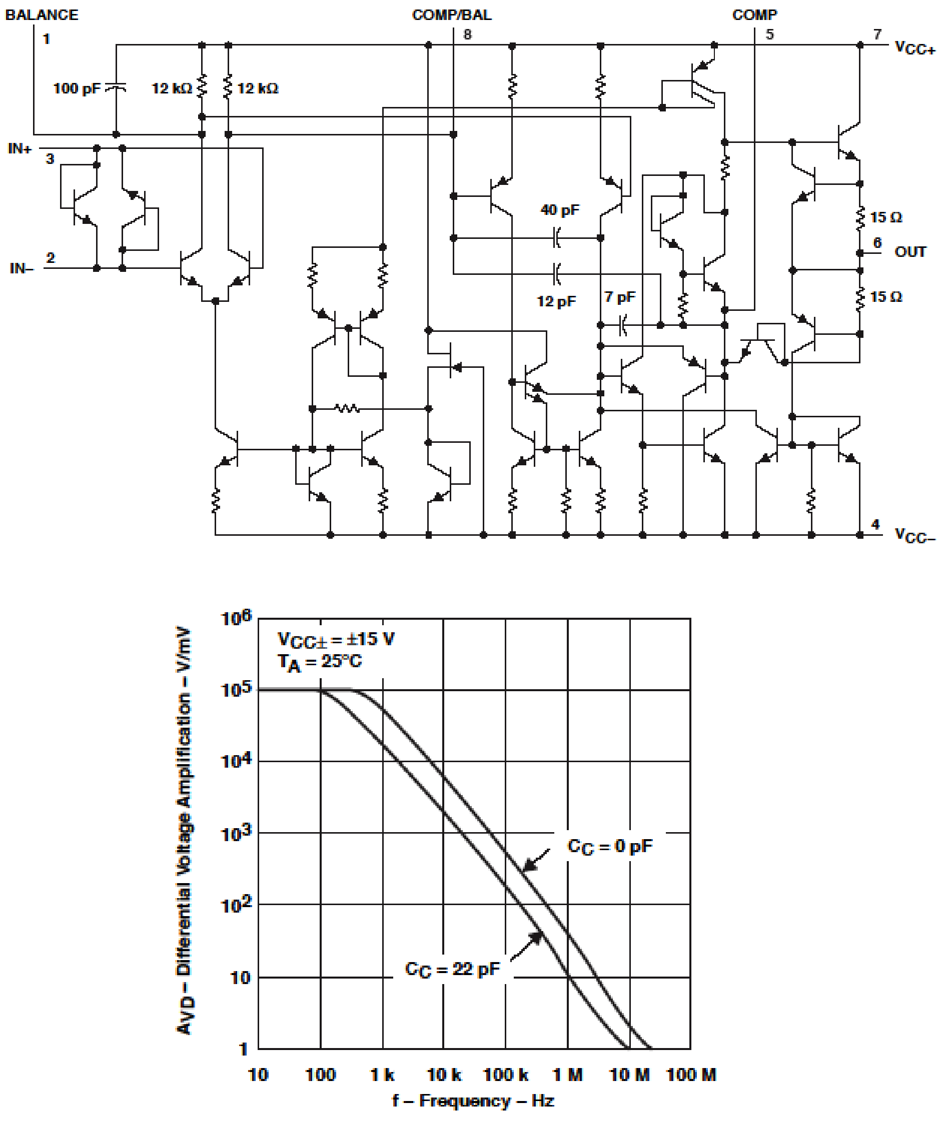


図 6-9　NE5534 の等価回路と開ループゲイン

トランジスター入力型の入力換算電圧性雑音は$v_n = 2 \sim 5nV/\sqrt{Hz}$程度のものが多く、FET 入力型の数分の１程度である。一方、入力バイアス電流（トランジスターのベース電流）が$0.1 \sim 1\mu A$程度流れるため、入力換算電流雑音が$i_n \sim pA/\sqrt{Hz}$のオーダーであるため、入力回路のインピーダンスが大きい場合には電流性雑音に注意する必要がある。また、入力バイアス電流により反転入力及び非反転入力回路の実効的な抵抗値のアンバランスにより入力オフセットを生ずるので、入力回路の抵抗値に注意を払う必要がある。NE5534 では位相補償用の外部容量C_cを５番ピンと８番ピンの間に接続することができるようになっていて、ユーザーに位相補償の自由度を提供している。フィードバックの安定性は閉ループゲイン$10dB$まで保証されており、$0dB$まで安定性が必要な場合はC_cとして$22pF$以上が必要である。C_cによる開ループゲインの特性変化は図に示すようになっている。また、$C_c = 0pF$の場合のスルーレートは$13V/\mu sec$であるが、$C_c = 22pF$では$6V/\mu sec$に低下する。閉ループゲインが$10dB$以上の場合は$C_c = 0pF$とすることで帯域幅を約３倍にできるので、位相補償を理解していれば、$0dB$まで安定性が保証されていて補償の自由度がないオペアンプより便利である。

<u>入力オフセット</u>

トランジスター入力オペアンプで注意しなければならないのは入力バイアス電流による入力オフセットである。図 6-10 に示すように、トランジスター入力型オペアンプでは、反転入力及び非反転入力にトランジスターのベースバイアス電流I_bが流れる。これによって発生する出力オフセット電圧をΔVとすると

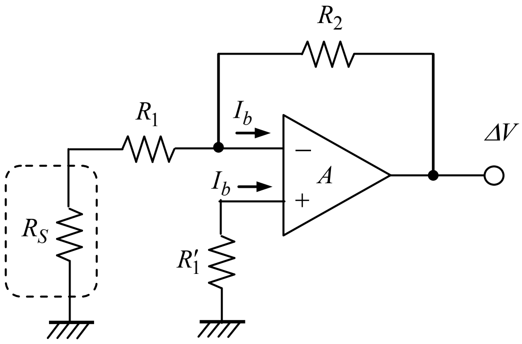


図 6-10　入力バイアス電流による
オフセットの発生

$$\frac{R_1'}{R_S + R_1} I_b = I_b - \frac{R_1' I_b + \Delta V}{R_2} \tag{6.4.1}$$

が成立し、これより

$$\Delta V = \left(1 - \frac{R_1'}{(R_S + R_1) /\!/ R_2}\right) R_2 I_b \tag{6.4.2}$$

となる。これはオペアンプ自身の入力に

$$\Delta V_{in} = \{(R_S + R_1) /\!/ R_2 - R_1'\} I_b \tag{6.4.3}$$

なる入力オフセットが存在していることと等価である。$\Delta V = 0$とするためには

$$R_1' = (R_S + R_1) /\!/ R_2 \tag{6.4.4}$$

とすることが必要であり、図 6-10 でオペアンプの非反転入力端子とグランド間に挿入されている抵抗 R_1' は、このような入力バイアス電流によって発生する入力オフセットをキャンセルするためのバランス抵抗である。トランジスター入力型オペアンプではバイアス電流は $I_b = 0.1 \sim 1\mu A$ 程度あるため

$$\Delta R = R_1' - (R_S + R_1) // R_2 \tag{6.4.5}$$

が $1k\Omega$ あると、$\Delta V_{in} = 0.1 \sim 1\,mV$ の入力オフセットを発生するので注意が必要である。一方、ジャンクション FET 入力型オペアンプでは $I_b = 1 \sim 10\ pA$ であるので、$\Delta R \sim 1M\Omega$ でもオフセットは $\Delta V_{in} = 1 \sim 10\ \mu V$ 程度に収まるので、FET 入力型オペアンプでは通常バランス抵抗 R_1' は不要である。低雑音増幅器では R_1' によって発生する雑音が無視できないので、不用意に R_1' を挿入することは避けるべきである。

6-5　電流帰還オペアンプ（current feedback operational amplifier）

以上述べたオペアンプを含む増幅回路は入力電圧に出力電圧をフィードバックすると云う意味で、電圧帰還増幅器と云う。電圧帰還型増幅器では、利得帯域幅積は一定であるため、閉ループゲインを大きくするとゲインに反比例して帯域幅は狭まってしまう。そのため、ハイゲインでかつ広帯域の増幅器を実現することは難しく、特別な回路設計技術を必要とする。そこで、そのような困難を解消すべく、コムリニア社（現在は存在しない）により電流帰還型増幅器が考案され、発売された。原理は５章のエミッター帰還型２段直結増幅器で述べたエミッター帰還の特徴を積極的に利用したものである。

原理図を図 6-11 に示す。非反転入力 v_1 はゲイン 1 のバッファーアンプ（本節末の注を参照）を通して反転入力 v_2 に出力され、反転入力端子から流れ出す電流 i_2 に比例する電圧出力 $v_0 = Z_t i_2$ を出力するものである。Z_t をトランスインピーダンス（変換インピーダンス）と云う。また、R_0 は入力バッファーの出力抵抗である。

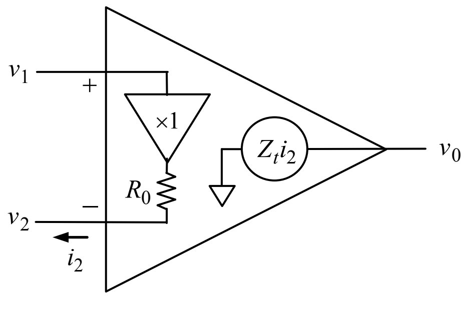


図 6-11　電流帰還オペアンプ原理図

非反転アンプ

電流帰還オペアンプに対して図 6-10 のようなフィードバックループを構成すると

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= Z_t i_2 \quad v_2 = v_1 - R_0 i_2 \\ i_2 &= \frac{v_2}{R_G} + \frac{v_2 - v_0}{R_F} \end{aligned}\right\} \tag{6.5.1}$$

が成立する。これより出力は

$$v_0 = (1 + \frac{R_F}{R_G}) \frac{A}{1+A} v_1 \qquad (6.5.2)$$

となる。ここで

$$A = \frac{Z_t / R_F}{1 + R_0 (1/R_G + 1/R_F)} \qquad (6.5.3)$$

であり、Aが通常の電圧帰還アンプにおける開ループゲインとなる。ここでR_0は十分小さく

$$R_0 (1/R_G + 1/R_F) << 1 \qquad (6.5.4)$$

であるものとすると、

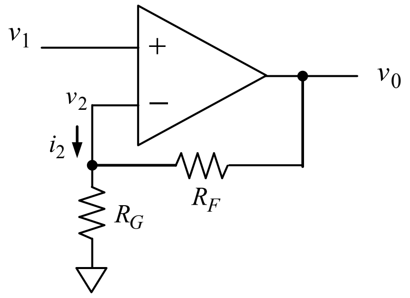


図 6-12　非反転増幅回路

$$A = \frac{Z_t}{R_F} \qquad (6.5.5)$$

となる。(6.5.2)式で分かるように、周波数特性は$A/(1+A)$で決まるので、(6.5.4)式の条件をみたしていれば、R_Fを変えずにR_Gを変えることで閉ループゲインを変えても、閉ループの周波数特性は変わらないと云う著しい特徴を有している。$A/(1+A)$ は電圧帰還アンプにおけるボルテージフォロアと同じ伝達関数であるので、極めて広帯域なアンプを容易に実現することができ、最近の 100~200MHz 帯の広帯域オペアンプ（例えばアナログデバイセズ社 AD811 等）はほとんどが電流帰還型オペアンプとなっている。実際の回路構成を図 6-13 に示す。（編注：この図でZ_tは、ゲイン 1 アンプの入力インピーダンス、コンデンサ C、および直前の 2 つのトランジスタの出力インピーダンスの和となる。）

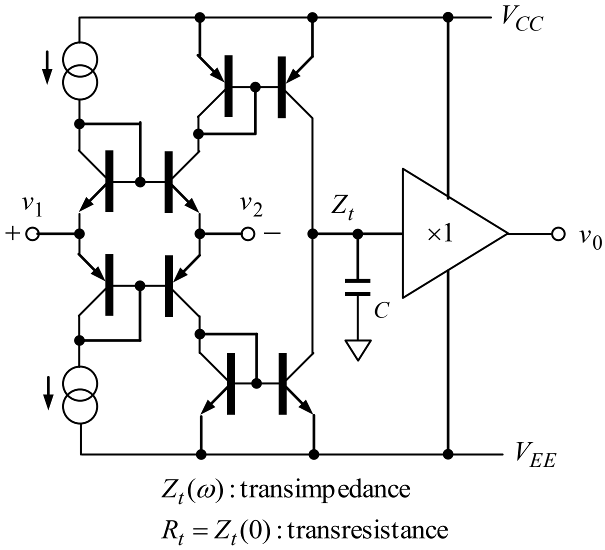


図 6-13　電流帰還オペアンプの回路構成

入力バッファーアンプをコンプリメンタリー・エミッターフォロアで構成するものとする。電流帰還オペアンプ内部の初段の負荷インピーダンス即ち、エミッターフォロアのエミッターインピーダンス（反転入力に接続されるインピーダンス）をZ_eとすると、出力は

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2(1 + h_{fe} + j\omega C_{be} h_{ie}) Z_e}{h_{ie} + 2(1 + h_{fe} + j\omega C_{be} h_{ie}) Z_e} v_1 \\ &= v_1 - \frac{h_{ie}}{2(1 + h_{fe} + j\omega C_{be} h_{ie}) Z_e} v_2 \end{aligned} \qquad (6.5.6)$$

ここで

$$i_2 = v_2 / Z_e \tag{6.5.7}$$

より

$$v_2 = v_1 - Z_0 i_2 \tag{6.5.8}$$

と書ける。ここで

$$Z_0 = \frac{h_{ie}/2}{1 + h_{fe} + j\omega C_{be} h_{ie}} \tag{6.5.9}$$

である。なお$(1+h_{fe})/C_{be}h_{ie}$は数 10MHz〜数 100MHz のオーダーであるので、数 MHz 以下の周波数領域ではZ_0は純抵抗R_0と考えてよい。

$$R_0 = \frac{h_{ie}/2}{1+h_{fe}} \cong \frac{1}{2g_m} \qquad (\omega << (1+h_{fe})/C_{be}h_{ie},\ h_{fe} >> 1) \tag{6.5.10}$$

ここで$g_m = qI_C / kT$はトランジスターの伝達コンダクタンスであり、I_Cはコレクターバイアス電流である。

使用上の注意としては、(6.5.5)式から分かるようにフィードバック抵抗R_Fを大きくすると、開ループゲインAが減少するため閉ループ帯域は狭くなってしまうので、データシートで指定されている範囲内の抵抗を用いることが勧められる。通常の電圧帰還型オペアンプと同じ感覚で使うと失敗することがあるので要注意である。

反転アンプ

反転増幅器としての結線は図 6-14 のようになり、回路方程式は

$$\left.\begin{aligned} & I_2 + \frac{V_{out} - V_2}{Z_F} = \frac{V_2 - V_{in}}{Z_G} \\ & V_2 = V_1 - R_0 I_2,\quad V_{out} = Z_t I_2,\quad V_1 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.5.11}$$

と書ける。これより

$$\left.\begin{aligned} & V_{out} = -\frac{Z_F}{Z_G}\frac{K}{1+K} V_{in} \\ & K = \frac{Z_t}{Z_F(1 + R_0/Z_G) + R_0} \end{aligned}\right\} \tag{6.5.12}$$

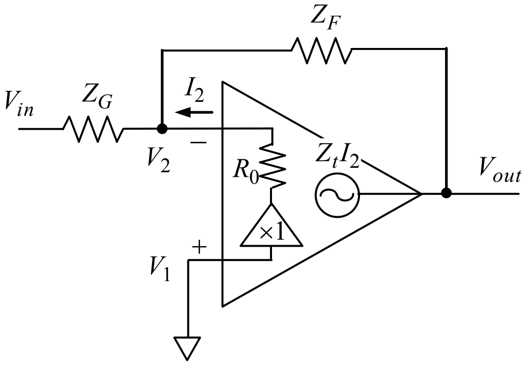


図 6-14　反転増幅器

即ちオープンループゲインは非反転増幅の場合と同じである。

注： 入力部アンプのゲインがαの場合、(6.5.1)式のv_2は $v_2 = \alpha v_1 - R_0 v_0 / Z_t$ で与えられ、出力は

$$v_0 = \alpha(1+\frac{R_F}{R_G})\frac{\dfrac{Z_t/R_F}{1+R_0(1/R_G+1/R_F)}}{1+\dfrac{Z_t/R_F}{1+R_0(1/R_G+1/R_F)}}v_1$$

$$\xrightarrow[R_G\to\infty]{} \alpha\frac{Z_t/(R_F+R_0)}{1+Z_t/(R_F+R_0)}v_1$$

となる。

6-6　演算増幅器を用いた種々の回路

6-6-1 加算回路

オペアンプ回路の設計を行う場合、通常はオープンループゲインは十分大きく反転入力と非反転入力間の電位差がないとして（イマジナリショートという）設計する。オペアンプの反転入力と非反転の間のイマジナリショートを仮定すると、図 6-16 の回路方程式は

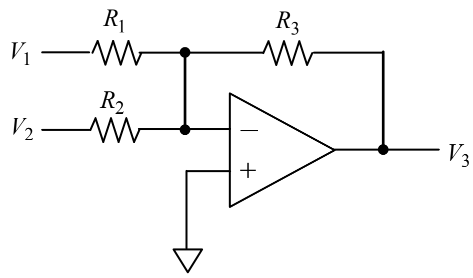


図 6-16　加算回路

$$\frac{V_1}{R_1}+\frac{V_2}{R_2}=-\frac{V_3}{R_3} \qquad (6.6.1)$$

となる。これより

$$V_3 = -(\frac{R_3}{R_1}V_1+\frac{R_3}{R_2}V_2) \qquad (6.6.2)$$

となり、入力 V_1、V_2 を R_3/R_1、R_3/R_2 の重みで加算した出力 V_3 を得る。

一方、イマジナリショート近似を行わずに厳密解を求めると次のようになる。オペアンプのオープンループゲインを A とすると

$$\frac{1}{R_1}(V_1+\frac{V_3}{A})+\frac{1}{R_2}(V_2+\frac{V_3}{A})=-\frac{1}{R_3}(\frac{V_3}{A}+V_3) \qquad (6.6.3)$$

これより

$$\left.\begin{aligned} &V_3 = -G(\frac{R_3}{R_1}V_1+\frac{R_3}{R_2}V_2) \\ &G=\frac{\beta A}{1+\beta A} \end{aligned}\right\} \qquad (6.6.4)$$

ここで

$$\beta = \frac{(R_1 // R_2 // R_3)}{R_3} \tag{6.6.5}$$

は帰還率であり、$|\beta A| >> 1$であればイマジナリショート近似が成立する。βは加算する入力の数が多いと小さくなるため、クローズドループの周波数帯域は入力の数とともに狭くなるので注意が必要である。

6-6-2 減算回路

$$\frac{1}{R_1}(V_2 - \frac{R_2}{R_1+R_2}V_1) = \frac{1}{R_2}(\frac{R_2}{R_1+R_2}V_1 - V_3) \tag{6.6.6}$$

$$V_3 = \frac{R_2}{R_1}(V_1 - V_2) \tag{6.6.7}$$

同相成分を十分に抑圧するためにはR_1、R_2を精度良くバランスをとる必要がある。抵抗に誤差がある場合

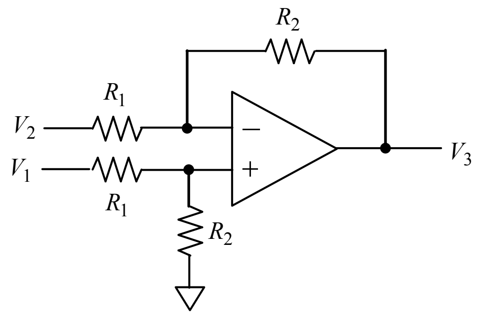


図 6-17　減算回路

$$\frac{1}{R_1+\Delta R_1'}(V_2 - \frac{R_2+\Delta R_2''}{R_1+R_2+\Delta R_1''+\Delta R_2''}V_1) = \frac{1}{R_2+\Delta R_2'}(\frac{R_2+\Delta R_2''}{R_1+R_2+\Delta R_1''+\Delta R_2''}V_1 - V_3) \tag{6.6.8}$$

より

$$V_3 = G_D(V_1 - V_2) + G_C(V_1 + V_2) \tag{6.6.9}$$

となる。ここで

$$\left.\begin{aligned} G_D &= \frac{R_2}{R_1}[1 - \frac{R_1+2R_2}{2R_1(R_1+R_2)}(\Delta R_1' - \Delta R_2') + \frac{R_1}{2(R_1+R_2)}(\frac{\Delta R_2''}{R_2} - \frac{\Delta R_1''}{R_1})] \\ G_C &= \frac{R_1(\Delta R_2'' - \Delta R_2') + R_2(\Delta R_1' - \Delta R_1'')}{2(R_1+R_2)R_1} \end{aligned}\right\} \tag{6.6.10}$$

はそれぞれ差動ゲイン及び同相ゲインである。同相ゲインを$G_C = 0$とするには$\Delta R_1' = \Delta R_1''$及び$\Delta R_2' = \Delta R_2''$でなければならない。即ち精度の良い減算のためには$R_1$及び$R_2$のバランスが良くとれていることが望まれる。

6-6-3 差動増幅回路

前記の減算回路において二つの入力信号源の内部インピーダンスをZ_1、Z_2とすると

$$V_3 = \frac{R_2}{R_1+Z_2}\{\frac{R_1+R_2+(Z_2+Z_1)/2}{R_1+R_2+Z_1}(V_1-V_2)+\frac{(Z_2-Z_1)/2}{R_1+R_2+Z_1}(V_1+V_2)\} \qquad (6.6.11)$$

となり、$Z_1 \neq Z_2$ の場合は入力の同相成分(V_1+V_2)が出力に現れる。したがって差動増幅器として用いた場合信号源インピーダンスの詳細が不明の場合は同相雑音を拾ってしまう可能性があり、医療機器における生体電位の観測等のような大きな同相雑音環境のもとでは、雑音抑圧能力の不足のために使用できない場合が多い。そこで医療機器等においては、入力インピーダンスが高くかつ大きな同相信号除去能力を持つ計装アンプまたはインスツルメンテーションアンプと呼ばれる差動増幅器（図 6-18）が用いられる。

図 6-18 より

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= V_1' + \frac{R_1(V_2'-V_1')}{2R_1+R_2} \\ V_2 &= V_2' + \frac{R_1(V_1'-V_2')}{2R_1+R_2} \end{aligned}\right\} \qquad (6.6.12)$$

したがって

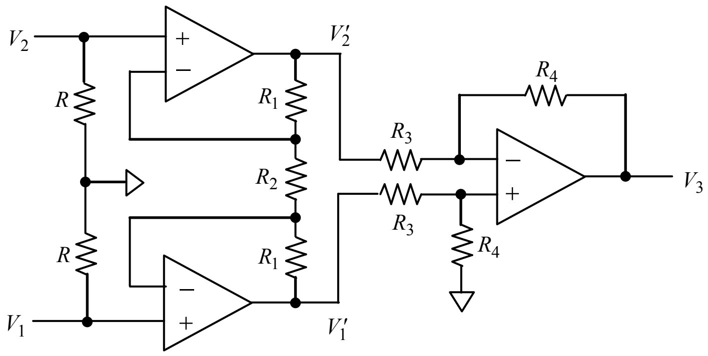


図 6-18　インスツルメンテーションアンプ

$$\left.\begin{aligned} V_1' &= \frac{1}{2}(1+\frac{2R_1}{R_2})(V_1-V_2)+(V_1+V_2) \\ V_2' &= -\frac{1}{2}(1+\frac{2R_1}{R_2})(V_1-V_2)+(V_1+V_2) \end{aligned}\right\} \qquad (6.6.13)$$

となるので(6.6.7)式より出力は

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{R_4}{R_3}(V_1'-V_2') \\ &= (1+\frac{2R_1}{R_2})\frac{R_4}{R_3}(V_1-V_2) \end{aligned} \qquad (6.6.14)$$

となる。信号源インピーダンスによる影響を避けるためRは信号源インピーダンスより十分大きな値とすることが必要である。また、二つのR_1に誤差$\Delta R'$、$\Delta R''$がある場合は

$$\left.\begin{aligned} V_1-V_2 &= \frac{R_2}{2R_1+R_2+\Delta R'+\Delta R''}(V_1'-V_2') \\ V_1+V_2 &= V_1'+V_2' - \frac{(\Delta R'-\Delta R'')(V_1'-V_2')}{2R_1+R_2+\Delta R'+\Delta R''} \end{aligned}\right\} \qquad (6.6.15)$$

$$\left.\begin{aligned} V_1' - V_2' &= \left(1 + \frac{2R_1}{R_2} + \frac{\Delta R'}{R_2} + \frac{\Delta R''}{R_2}\right)(V_1 - V_2) \\ V_1' + V_2' &= \left(\frac{\Delta R'}{R_2} - \frac{\Delta R''}{R_2}\right)(V_1 - V_2) + (V_1 + V_2) \end{aligned}\right\} \qquad (6.6.16)$$

より、R_1のバランス誤差によって初段の同相出力$V_1' + V_2'$には差動成分が混入するが、差動出力$V_1' - V_2'$には同相成分は含まれないことが分かる。したがって同相信号に対する抑圧能力はR_3、R_4のバランス精度で決まる。

6-6-4　移相回路（phase shifter）

振幅を変えずに位相のみを変えるものを移相器（phase shifter）という。フィルターの一種であり全域通過フィルターともいう。

最も簡単な1次のフェーズシフターは図6-19の回路で実現される。

$$\frac{1}{R_1}\left(V_1 - \frac{R}{1/j\omega C + R}V_1\right) = \frac{1}{R_1}\left(\frac{R}{1/j\omega C + R}V_1 - V_2\right) \qquad (6.6.17)$$

より出力応答は

$$V_2 = -\frac{1 - j\omega CR}{1 + j\omega CR}V_1 \qquad (6.6.18)$$

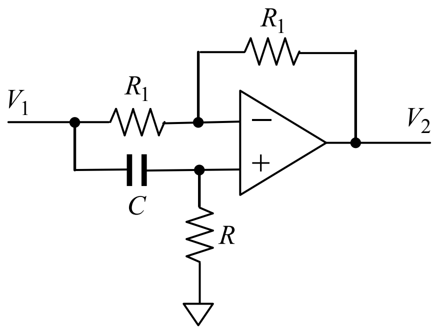


図6-19　移相回路（1次）

で与えられ、ω_0=1/RCを0～∞の範囲で変えると位相は−180°～0°変化する。1次のフェーズシフターはRとして可変抵抗器を用いることで位相を連続的に変えることができるので、可変フェーズシフターによく利用される。

2次のフェーズシフターの周波数伝達関数は

$$V_2 = G_0 \frac{1 - j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2}V_1 \qquad (6.6.19)$$

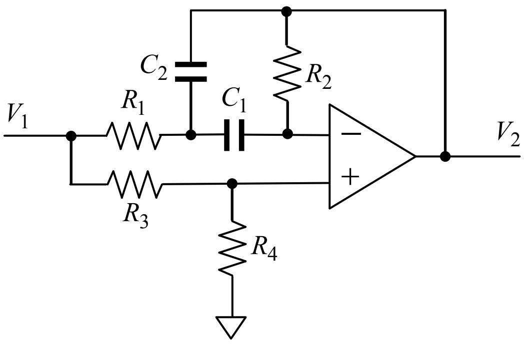


図6-20　移相回路（2次）

で与えられ、図6-20の回路で実現される。出力V_2は

$$\begin{cases} \dfrac{1}{R_1}(V_1 - V) = j\omega C_1(V - \dfrac{R_4}{R_3 + R_4}V_1) + j\omega C_2(V - V_2) \\ j\omega C_1(V - \dfrac{R_4}{R_3 + R_4}V_1) = \dfrac{1}{R_2}(\dfrac{R_4}{R_3 + R_4}V_1 - V_2) \end{cases} \tag{6.6.20}$$

より

$$V_2 = \frac{R_4}{R_3 + R_4}\frac{1 - j\omega\{C_1R_2R_3/R_4 - (C_1 + C_2)R_1\} - \omega^2C_1C_2R_1R_2}{1 + j\omega(C_1 + C_2)R_1 - \omega^2C_1C_2R_1R_2}V_1 \tag{6.6.21}$$

となる。これが (6.6.19)式の形となるためには

$$C_1R_2R_3/R_4 - (C_1 + C_2)R_1 = (C_1 + C_2)R_1 \tag{6.6.22}$$

即ち

$$\frac{R_3}{R_4} = 2(1 + \frac{C_2}{C_1})\frac{R_1}{R_2} \tag{6.6.23}$$

でなければならない。このとき図 6-20 は２次のフェーズシフターとなり ω_0、Q、G_0は

$$\omega_0^2 = \frac{1}{C_1C_2R_1R_2},\quad Q = \frac{\sqrt{C_1C_2}}{C_1 + C_2}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}},\quad G_0 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \tag{6.6.24}$$

で与えられる。

6-6-5 容量マルチプライヤー

大きな容量が必要な場合によく用いられる回路として容量マルチプライヤーがある。図 6-21 に示す回路において

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{V}{R_1} + j\omega C_1(V - V') \\ V' &= -\frac{R_2}{R_1}V \end{aligned}\right\} \tag{6.6.25}$$

であるから入力とグランド間のアドミッタンスは

$$\frac{1}{Z} = \frac{I}{V} = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1(1 + \frac{R_2}{R_1}) \tag{6.6.26}$$

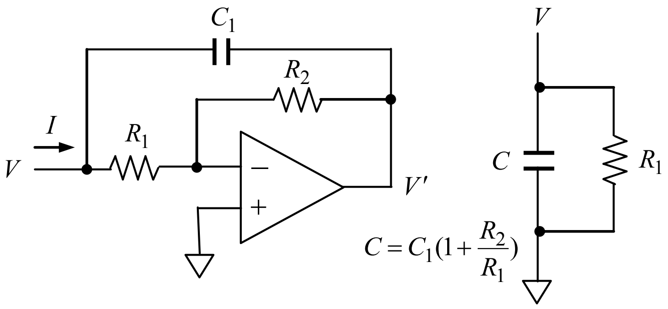


図 6-21　容量マルチプライヤー

となる。即ち入力インピーダンスは

$$C = C_1(1 + \frac{R_2}{R_1}) \tag{6.6.27}$$

なる容量C と抵抗R_1の並列インピーダンスと等価になる。

6-6-6 シミュレーテッドインダクタ

LC フィルター等では低周波では大きなインダクタンスが必要となるが、インダクタは誤差が大きいために調整が必要となり、また形状が大きくなるため実装密度の高い回路では使いにくい。そのためオペアンプを用いてインダクタンスと等価なインピーダンスをシミュレートした回路(図 6-22))が用いられる。図 6-22 の回路方程式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{V-V'}{R_1}=\frac{V'}{R_2}+j\omega C(V'-V) \\ &I=\frac{V-V'}{R_1} \end{aligned}\right\} \qquad (6.6.28)$$

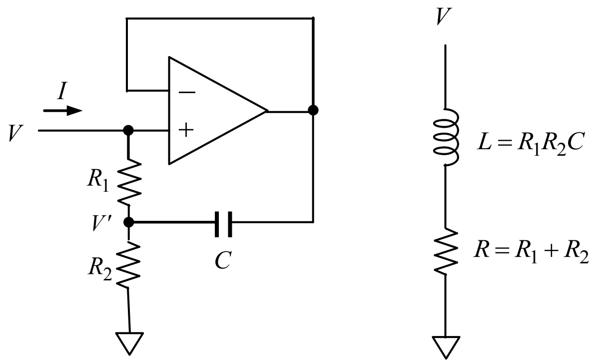


図 6-22　シミュレーテッドインダクタ

より

$$Z=\frac{V}{I}=(R_1+R_2)+j\omega CR_1R_2 \qquad (6.6.29)$$

即ち入力インピーダンスは

$$L=CR_1R_2, \qquad R=R_1+R_2 \qquad (6.6.30)$$

なるインダクタンスと抵抗の直列インピーダンスと等価なインピーダンスとなる。

6-6-7 GIC 回路

上記の容量マルチプライヤーやシミュレーテッドインダクタでは容量やインダクタンスに直列抵抗が入るため理想的なCやLにはならない。そこで理想的なCやLを実現する回路として図 6-23 に示す GIC（General Impedance Converter）がある。図 6-23 の各部の電圧電流の関係を書き下すと以下のようになる。

$$\left.\begin{aligned} &I_1=\frac{V_1-V_2}{Z_1}, \qquad I_2=\frac{V_2-V_3}{Z_2}=\frac{V_3-V_4}{Z_3} \\ &I_4=\frac{V_4-V_5}{Z_4}=\frac{V_5-V_1'}{Z_5}, \qquad V_1=V_3=V_5 \end{aligned}\right\} \qquad (6.6.31)$$

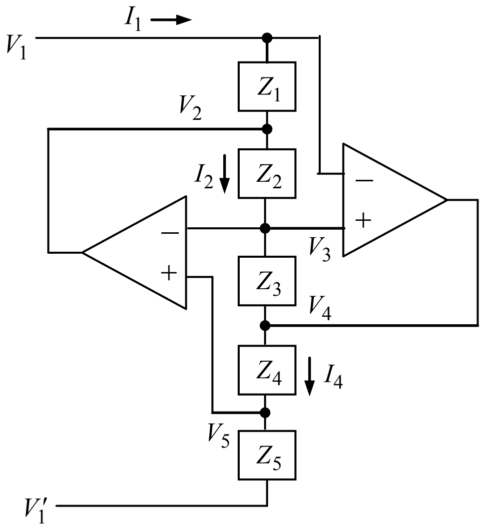


図 6-23　GIC 回路

これよりインピーダンスは

$$Z = \frac{V_1 - V_1'}{I_1} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} \qquad (6.6.32)$$

となる。ここで Z_1、Z_3、Z_5 のいずれか一つを容量とし他の Z_i を全て抵抗とするとインピーダンスは純粋な容量となる。また Z_2、Z_4 のいずれか一つを容量とし他の Z_i を全て抵抗とすると Z は純粋なインダクタンス L となる。例えば図 6-24 の場合は

$$Z = j\omega L$$
$$L = CR_1R_3R_5 / R_4$$

である。なお、Z_1、Z_3、Z_5 のうち二つを容量とし他の Z_i を全て抵抗とすると Z は

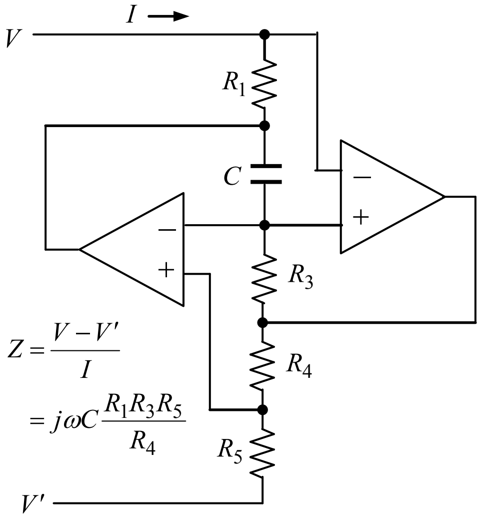


図 6-24　GIC による純粋なインダクタンス

$$Z = 1/\omega^2 D$$

なる ω 依存性を持つ。このような ω 依存性を持つ素子を D 素子と呼び、D 素子を用いて構成される能動フィルターを FDNR フィルターという。

6-6-8 絶対値回路

3-1 節で述べたようにダイオードには図 6-25 に示すような不感帯が存在する。このような不感帯を無くして理想的なダイオード特性とするため図 6-26 のような回路が用いられる。オペアンプのゲインは十分大きいものとするとオペアンプの出力 V は図の破線のように変化し、$V_1 > 0$ では $V_2 = 0$、$V_1 < 0$ では $V_2 = -V_1$ となる。

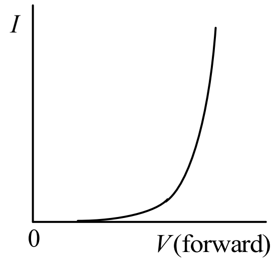
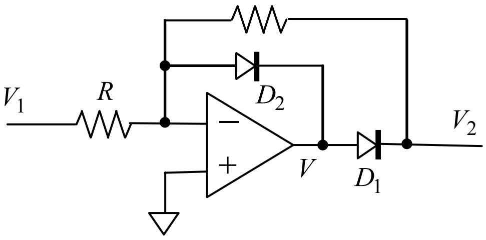
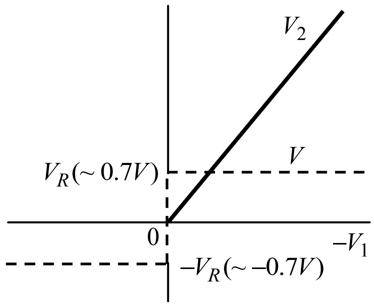


図 6-25　ダイオードの不感帯



(a) 回路例



(b) 出力電圧

図 6-26　理想ダイオード回路

このような理想ダイオード回路を用いて、図 6-27 に示すような入力電圧の絶対値を出力する絶対値回路を構成することができる。理想ダイオード回路の動作から分かるように

$$V' = \begin{cases} -V_1 & (V_1 \geq 0) \\ 0 & (V_1 < 0) \end{cases} \tag{6.6.33}$$

であるので、出力は

$$V_2 = -(V_1 + 2V') = \begin{cases} V_1 & (V_1 \geq 0) \\ -V_1 & (V_1 < 0) \end{cases} \tag{6.6.34}$$

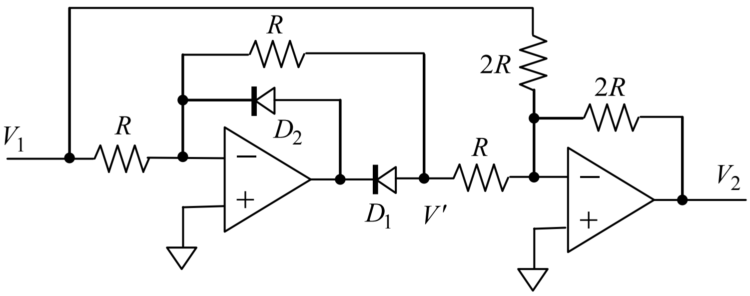


図 6-27　絶対値回路

即ち $V_2 = |V_1|$ となる。

7章　非線形演算回路

7-1 トランジスタリニア回路

　トランジスターの指数関数特性を利用して種々の非線形回路を実現することができる。その基本はバリー・ギルバートによる図7-1に示すトランスリニア回路である。

　3-2-4節の(3.2.9)式において

$$I_{EBS} = \frac{\alpha_N}{1-\alpha_I\alpha_N} I_{EB0} \qquad (7.1.1)$$

と置き、また良い近似でI_{CB0}を無視できるものとすると、トランジスターのコレクター電流は

$$I_C = I_{EBS} e^{qV_{BE}/kT} \qquad (7.1.2)$$

と書ける。ここでV_{BE}はベース・エミッター間電圧である。そこで$2n$個のトランジスターからなる図7-1のトランスリニア回路を考える。

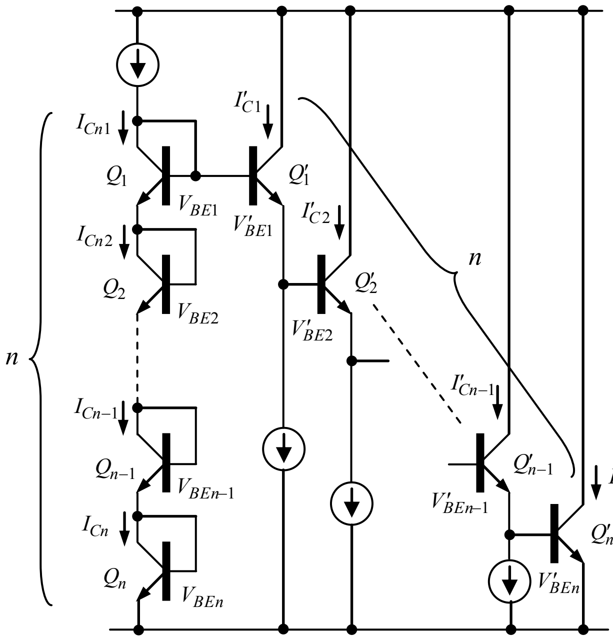


図7-1　トランスリニア回路

トランジスターの特性は良く揃っているものとしてI_{EBS}は全て同じとする。

$$V_{BE1} + V_{BE2} + \cdots + V_{BEn} = V'_{BE1} + V'_{BE2} + \cdots + V'_{BEn} \qquad (7.1.3)$$

において

$$V_{BE} = \frac{kT}{q} \ln \frac{I_C}{I_{EBS}} \qquad (7.1.4)$$

を代入すると

$$\ln\frac{I_{C1}}{I_{EBS}} + \ln\frac{I_{C2}}{I_{EBS}} + \cdots + \ln\frac{I_{Cn}}{I_{EBS}} = \ln\frac{I'_{C1}}{I_{EBS}} + \ln\frac{I'_{C2}}{I_{EBS}} + \cdots + \ln\frac{I'_{Cn}}{I_{EBS}} \qquad (7.1.5)$$

より

$$\frac{I_{C1}}{I_{EBS}}\frac{I_{C2}}{I_{EBS}}\cdots\frac{I_{Cn}}{I_{EBS}} = \frac{I'_{C1}}{I_{EBS}}\frac{I'_{C2}}{I_{EBS}}\cdots\frac{I'_{Cn}}{I_{EBS}}$$

即ち

$$I_{C1}I_{C2}\cdots I_{Cn} = I'_{C1}I'_{C2}\cdots I'_{Cn} \qquad (7.1.6)$$

を得る。これをトランスリニア原理と呼ぶ。

例として図 7-2 に示す$n=2$のトランスリニア回路を考える。トランジスターのh_{FE}は十分大きく、ベース電流を無視することができるものとすると

$$\begin{cases} I_{C1}=I_{C2}=I_X \\ I'_{C1}=I_0 \\ I'_{C2}=I_Y \end{cases} \tag{7.1.7}$$

より

$$I_Y=\frac{I_X^2}{I_0} \tag{7.1.8}$$

となる。I_Xを入力電流、I_Yを出力電流とすると入力の２乗に比例する出力が得られることになる。トランジスターを n 個ずつ用いれば同様にして n 乗の出力が得られる。これらを組み合わせることで任意の多項式の関数を実現することができる。さらにトランスリニア原理を用いて乗算、除算を行うこともできる。図 7-3 にトランスリニア原理を適用すると

$$I_XI_Y=I_0I_Z \tag{7.1.9}$$

即ち

$$I_Z=\frac{I_XI_Y}{I_0} \tag{7.1.10}$$

を得る。I_X、I_Yを入力とすると、出力I_Zはこれらの積となる。またI_X、I_0を入力にすれば、出力I_Zは除算結果（I_X/I_0）となる。なおトランスリニア回路ではトランジスターのベース電流は十分小さいものとして無視していることから、$h_{FE}\sim100$程度のトランジスターでは誤差が目立ってしまうので、$h_{FE}\sim1000$程度のトランジスターの使用が望ましい。

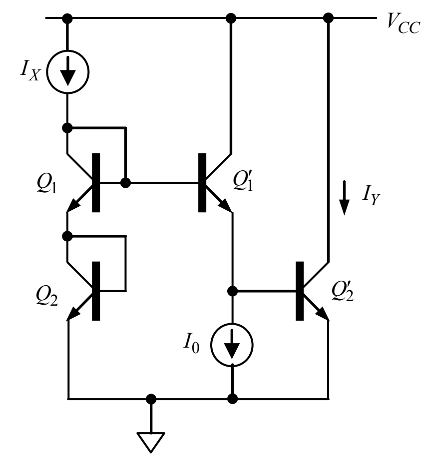


図 7-2　２乗回路

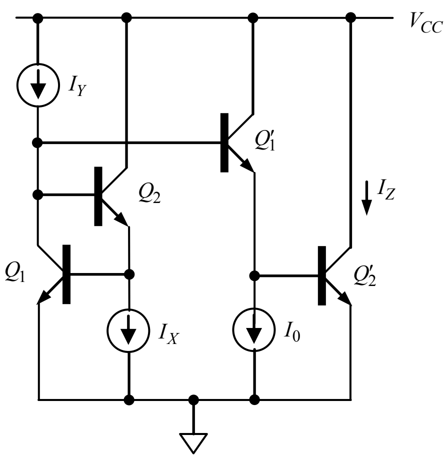


図 7-3　乗除算回路

以上のトランスリニア回路による演算は入力、出力ともに正の領域、即ち第一象限に限られる。そこで入力、出力ともに正負の領域で動作するギルバートセルと呼ばれる四象限乗算回路がバリー・ギルバートにより考案された（実際にはギルバートセルの後でトランスリニア回路が考案された）。

7-2　四象限乗算回路（ギルバートセル）

アナログ乗算回路はトランジスターの指数関数特性を利用した可変伝達コンダクタンス乗算回

路が用いられ、実用的には図 7-4 に示すギルバート乗算回路（ギルバートセル）と呼ばれる、広い線形動作領域を有し正負いずれの入力電圧に対しても動作する、四象限可変コンダクタンス乗算回路が IC 化されて用いられている。

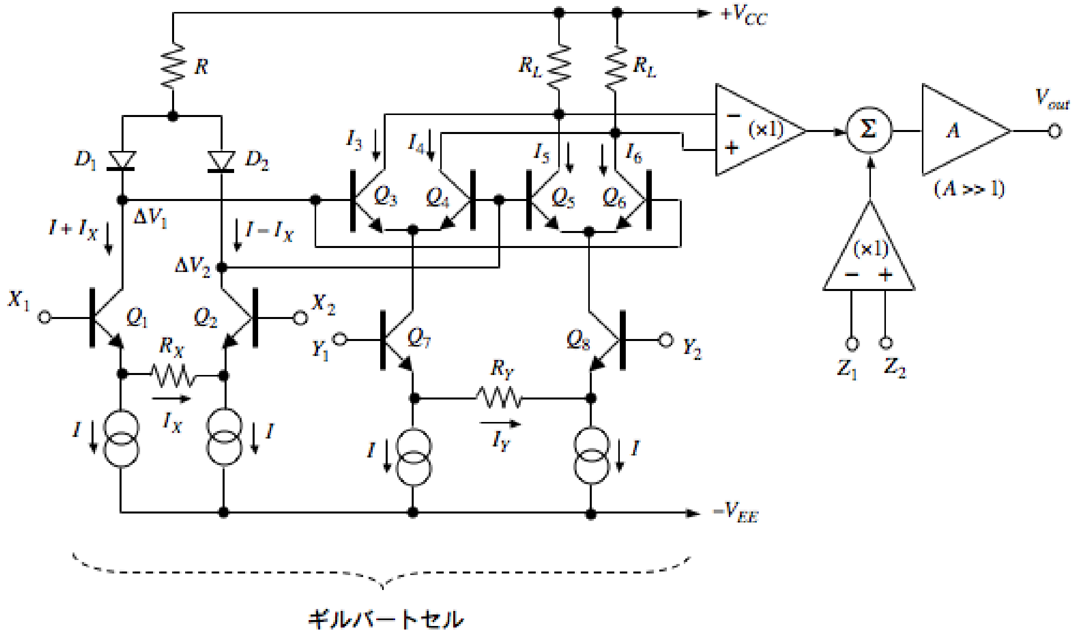


図 7-4　ギルバート乗算回路によるアナログ乗算 IC の構成

トランジスターのコレクター電流とベース・エミッター間電圧の関係は(3.2.12)式より

$$I_C = I_0 \exp(qV_{BE}/kT)$$

で与えられるので、Q_3, Q_4, Q_5, Q_6のコレクター電流は、ベース電圧変化ΔV_1、ΔV_2に対して

$$(I_3 + I_5) - (I_4 + I_6) = \frac{Y_1 - Y_2}{R_Y}\left(e^{q\Delta V_1/kT} - e^{q\Delta V_2/kT}\right) \tag{7.2.1}$$

となる。一方Q_1, Q_2, D_1, D_2からなる指数特性補償回路によって

$$e^{q\Delta V_1/kT} - e^{q\Delta V_2/kT} = 2\frac{X_1 - X_2}{IR_X} \tag{7.2.2}$$

となるので

$$(I_3 + I_5) - (I_4 + I_6) = 2\frac{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2)}{R_X R_Y I} \tag{7.2.3}$$

となり、$(X_1 - X_2)$と$(Y_1 - Y_2)$の積に比例した出力

$$V_{out} = A\{K(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) - (Z_1 - Z_2)\} \tag{7.2.4}$$

が得られる。ここでKは$1/V$の次元を持つ規格化定数で

$$K = \frac{2R_L}{R_X R_Y I} \tag{7.2.5}$$

であり、出力増幅器のゲインAは$70dB$程度である。またRは$Q_3 \sim Q_6$のコレクタ・ベース間バイアス電圧を適正な値にするための抵抗である。

通常は$A >> 1$として、図 7-5 のようにZ_1入力を出力に接続して用いられる。この場合は

$$Z_1 = V_{out} \tag{7.2.6}$$

より

$$V_{out} = K(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) + Z_2 \tag{7.2.7}$$

となる。

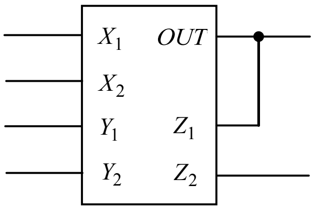


図 7-5　乗算演算

また、図 7-4 の回路は乗算のみでなく、除算、平方根演算が簡単に行えるように考えられた構成である。

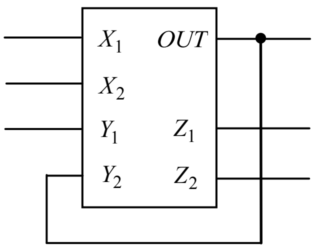


図 7-6　除算演算

除算演算：図 7-6 のような接続をすると

$$Y_2 = V_{out} \tag{7.2.8}$$

より出力は

$$V_{out} = \frac{AK(X_1 - X_2)}{1 + AK(X_1 - X_2)} Y_1 - \frac{A(Z_1 - Z_2)}{1 + AK(X_1 - X_2)} \tag{7.2.9}$$

で与えられ

$$|X_1 - X_2| >> \frac{1}{AK} \tag{7.2.10}$$

では

$$V_{out} = \frac{1}{K} \frac{Z_2 - Z_1}{X_1 - X_2} + Y_1 \tag{7.2.11}$$

となる。

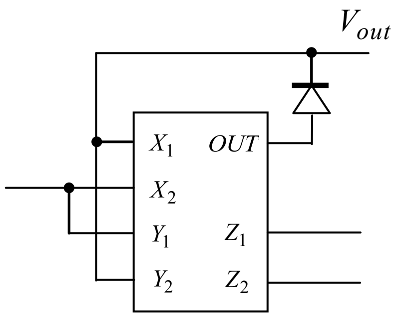


図 7-7　平方根演算

平方根演算：図 7-7 のように出力からダイオードを介してX_1、Y_2入力に接続し、Z_1、Z_2を入力とし、またX_2とY_1を接続して補助入力とし、X_1を出力とすると

$$\left.\begin{aligned} X_1 = Y_2 = V_{out} - V_D,\quad X_2 = Y_1 \\ X_1 = Y_2 = V_{out} - V_D,\quad X_2 = Y_1 \end{aligned}\right\} \tag{7.2.12}$$

より

$$K(X_1 - X_2)^2 = (Z_2 - Z_1) - \frac{X_1 + V_D}{A} \tag{7.2.13}$$

したがってAが十分大きく

$$Z_2 - Z_1 >> |X_1 + V_D| / A \tag{7.2.14}$$

であれば

$$X_1 = \sqrt{\frac{Z_2 - Z_1}{K}} + X_2 \tag{7.2.15}$$

となり、$X_1 - X_2$は$Z_2 - Z_1$の平方根に比例する。ここで

$$K = 1/10V, \quad A = 3162\ (70dB)$$

とすると(7.2.10)式及び(7.2.14)式の成立範囲はそれぞれ

$$|X_1 - X_2| >> 3mV$$

$$Z_2 - Z_1 >> 3mV$$

である。即ち除算、平方根演算では入力レベルが小さいときには誤差が増えるので、使用に当たっては信号レベルに十分注意することが必要である。

7-3 対数増幅回路

ダイオードまたはトランジスターの指数関数特性を利用して対数増幅器を実現することができる。図 7-8 に示すようにオペアンプの負帰還回路にトランジスターを挿入することを考える。トランジスターのコレクター電流I_Cはベース・エミッター間電圧をV_{BE}として、

$$I_C = I_{EBS} e^{qV_{BE}/kT} \tag{7.3.1}$$

で与えられる。ここで

$$V_1 / R = I_C \tag{7.3.2}$$

より

$$\begin{cases} V_1 / R = I_{EBS} e^{qV_{BE}/kT} \\ V_2 = -V_{BE} \end{cases} \tag{7.3.3}$$

が成立する。これより出力電圧V_2は

$$V_2 = -\frac{kT}{q} \ln \frac{V_1}{RI_{EBS}} \tag{7.3.4}$$

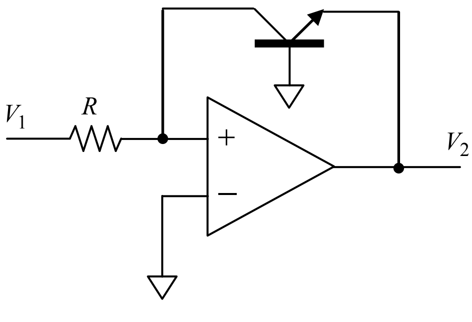


図 7-8　対数増幅器の原理

となる。但しこのままでは飽和電流I_{EBS}の温度依存性が大きいので、温度によるオフセット変化（$-\ln(RI_{EBS})$）が大きく実用にはならない。そこで実用回路では図 7-9 に示すように、特性の揃ったペアトランジスターを用いてI_Sの温度依存性を打ち消している。

図 7-9 において

$$
\left.\begin{aligned}
&V_1/R_1 = I_{EBS1}e^{qV_{BE1}/kT} \\
&I_0 = I_{EBS2}e^{qV_{BE2}/kT} \\
&V_2 = (1+\frac{R_3}{R_2})(-V_{BE1}+V_{BE2})
\end{aligned}\right\} \tag{7.3.5}
$$

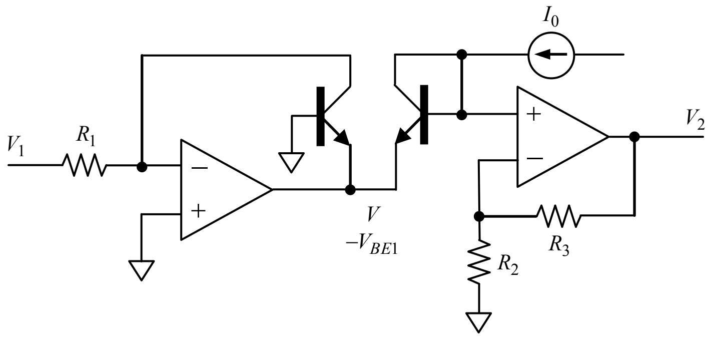


図 7-9　対数増幅器の温度補償

が成立する。ここで

$$
V_{BE1} = \frac{kT}{q}\ln(\frac{V_1/R_1}{I_{EBS1}}),\quad V_{BE2} = \frac{kT}{q}\ln(\frac{I_0}{I_{EBS2}}) \tag{7.3.6}
$$

を用いると、出力は

$$
V_2 = -(1+\frac{R_3}{R_2})\frac{kT}{q}(\ln\frac{V_1}{R_1I_0}+\ln\frac{I_{EBS2}}{I_{EBS1}}) \tag{7.3.7}
$$

となる。２個のトランジスターの特性が良く揃っていれば$I_{EBS1} = I_{EBS2}$であるので

$$
\begin{aligned}
V_2 &= -(1+\frac{R_3}{R_2})\frac{kT}{q}\ln\frac{V_1}{R_1I_0} \\
&= -\frac{1+R_3/R_2}{\log_{10}e}\frac{kT}{q}\log_{10}\frac{V_1}{R_1I_0}
\end{aligned} \tag{7.3.8}
$$

となり、I_{EBS}による温度依存性が打ち消される。但し利得係数にkT/qの項があるので、利得係数の温度依存性を打ち消すためにR_2として

$$
\frac{1}{R_2}\frac{dR_2}{dT} = \frac{1}{T}(1+\frac{R_2}{R_3}) \tag{7.3.9}
$$

なる温度係数を持つ抵抗を用いて、係数 $(1+R_3/R_2)kT/q$ が温度変化に対して一定となるようにする必要がある。図 7-9 において$I_0 = 1\,\mathrm{mA}$、$R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}$、$R_2 = 970\,\Omega$、$R_3 = 15.3\,\mathrm{k\Omega}$としたときの対数増幅器を回路シミュレータ Spice でシミュレーションした結果を図 7-10 に示す。入力 1 mV から 10 V の４桁に渡ってきれいな対数特性となっていることが分かる。

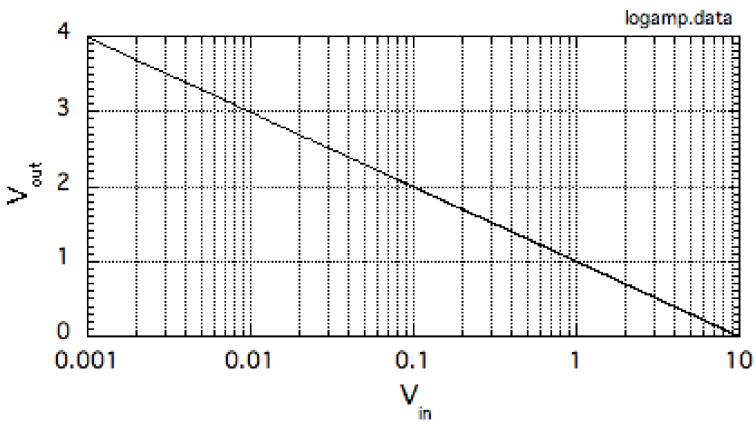


図 7-10　対数増幅器のシミュレーション結果

　なお、図 7-9 の回路では２段目のオペアンプの非反転入

力の電圧が信号により変化するため、規格化電圧 $R_1 I_0$ を作るための電流源 I_0 が面倒な構成となる。そこで電圧源 V_0 と抵抗 R_0 により簡単に I_0 を作ることが出来る図 7-11 に示す回路が実用に供されている。図 7-11 の回路の出力は

$$V_2 = (1 + \frac{R_3}{R_2})\frac{kT}{q}\ln\frac{V_1}{R_1 I_0} \tag{7.3.10}$$

で与えられる。ここで

$$I_0 = V_0 / R_0 \tag{7.3.11}$$

である。

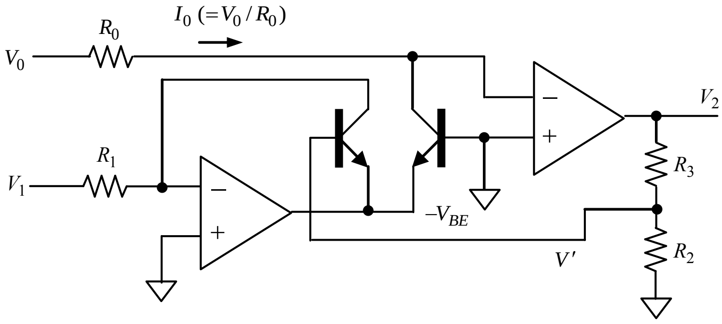


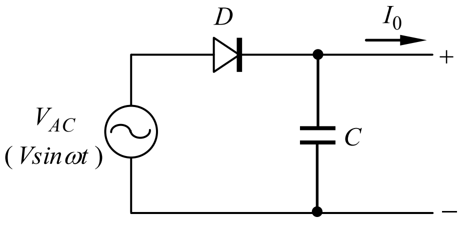
図 7-11　対数増幅器の実用回路

８章　電源回路

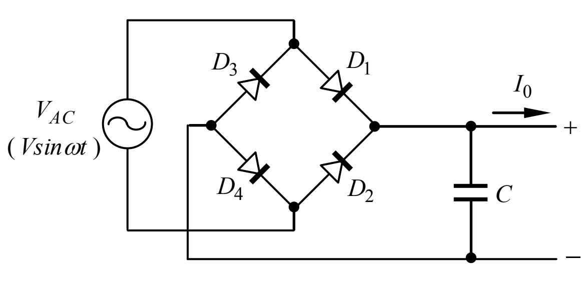
電子回路には増幅回路などを動作させるための直流電源が必要である。特に計測関係では極力S/N 比の高い計測が望まれるため、電源の安定性や雑音が問題にされることが多い。交流電力から直流電力を得る整流回路にはコンデンサー入力型整流回路とチョーク入力型整流回路があるが、近年では大電力分野を除いて計測やオーディオ関係ではチョーク入力型整流回路は忘れ去られた感がある。整流ダイオードがいわゆるゼロクロス・スイッチング動作をしてチョークコイルに流れる電流が連続となるチョーク入力型整流回路は、狭い位相角内にだけ大きなピーク値を持つパルス状に流れるダイオード電流で平滑コンデンサーを周期的に充電する通常のコンデンサー入力型整流回路に比べて、整流リプルの高調波成分が小さくリプルに起因する電源の雑音を小さくできるため、低雑音電源として有望であると考えられる。

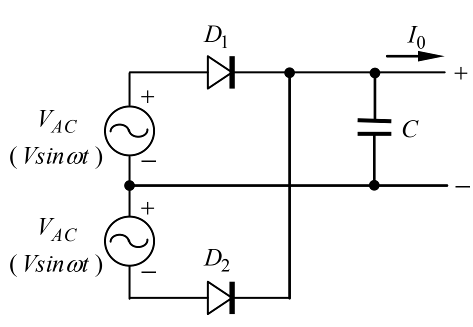
8-1 整流回路

交流から直流を得る整流回路の例を図 8-1 に示す。(a)は半波整流回路、(b)はダイオードブリッジを用いた両波整流回路、(c)は２次巻線に中点タップを設けたトランスを用いた両波整流回路であり、図 8-2 に示すような正負両出力電源に多く用いられる。以下で整流回路の動作を考察することにする。



(a)半波整流回路





(b)両波整流回路（ダイオードブリッジ）　　　　(c)両波整流回路

図 8-1　整流回路の例

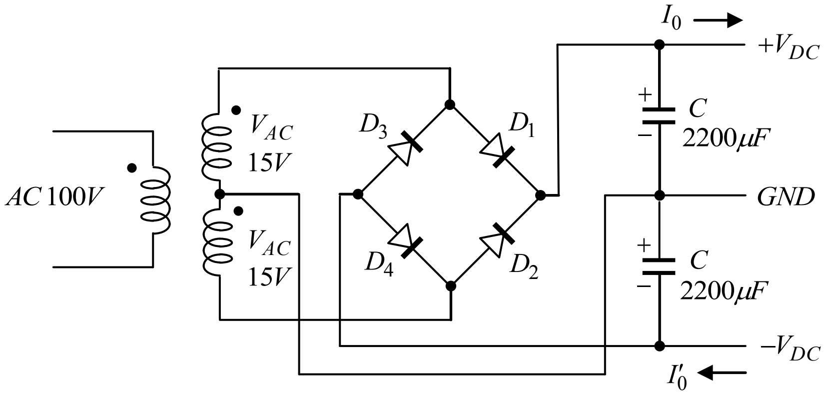


図 8-2　両波整流正負２電源回路の例

8-1-1 半波整流回路

図 8-1(a) に示す基本的な半波整流回路における定常状態での動作を考える。V を交流電圧

$$V = V_p sin\omega t \tag{8.1.1}$$

とし、$V_D\ (\approx 0.7V)$ をダイオードの順方向電圧とすると、整流ダイオードが導通している間 $(t_A \le t \le t_B)$ は平滑コンデンサーC の電圧V_C は交流電圧に追随し$V - V_D$ となる。図 8-3 に示すように、V が最大となる$t \cong t_B$ でV_C が最大値$\cong V_p - V_D$ となる。その後V が減少するとダイオードは逆方向バイアスされてオフ状態$(I_D = 0)$となるので、コンデンサーは出力電流I_0 で放電しV_C は

$$V_C = V_C(t_B) - \frac{I_0}{C}(t - t_B) \tag{8.1.2}$$

にしたがって減少する。次の交流サイクルでは$V - V_D \ge V_C$ となる時間$t_C = t_A + 2\pi/\omega$からダイオードが順方向バイアスされ、同じ動作を繰り返す。ダイオードが導通状態となる$\Delta\theta = \omega(t_B - t_A)$を導通角という。ダイオードがオフ状態にある$t_B \sim t_C$ 間は出力電流I_0によってコンデンサーが放電し

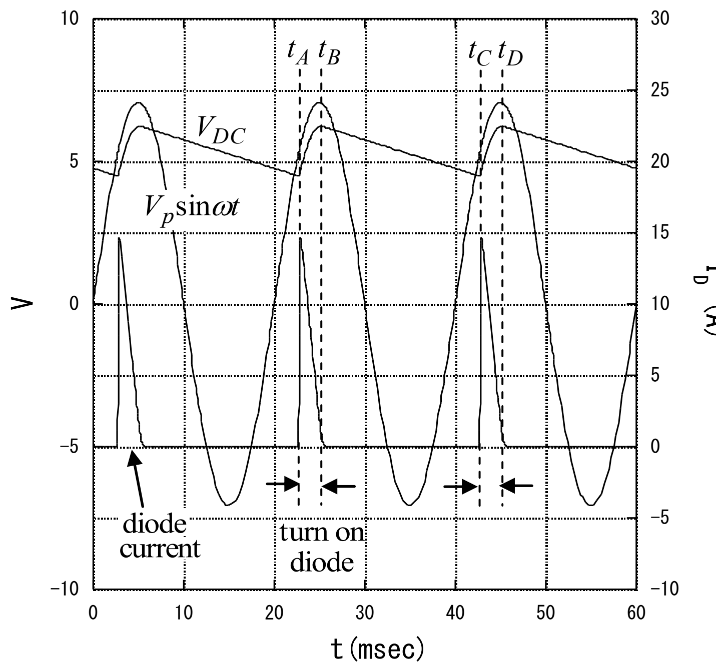


図 8-3　整流回路の電圧電流波形

$$\Delta V = \frac{I_0}{C}(t_C - t_B) \tag{8.1.3}$$

だけ電圧が減少する。$t_B \sim t_C$ 間のコンデンサー電圧の減少と $t_A \sim t_B$ 間の電圧の増加は等しいことから

$$V_p - V_p \cos(\Delta\theta) = \frac{I_0}{C}(t_C - t_B) \tag{8.1.4}$$

ここで

$$\omega t_C = \omega t_B + 2\pi - \Delta\theta \tag{8.1.5}$$

より

$$V_p - V_p \cos(\Delta\theta) = \frac{I_0}{\omega C}(2\pi - \Delta\theta) \tag{8.1.6}$$

となる。ここで $\Delta\theta << \pi/2$ として

$$(\Delta\theta)^2 + \frac{2I_0}{\omega C V_p}\Delta\theta - \frac{4\pi I_0}{\omega C V_p} = 0 \tag{8.1.7}$$

これより

$$\Delta\theta = \sqrt{\left(\frac{I_0}{\omega C V_p}\right)^2 + \frac{4\pi I_0}{\omega C V_p}} - \frac{I_0}{\omega C V_p} \tag{8.1.8}$$

したがって、$(I_0 << \omega C V_p)$ とするとダイオードが順方向バイアスされている位相角は

$$\Delta\theta \cong 2\sqrt{\frac{\pi I_0}{\omega C V_p}} \tag{8.1.9}$$

と近似でき、リプル率 R 及びダイオードがターンオンしている間の平均ダイオード電流 $I_D = 2\pi I_0/\Delta\theta$ は

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\Delta V}{V_p} = \frac{1}{2}(\Delta\theta)^2 = \frac{2\pi I_0}{\omega C V_p} \\ I_D &= \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{R}} I_0 \end{aligned}\right\} \tag{8.1.10}$$

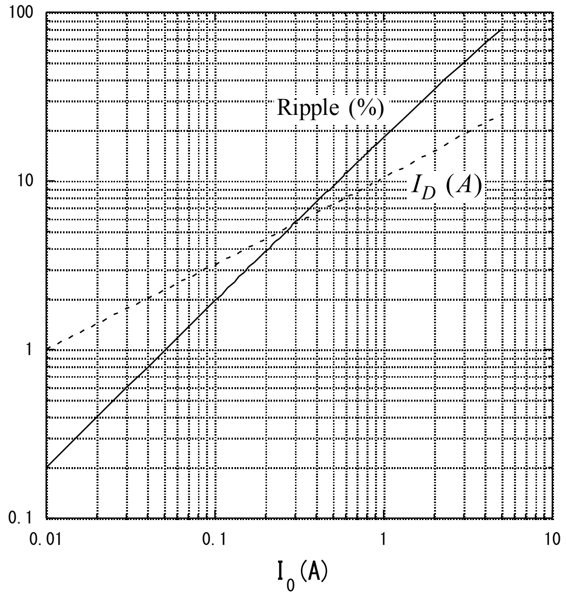


図 8-4　ダイオード電流とリプル率

となる。なお、$C = 4{,}700\mu F$、$V_p = 15V \times \sqrt{2} (= 21.2V)$ とすると $4\pi\omega C V_p = 18{,}491A$ であり、図 8-4 にこのときのリプル率及びダイオード電流を示す。図から分かるようにリプルを小さくするためにコンデンサーの容量を大きくする

とダイオードの導通角が狭くなり、ダイオード電流が大きくなる。例えば出力電流が$I_0 = 1A$のときのダイオード電流は$I_D \cong 10A$にもなる。トランス巻線のグランド端子と平滑用コンデンサーのグランド端子間には大きなスパイク状のダイオード電流が流れるので、わずかなプリントパターンの抵抗でも電位差を発生するため十分な注意が必要である。例えば一般的な$35\mu m$厚のプリントパターンを用いた場合、$2mm$幅のパターンの抵抗は$1cm$当たり$\approx 2.6m\Omega/cm$である。したがってパターン長が$5cm$あるものとすると$\bar{I}_D$によりパターンに沿って$\approx 130mV$もの電位差を発生する。

8-1-2 両波整流

図 8-5 に両波整流回路（図 8-2）の正電圧側の各部の電圧電流波形を示す。図中のサイン波形$V(AC)$はトランス二次巻線の電圧波形である。両波整流ではコンデンサーの充電サイクルが半波整流の２倍であるため同じコンデンサー容量に対してリプルが 1/2 となる。

$$\omega t_C = \omega t_B + \pi - \Delta\theta \tag{8.1.11}$$

であることに注意すれば半波整流と同様にして、ダイオードの導通角は

$$\Delta\theta \cong \sqrt{2\pi I_0 / \omega C V_p} \tag{8.1.12}$$

リプル率及びダイオード電流（導通角内の平均電流）は

$$R \cong \pi I_0 / \omega C V_p, \qquad I_D \cong \pi I_0 / \sqrt{2R} \tag{8.1.13}$$

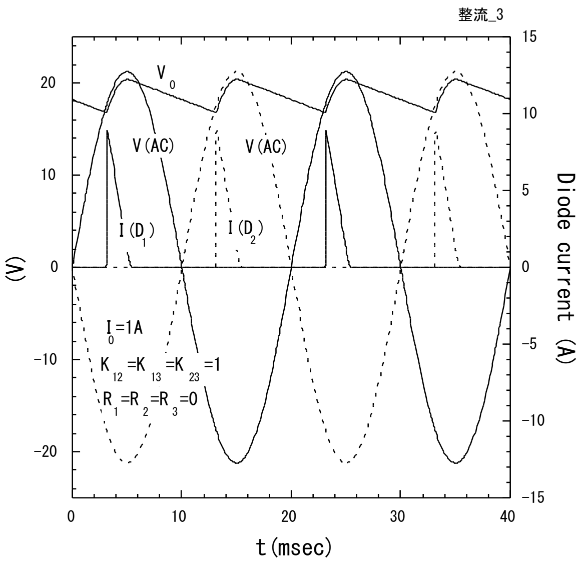


図 8-5　両波整流回路各部の電圧電流波形

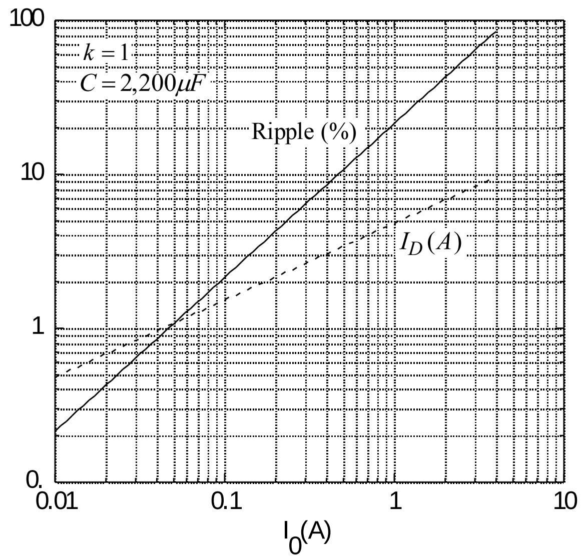


図 8-6　ダイオード電流及びリプル率

となる。C, V_p, I_0が同じならば$\Delta\theta$は半波整流の$1/\sqrt{2}$、R, I_Dは$1/2$である。$V_p = \sqrt{2} \times 15\ V$、$C = 2{,}200\mu F$として(8.12)式から求まるダイオード電流及びリプル率を図 8-6 に示す。なお、図 8-5、

8-6 ではトランスの結合定数を $k=1\,(k_{12}=k_{13}=k_{23}=1)$ として漏洩磁束がない完全結合トランスを仮定し、巻線の抵抗成分は無視している。そこで抵抗を考慮に入れるとコンデンサーの充電電流が制限されるため充電時間が伸びるので、図 8-7 のようにダイオードの導通角が広がり電流のピークが減少する。さらにトランスの結合定数を $k=0.98$ $(k_{12}=k_{13}=k_{23}=0.98)$ としてリーケージインダクタンスを考慮するとダイオードの導通角はさらに広がり電流波形は図 8-8 のようになる。

コンデンサー入力型両波整流回路を回路シミュレータ Spice でシミュレーションした結果のスペクトルを図 8-9 に示す。コンデンサー容量は 2200 μF である。コンデンサー入力型整流回路ではダイオード電流即ちコンデンサーの充電電流は狭い導通角に制限され、ピーク値の大きいパルス状電流となるため図 8-9 に示すように広いスペクトル成分を持つ。高い周波数成分は回路の他の部分に誘導しやすく、またトランスのコアは高い周波数に追随しきれないために磁束漏洩の原因となる。

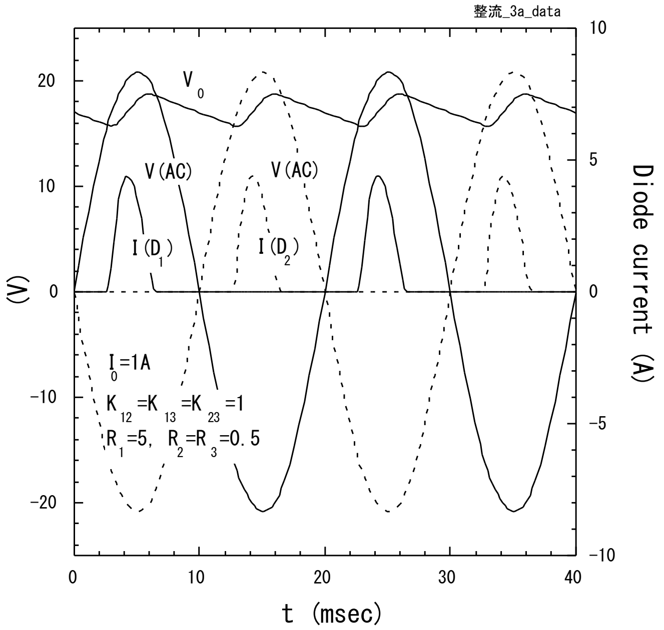


図 8-7　巻線抵抗を考慮したときの電圧電流波形

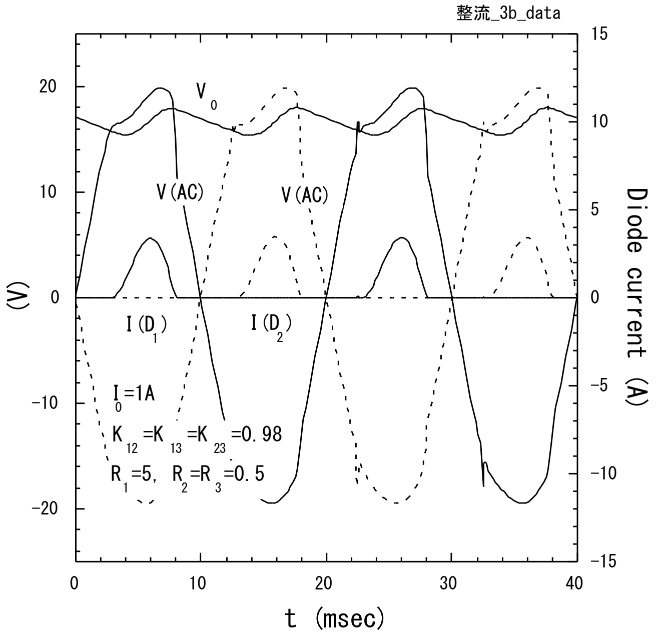
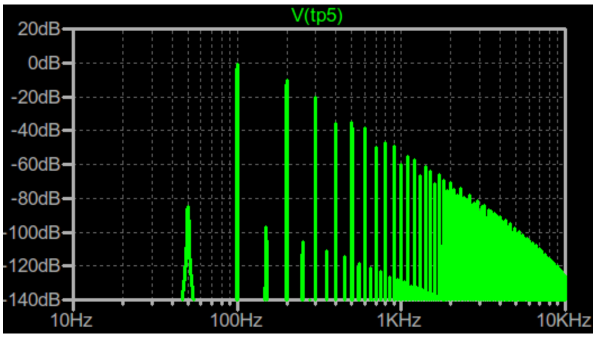
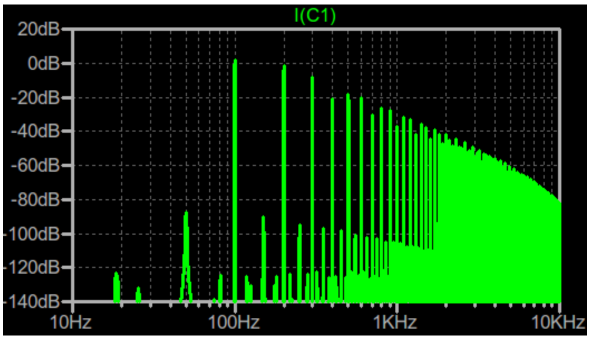


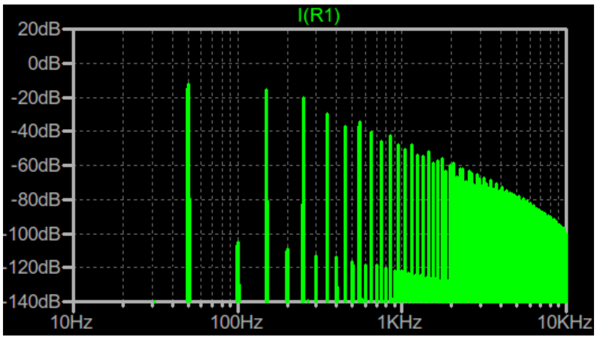
図 8-8　更にリーケージインダクタンスを考慮したときの電圧電流波形



(a)



(b)



(c)

図 8-9　図 8-7 と同じ条件における電圧電流のスペクトル

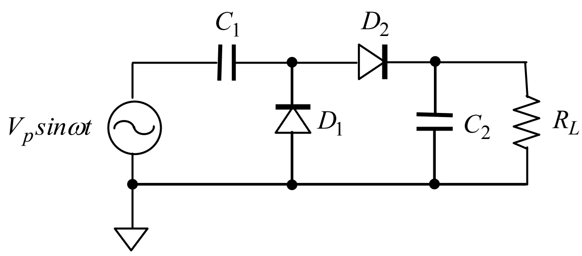
（$k=1$、１次コイル抵抗 5Ω、２次コイル抵抗 $0.5\Omega\times 2$）

(a) 出力電圧、(b) コンデンサー充電電流、(c) １次側交流電流

8-1-3 倍圧整流回路

(a) 倍圧（２倍圧）整流回路

図 8-1 のコンデンサー入力半波整流回路は出力電圧はほぼ交流電圧のピーク電圧 V_p に等しい。これに対して図 8-10 に示す倍圧整流回路では交流のピーク電圧の２倍即ち peak-to-peak 電圧に等しい直流電圧が得られる。交流電圧が負の半サイクルではダイオード D_1 が導通してコンデンサー C_1 が充電されその両端電圧は V_p となる。次の半サイクルでは交流電圧の極性が逆転するので D_1 はターンオフし、D_2 が導通する。D_2 に加わる電圧は入力交流電圧に C_1 の充電電圧 V_p が重畳され、最大電圧は $2V_p$ となるので C_2 の充電電圧は $2V_p$ となり、交流電圧の peak-



to-peak 電圧に等しい直流出力が得られる。このような電圧の重畳はコンデンサーの電荷が順次転送されることで徐々に進行するもので、図 8-11 に示すように電圧をかけてから何サイクルかの後定常状態に達する。

図 8-10　倍圧整流回路

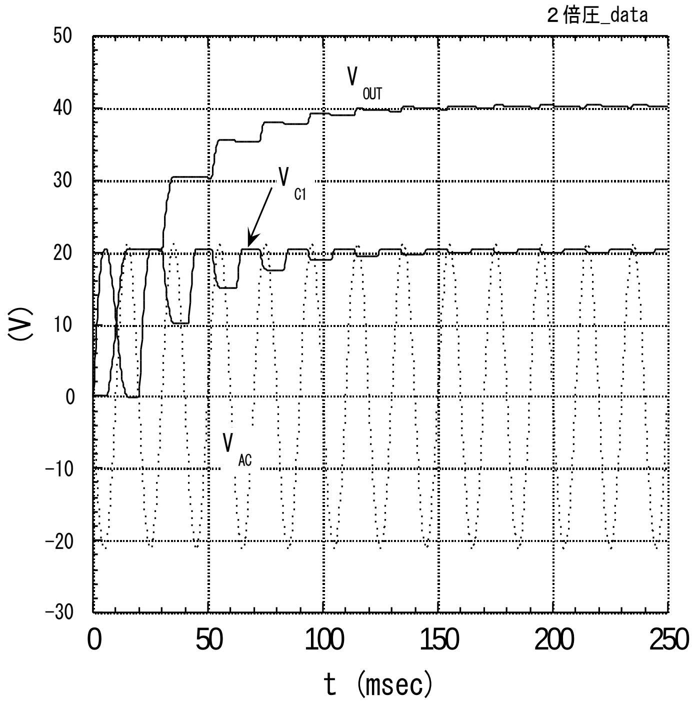


図 8-11　２倍圧整流回路におけるパワーON 直後の C_1 充電電圧及び出力電圧（C_2 充電電圧）

(b) コッククロフト・ウォルトン回路（n 倍圧整流回路）

倍圧整流回路を発展させ、入力交流のピーク電圧の n 倍の電圧を得る n 倍圧整流回路がコック・クロフトロフトとウォルトンにより考案され、通称コッククロフト・ウォルトン（Cockroft-Walton）回路と呼ばれている。コッククロフト・ウォルトン回路は図 8-12 に示すように同じ容量のコンデンサーとダイオードを梯子状に接続したものであり、数十 kV~MV の高電圧を得る方法として広く高電圧電源に用いられている。入力交流が負の半サイクルでは D_1 が導通して C_1 が V_p に充電される。次の半サイクルでは交流電圧の極性が反転して D_2 が導通し C_2 が $2V_p$ で充電される。更に次ぎの半サイクルは D_3 が導通し C_1、C_2、C_3 が直列に繋がる。したがって C_3 の充電電圧は

$$2V_p + V_p - V_p = 2V_p$$

となる。このようにして n 個のコンデンサーが順次 $2V_p$ に充電され、図のように n が偶

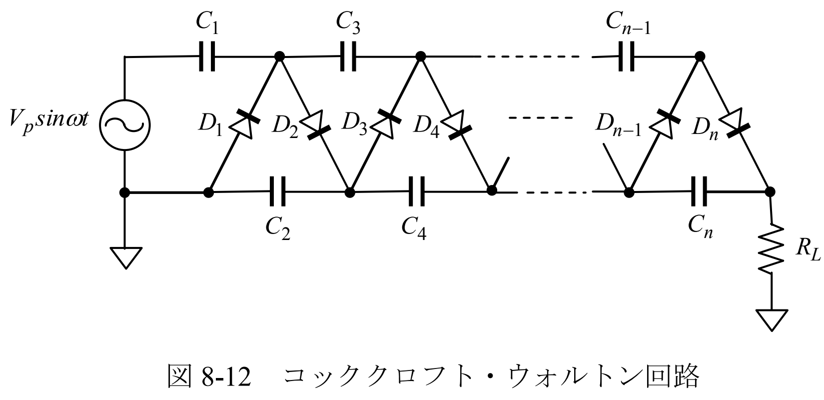


図 8-12　コッククロフト・ウォルトン回路

数とすると、交流の$2n$サイクル目の正の反サイクルではD_nが導通し、交流電圧とC_1、C_3、…、C_n（図の上の列のコンデンサー）の充電電圧が直列に重畳されて負荷R_Lに加わることになる。C_1の充電電圧はV_p、C_2, …, C_nの充電電圧は$2V_p$であるので。出力電圧は$(n/2-1)\times 2V_p+V_p+V_p=nV_p$となる。参考までに$n=10$の場合の定常状状態に達するまでのコンデンサー充電電圧及び負荷電圧の上昇を図 8-13 に示す。ここで$V_p=1kV$、交流周波数$400Hz$、$n=10$、$I_{out}=0.1mA$である。段数が多い場合には定常状態に達するまでの時間が長くなるので、電源の応答が問題になるような場合には注意が必要である。

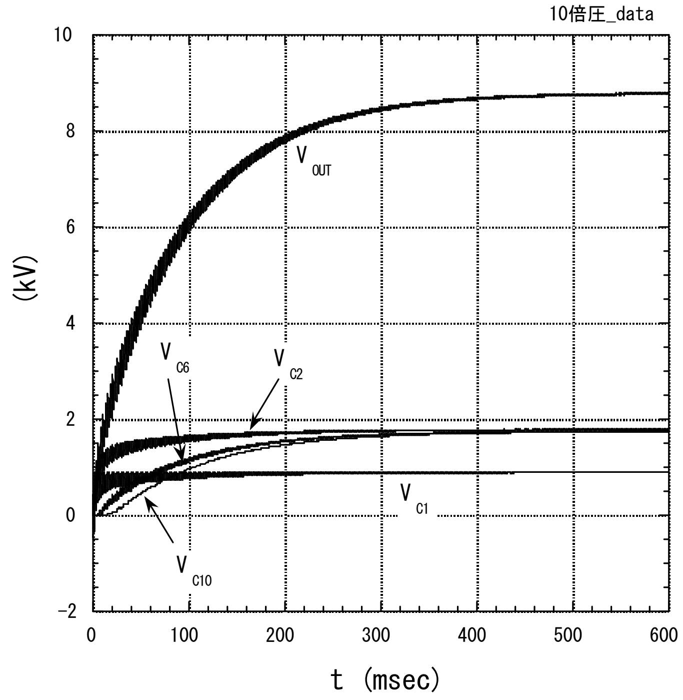


図 8-13　パワーON 直後の電圧コンデンサー充電電圧及び出力電圧

8-1-4 チョーク入力型整流回路

平滑コンデンサーの充電電流を連続にする方式として図 8-14 に示すチョーク入力型整流回路がある。チョーク入力型整流回路は両波整流を基本とし、直流出力電流がある一定値以上の場合には常に２個のダイオードのいずれかが導通状態になり、チョークコイルを流れる電流が途切れることがない。

ダイオードの順方向電圧降下V_Dを無視するとチョークコイルを流れる電流Iは次式で与えられる。

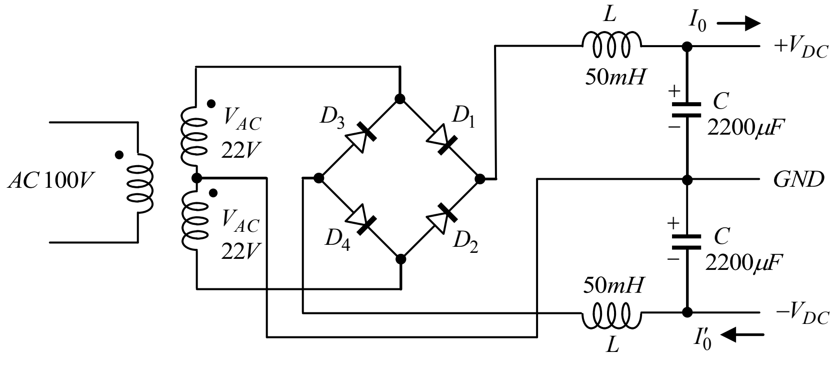


図 8-14　チョーク入力型整流回路

$$\left.\begin{aligned} &L\frac{dI}{dt}+V_0=V_p sin\omega t \qquad (2n\pi \le \omega t < (2n+1)\pi) \\ &L\frac{dI}{dt}+V_0=-V_p sin\omega t \qquad ((2n+1)\pi \le \omega t < 2(n+1)\pi) \end{aligned}\right\} \tag{8.1.14}$$

Cが十分大きくV_Cのリプルが無視できるほど小さいものとして積分すると

$$\left.\begin{aligned} &I(t)=-\frac{V_p}{\omega L}\cos\omega t-\frac{V_0}{L}+a \qquad (2n\pi \le \omega t < (2n+1)\pi) \\ &I(t)=\frac{V_p}{\omega L}\cos\omega t-\frac{V_0}{L}+b \qquad ((2n+1)\pi \le \omega t < 2(n+1)\pi) \end{aligned}\right\} \tag{8.1.15}$$

を得る。a、bは積分定数である。ここで

$$I(n\pi/\omega)=I((n+1)\pi/\omega) \tag{8.1.16}$$

とすると

$$V_0=\frac{2}{\pi}V_p \tag{8.1.17}$$

となる。更に

$$I_0=\bar{I}(t)=\begin{cases} -\dfrac{V_p}{\omega L}(4n+1)+a \qquad (2n\pi \le \omega t < (2n+1)\pi) \\ -\dfrac{V_p}{\omega L}(4n+3)+b \qquad ((2n+1)\pi \le \omega t < 2(n+1)\pi) \end{cases} \tag{8.1.18}$$

より

$$\left.\begin{aligned} &I(t)=-\frac{V_p}{\omega L}\{\cos\omega t+\frac{2}{\pi}\omega t-(4n+1)\}+I_0 \qquad (2n\pi \le \omega t < (2n+1)\pi) \\ &I(t)=\frac{V_p}{\omega L}\{\cos\omega t-\frac{2}{\pi}\omega t+(4n+3)\}+I_0 \qquad ((2n+1)\pi \le \omega t < 2(n+1)\pi) \end{aligned}\right\} \tag{8.1.19}$$

を得る。ここで

$$\omega t=n\pi+\theta \quad (0\le\theta<\pi) \tag{8.1.20}$$

とすると

$$I=\frac{V_p}{\omega L}(1-\cos\theta-\frac{2}{\pi}\theta)+I_0 \tag{8.1.21}$$

となる（図 8-15、図 8-16）。これより

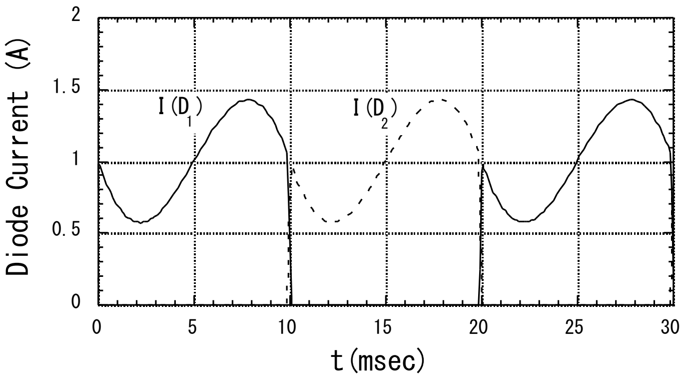


図 8-15　ダイオード電流波形

$$\theta_0 = sin^{-1}\frac{2}{\pi} = 0.22\pi \ \ (39.6°)$$

(8.1.22)

としてIの最小値$I_{min} = I|_{\theta=\theta_0}$及び最大値$I_{\max} = I|_{\theta=\pi-\theta_0}$は

$$\left.\begin{aligned} I_{min} &= -\frac{V_p}{\omega L}(\cos\theta_0 - 1 + \frac{2}{\pi}\theta_0) + I_0 \\ I_{\max} &= \frac{V_p}{\omega L}(\cos\theta_0 - 1 + \frac{2}{\pi}\theta_0) + I_0 \end{aligned}\right\}$$

(8.1.23)

で与えられる。したがって

$$I_0 > 0.211\frac{V_p}{\omega L} \qquad (8.1.24)$$

であれば $I_{min} > 0$ となり、チョークコイルLに流れる電流Iは 0 になることはない。

$\omega = 2\pi \times 50Hz, \quad L = 50mH,$

$V_p = 22 \times \sqrt{2}\ V$

とすると$I_{min} > 0$であるためには

$$I_0 > 0.418A \qquad (8.1.25)$$

であればよい。また出力電圧は

$$V_0 = \frac{2}{\pi}V_p = 19.8\ V \quad (8.1.26)$$

となるが、実際にはこれよりダイオードの順方向電圧$V_D \approx 0.8\,V$だけ低い電圧となる。(編注：取り出す電流が大きいため、この電圧降下にはダイオードの内部抵抗分も考慮されている。)

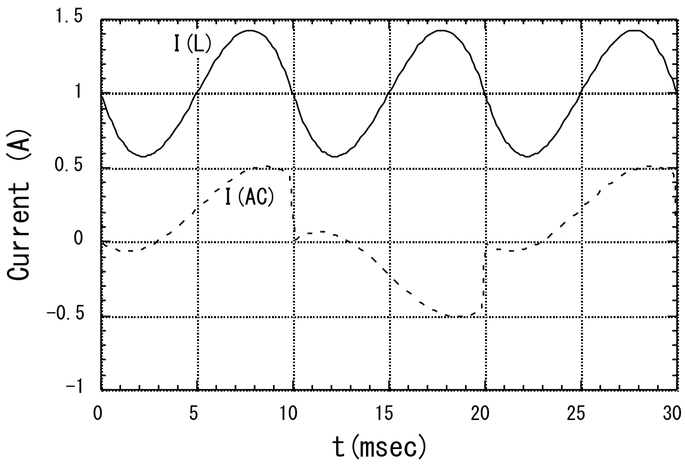


図 8-16　チョークコイル電流波形

及び１次コイル電流

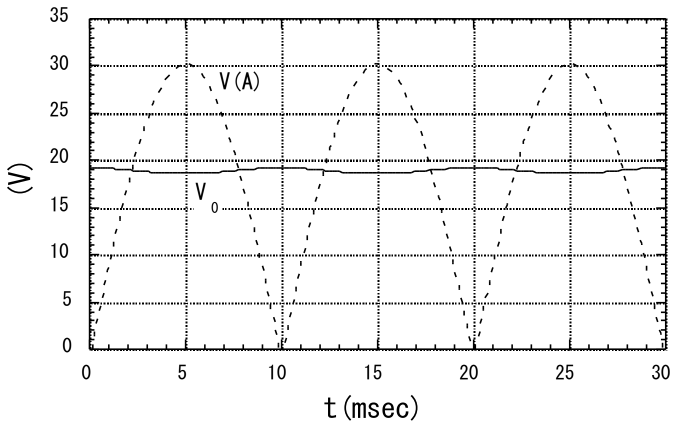
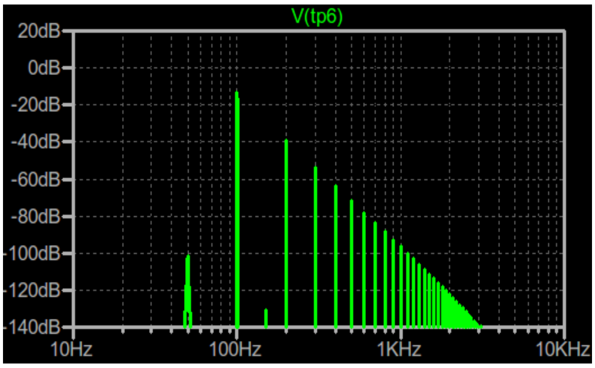
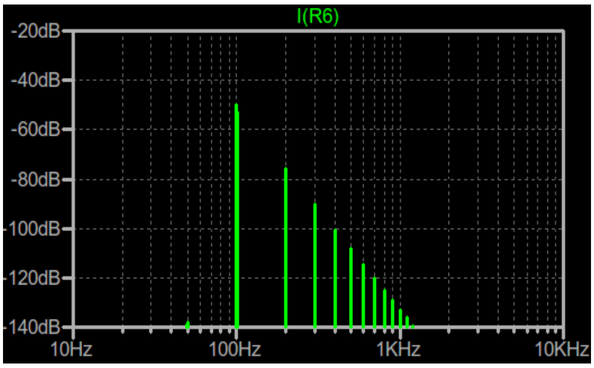


図 8-17　チョークコイル入力電圧

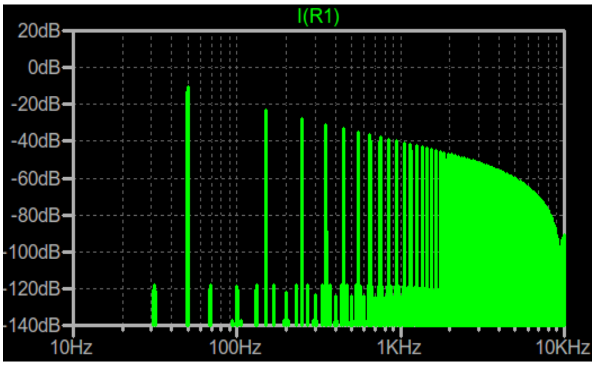
波形及び出力電圧波形

チョーク入力型両波整流回路を Spice でシミュレーションした結果を図 8-18 に示す。平滑コンデンサー容量、トランスの結合定数及び巻線抵抗には図 8-9 と同じ値を仮定している。図 8-9 と比較して分かるように、チョーク入力型整流回路はコンデンサー入力型整流回路に比べてコンデンサーの充電電流及び出力電圧におけるリプルの高調波成分が格段に小さい。なおトランスの１次側を流れる交流電流に含まれるリプルの高調波成分は、チョーク入力型のほうが大きめとなるので、トランスの１次コイルには小さなコンデンサーを並列に接続し、AC ラインに流れる高い周波数の高調波成分をバイパスしておくことが望ましい。





(a) (b)



(c)

図 8-18　チョーク入力型整流回路における電圧電流のスペクトル

（$k=1$、１次コイル抵抗5Ω、２次コイル抵抗$0.5\Omega\times2$）

(a) 出力電圧、(b) コンデンサー充電電流、(c) １次側交流電流

8-2 直流安定化電源

交流電圧をダイオードで整流しただけでは図 8-3 に見られるように大きな整流リプルを含んでおり、また交流電圧の変動につれて直流電圧も変動する。安定でリプルのない直流電圧を得るために安定化電源回路が用いられる。通常は極力高安定度及び低リプルとするため出力電圧を基準電圧と比較し差を増幅して負帰還をかけることで目的を達している。広く用いられているドロッパー方式フィードバック型安定化電源は図 8-19 のように安定なツェナーダイオードにより発生される基準電圧V_0を入力とするフィードバックアンプになっており、出力電圧と基準電圧の差（誤差信号）を増幅する誤差増幅器の出力でドロッパ・トランジスタを制御して安定な出力を得る。一般にフィードバックアンプは容量負荷に対して不安定になりやすいが、アンプ等の電源ラインは主に高い周波数における電源インピーダンスや雑音を減少させる意図でグランドとの間に大きな容量のバイパスコンデンサーを挿入することが多いため、このような大きな容量負荷に対しても電源は十分安定でなければならない。

出力が短絡した場合等に過大電流から出力トランジスタを保護するために、出力電流がある値に達すると出力トランジスタをカットオフさせる過電流保護回路が必要である。図に示す簡単な保護回路では抵抗R_sに発生する電圧が概ね 0.7V を超えるとQ_2がターンオンし出力トランジスタQ_1のベース・エミッター間を短絡してQ_1がカットオフし、出力電流をストップする。このとき出力と誤差増幅器の出力が短絡するため誤差増幅器を破損しないために、誤差増幅器の出力インピーダンスは高い必要がある。そこで誤差増幅器出力はトランジスタのコレクターから取り出すのが普通である。

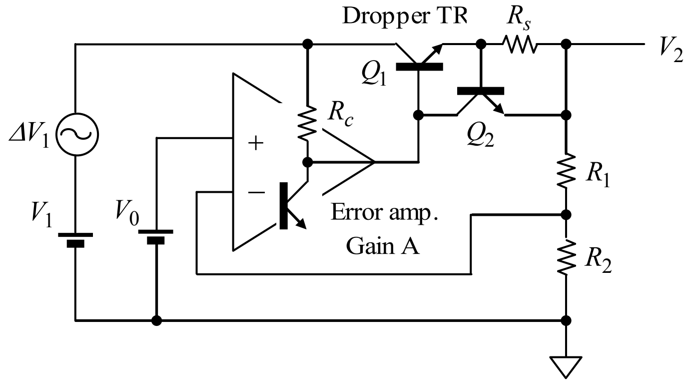


図 8-19　安定化電源の概念図

次に誤差増幅器にはどの程度のゲインが要求されるかを考えてみよう。図 8-19 に示すように誤差増幅器は差動増幅回路 1 段で構成されるものとする。出力トランジス
タはエミッター接地回路として動作し、ベースは誤差増幅器のコレクタ負荷を通して入力電圧V_1に接続されているため、入力電圧のリプルを含む変動がそのままベースに加わる。したがって出力トランジスタのベースには入力電圧変動及び誤差増幅器の出力が重畳されて加わることになることから、図 8-20 に示す動作ブロック図が成立し

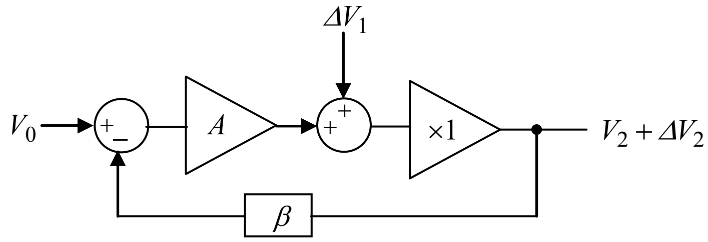


図 8-20　安定化電源のブロック図

$$A(V_0-\beta V_2)+\Delta V_1=V_2+\Delta V_2 \tag{8.2.1}$$

即ち

$$V_2+\Delta V_2=\frac{AV_0+\Delta V_1}{1+\beta A} \tag{8.2.2}$$

となる。ここで$\Delta V_1=0$のときの出力を

$$V_2=\frac{AV_0}{1+\beta A} \tag{8.2.3}$$

とすると、ΔV_1による出力変動ΔV_2は

$$\frac{\Delta V_2}{V_2}=\frac{1}{A}\frac{\Delta V_1}{V_0} \tag{8.2.4}$$

となる。例として基準電圧を$V_0 = 5.1V$、V_1のリプル電圧を$\Delta V_1 = 1V$として、出力電圧$V_2 = 15V$にてリプルを$\Delta V_2 < 1mV$とするために必要とされる誤差アンプのゲインを求めると

$$A = \frac{\Delta V_1}{V_0}\frac{V_2}{\Delta V_2} > 3000 \tag{8.2.5}$$

となる。

図 8-19 を図 8-21 の回路で実現することを考えてみよう。まず安定でリプルの小さな基準電圧が必要であるため、FET による定電流源J_1によりツェナーダイオードD_zに電流を流して基準電圧V_0を作る。更にQ_1とQ_2から成る差動増幅器による誤差アンプにて、R_1とR_2で分圧した出力電圧 βV_2 $(\beta = R_2/(R_1+R_2))$をV_0と比較することで出力電圧が$V_2 = V_0/\beta$となるようにネガティブ・フィードバックループを構成する。$V_0 = 5.1V$、$V_2 = 15V$ では$\beta = V_0/V_2 = 0.34$であるから必要な一巡ループゲインは

$$|\beta A| > 1020\ (60.2dB) \tag{8.2.6}$$

である。

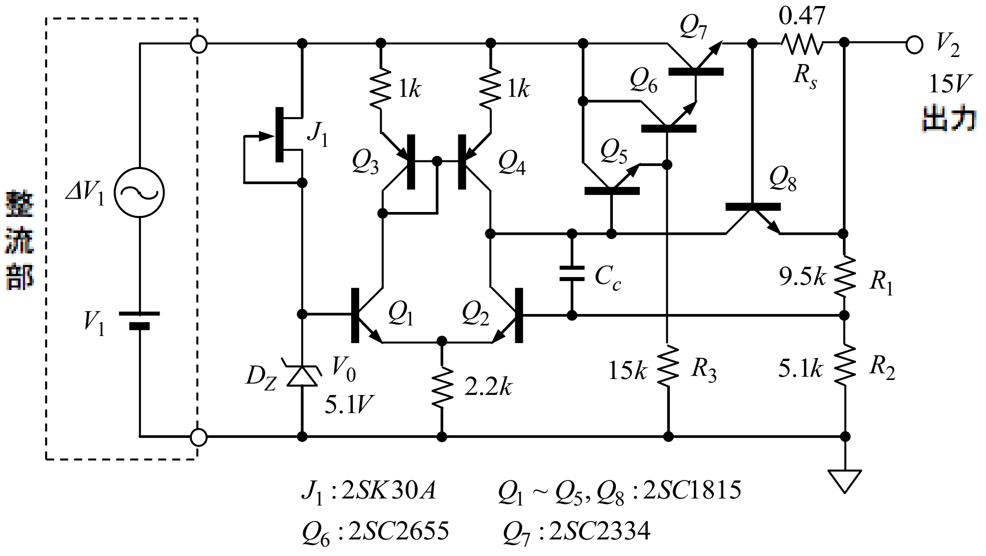


図 8-21　安定化電源の例

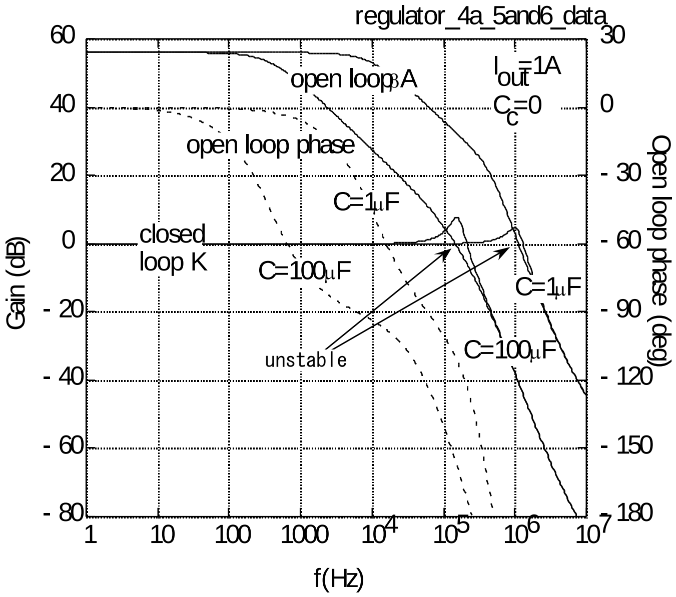
以上のような大きなゲインを差動回路 1 段で得るためには極力コレクター負荷インピーダンスを大きくする必要があるため、差動回路のコレクタ負荷はQ_3、Q_4から成るカレントミラー回路による定電流負荷とする。更に出力段の入力インピーダンスを極力高くするため出力は$Q_5 \sim Q_7$から成る 3 段ダーリントン構成とする。なおQ_5の動作電流が小さくなりすぎないようにエミッターを抵抗R_3を通してグランドに接続する。R_sは電流検出抵抗、Q_8は過電流保護用のトランジスターである。Q_8がターンオンすることで$Q_5 \sim Q_7$をターンオフし、出力電流を制限する。

回路解析プログラム SPICE により図 8-21 の回路のオープンループゲインβAの周波数特性及び、

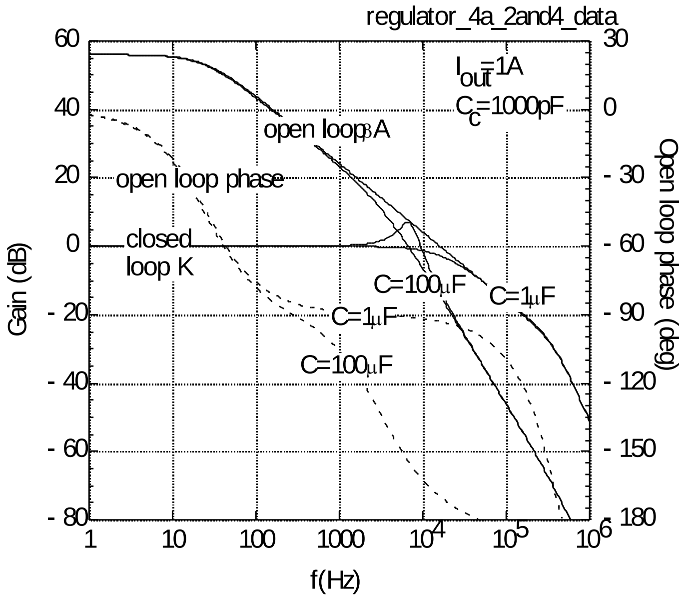
クローズドループゲイン$K=\beta A/(1+\beta A)$を求めると図 8-22 となる。(a)は位相補償コンデンサーなし$(C_c=0)$の場合、(b)は $C_c=1000pF$の場合である。一巡ループゲインは$|\beta A|=56dB$でありほぼ目標値$60dB$に近いのでこれで良しとしよう。

ループの安定性については、補償容量なし（$C_c=0$）では小さな容量負荷に対しても不安定であるが、$C_c=1000pF$を挿入することで$100\mu F$以上の容量負荷に対しても安定性を確保することができる。負荷容量が大きいとクローズドループ特性にピークを生じ、行き過ぎると発振してしまう。そこで安定な動作を保障するためQ_2のベース・コレクター間に位相補償コンデンサーC_cを挿入する。電流検出抵抗R_sを含むダーリントン・エミッターフォロアの出力抵抗と負荷容量で生ずるポール（第２ポール）の周波数におけるループゲインβAが$0dB$以下となるようにオープンループ特性の第１ポールの周波数を下げ、容量負荷に対しても安定な動作を確保する。

以上の考え方で設計された図 8-21 の回路リプル抑圧比を SICE にて求めると、図 8-23 に示すように$1kHz$以下の周波数帯域では$63dB\ (7.1\times10^{-4})$の抑圧比を有することが期待できる。整流出力に$\Delta V_1=1V$のリプルがあっても出力V_2に乗るリプルは$0.7mV$程度に抑圧されることになり、通常の用途には十分な性能である。



(a) 補償コンデンサーなし$(C_c=0pF)$



(b) 補償コンデンサーあり$(C_c=1000pF)$

図 8-22　ループゲインの周波数特性

以上述べてきたように、安定化電源回路は大きな容量負荷に対して十分安定でなければならないため、大きなリプル抑圧比の実現と抑圧比の広帯域化を同時に満たすフィードバックループの

設計が要求され、設計は簡単ではない。現在ではモノリシック IC による安定化電源回路の IC が数多く市販されており、手軽に高性能な安定化電源を組むことができる。最も広く用いられている IC としては図 8-24 に示す三端子レギュレータがある。入力端子（IN）、出力端子（OUT）、グランド端子（GND）の三端子のみで構成され、出力電圧固定型と可変型がある。出力電圧固定型で最も一般的なものとして 78××（正電圧用）、79××（負電圧用）シリーズがある。各 IC メーカーから同等品が供給されており、各種の電圧電流仕様のものが揃っているので非常に使いやすい IC である。××は出力電圧を表わす。

また、出力電圧可変型三端子レギュレータの代表的な IC としては LM317 がある。出力電圧可変型は図(b)の電圧設定用抵抗の分圧比だけで精度良く出力電圧が設定できるよう GND 端子に流れる電流が小さく設計されている（LM317 では約 $50\mu A$）。なお、78××等の電圧固定型でも図(b)と同様な回路で出力電圧を可変できるが、GND 端子には IC 内部回路のバイアス電流（$5\sim6mA$ 程度）が流れており、またこの端子電流は温度や出力電流によって $0.5\sim0.8mA$ 程度変動するので、外部の抵抗比だけでは精度よく電圧を設定できないが、あまり精度を必要としない場合には簡便な方法として用いることができる。

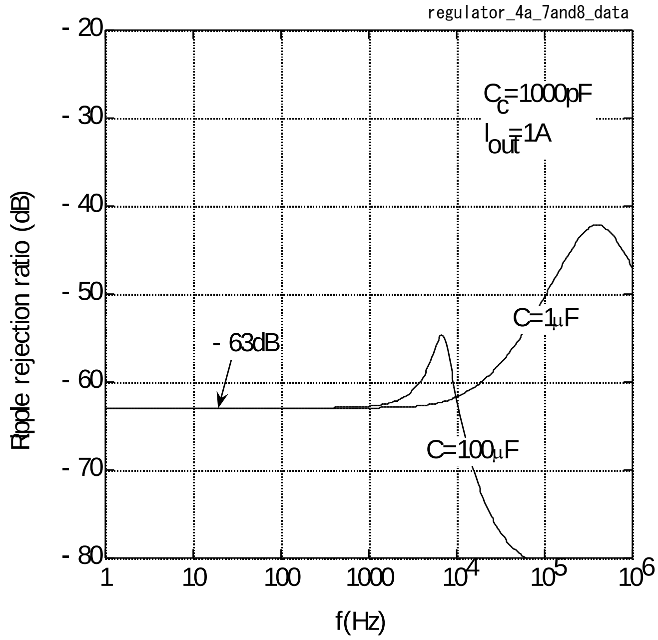
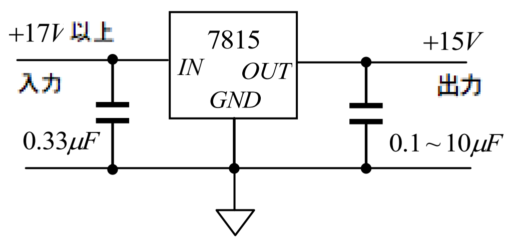
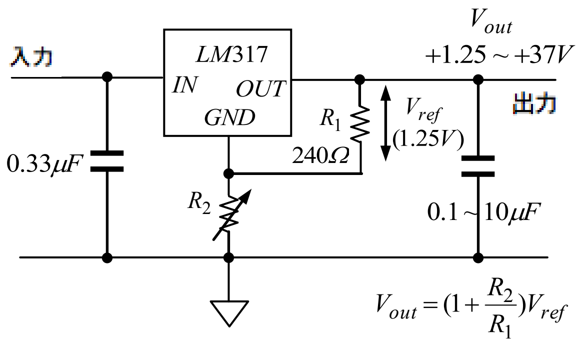


図 8-23　図 8-21 のリプル抑圧比

（$\Delta V_1 = 1V$ に対する出力周波数特性）



(a) 出力電圧固定型



(b) 出力電圧可変型

図 8-24　三端子レギュレータ IC の例

９章　アナログフィルター

フィルターはその基本的なフィルタリング特性によって大きく４種類に分類され、カットオフ周波数より高い周波数成分を減衰させるローパスフィルター（LPF)、それとは逆に低い周波数を減衰させるハイパスフィルター（HPF)、特定の周波数帯域の周波数成分だけを通過させ、高い周波数成分及び低い周波数成分を減衰させるバンドパスフィルター（BPF)、特定の周波数成分だけを減衰させるバンドエリミネーションフィルター（ノッチフィルターと呼ばれることもある）（BEF）がある。

更にローパスフィルター（LPF）としてのフィルタリング特性によって次の三つのタイプに分けられる。

チェビシェフ型フィルター：通過帯域（第一種）または除去帯域（第二種）の周波数特性にリプルを有するが、減衰カーブが急峻。
バターワース型フィルター：周波数特性にリプルがなく、通過帯域の周波数特性が最も平坦、減衰カーブが穏やか。
ベッセル型フィルター　　：通過帯域の郡遅延時間が最も一定、減衰カーブは最も穏やか。

最も減衰特性が急峻なチェビシェフ型フィルターは、通信分野において隣り合ったチャンネル間のクロストークを極力抑制するためによく用いられ、またデータサンプリングにおいてエリアシングを除去するためのアンチエリアシングフィルターとしてもよく用いられる。計測分野では周波数特性の平坦性が重視されることが多いため、バターワース型フィルターが用いられ、またパルス的信号のような多くの高調波成分を有する信号の波形再現性が重視される場合にはベッセル型フィルターがよく用いられる。概ね MHz 以上の高周波帯域で用いるフィルターは L, C, R（受動素子）で構成されるが、多くの場合 L や C の誤差（特に L の誤差が大きい）のために設計通りの性能を得ることが難しく、試行錯誤による調整が必要になる。一方、低周波領域では必要となる L が大きくなってしまうこと、及び L の誤差を回避するためにオペアンプを用いた能動フィルターを用いるのが一般的である。また、次数の高いフィルターを LC フィルターで実現するには多数の L と C が多段に接続された構成となり、それらが互いに影響しあうので設計には高度の知識と膨大な計算が必要である。そのため設計には専用の設計ソフトが用いられる。そこで LC フィルターの一般論については他書に譲ることとし、本書では基本的な能動フィルターについて解説する。能動フィルターでは 1 次及び 2 次のフィルターを多段従属接続することで次数の高いフィルターを実現することができるので、以下 1 次と 2 次の能動フィルターを解説し、その後 9-3 節〜9.7 節にて高次のフィルターの一般論を述べる。

9-1 １次フィルター

(a) １次 LPF

図 9-1 より

$$\frac{V_1}{R_1} = -\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right)V_2 \qquad (9.1.1)$$

したがって周波数特性関数は

$$G(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + j\omega CR_2} \qquad (9.1.2)$$

となる。$R_1 = R_2 = R$ として伝達関数は

$$G_{LPF}^{(1)}(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \qquad (9.1.3)$$

で与えられる。

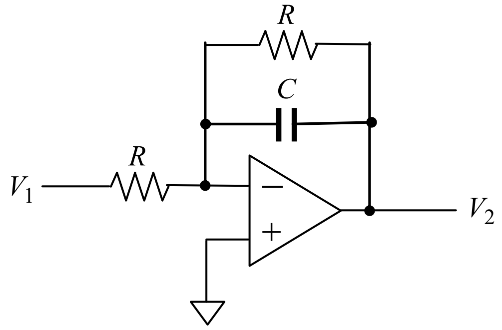


図 9-1　１次 LPF

(b) １次 HPF

図 9-2 より

$$\frac{V_1}{R_1} = -\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right)V_2 \qquad (9.1.4)$$

したがって周波数特性関数は

$$G(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1}\frac{j\omega CR_1}{1 + j\omega CR_1} \qquad (9.1.5)$$

となる。$R_1 = R_2 = R$ として伝達関数は

$$G_{HPF}^{(1)}(s) = \frac{s}{s + \omega_c} \qquad (9.1.6)$$

で与えられる。

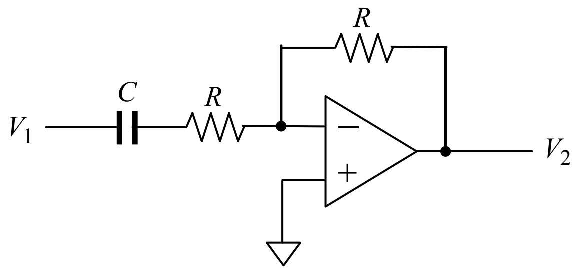


図 9-2　１次 HPF

9-2 ２次フィルター

２次フィルターの伝達関数は

$$
\left.
\begin{aligned}
G_{LPF}^{(2)}(s) &= \frac{\omega_c^2}{s^2+(\omega_s/Q)s+\omega_c^2}, \quad G_{HPF}^{(2)}(s) = \frac{s^2}{s^2+(\omega_s/Q)s+\omega_c^2} \\
G_{BPF}^{(2)}(s) &= \frac{(\omega_s/Q)s}{s^2+(\omega_s/Q)s+\omega_c^2}, \quad G_{BEF}^{(2)}(s) = \frac{s^2+\omega_c^2}{s^2+(\omega_s/Q)s+\omega_c^2} \\
G_{APF}^{(2)}(s) &= \frac{s^2-(\omega_s/Q)s+\omega_c^2}{s^2+(\omega_s/Q)s+\omega_c^2}
\end{aligned}
\right\} \tag{9.2.1}
$$

で与えられ、$Q=1/\sqrt{2}$ の場合はバターワース型フィルター、$Q=1/\sqrt{3}$ のときはベッセル型フィルターとなる。また LPF、HPF、BPF 以外は２次より高い次数のフィルターが使われることはほとんどない。（編注：式中の APF は All-Pass Filter の意。二次のフェーズシフター。）

周波数変換

上記の各種のフィルターは LPF が基準であり、他のフィルターの伝達関数は周波数変換法によって LPF を変換して求めることができる。対数スケールで周波数を表示すると HPF は ω_c を対称軸として左右反転したもので与えられる。即ち LPF に対して $s/\omega_c \to \omega_c/s$ なる変換を行うと、1 次の LPF、２次の LPF ともに

$$
\left.
\begin{aligned}
G_{LPF}^{(1)}(s)\Big|_{s/\omega_s \to \omega_s/s} &\to G_{HPF}^{(1)}(s) \\
G_{LPF}^{(2)}(s)\Big|_{s/\omega_s \to \omega_s/s} &\to G_{HPF}^{(2)}(s)
\end{aligned}
\right\} \tag{9.2.2}
$$

となり、それぞれ 1 次の HPF および 2 次の HPF が得られる。また、1 次の HPF に $s/\omega_s \to Q(s/\omega_s+\omega_s/s)$ なる変換を行うと

$$
G_{HPF}^{(1)}(s)\Big|_{s/\omega_s \to Q(s/\omega_s+\omega_s/s)} = G_{BPF}^{(2)}(s) \tag{9.2.3}
$$

また $s/\omega_s \to 1/\{Q(s/\omega_s+\omega_s/s)\}$ なる変換を行うと

$$
G_{HPF}^{(1)}(s)\Big|_{s/\omega_s \to 1/\{Q(s/\omega_s+\omega_s/s)\}} = G_{BEF}^{(2)}(s) \tag{9.2.4}
$$

となる。これより LPF から他のフィルターの伝達関数を得ることができるので、LPF の特性を知ることで他のフィルターの特性を知ることができる。

9-2-1 VCVS 型フィルター(電圧制御電圧源型フィルター)

オペアンプによる非反転アンプに帰還を施すことで２次の LPF 及び HPF を実現することができる。

(a) LPF

図 9-3 の回路方程式は

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{V_1 - V}{R_1} = j\omega C_1 (V - V_2) + \frac{1}{R_2}(V - \frac{V_2}{K}) \\
&\frac{1}{R_2}(V - \frac{V_2}{K}) = j\omega C_2 \frac{V_2}{K} \\
&K = 1 + \frac{R_3}{R_4}
\end{aligned}
\right\} \quad (9.2.5)
$$

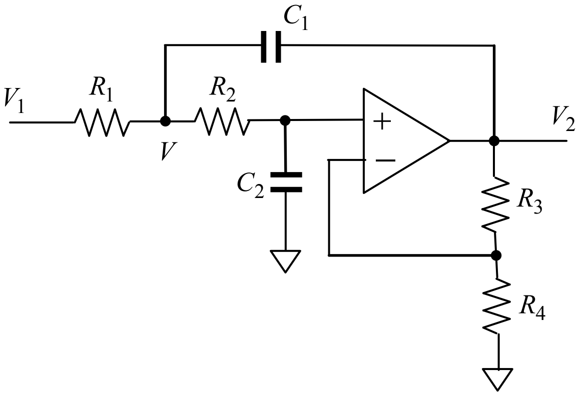


図 9-3　VCVS 型 LPF

で与えられ、これを解くことで次の応答を得る。

$$
V_2 = \frac{K}{1 + j\omega / Q\omega_0 - \omega^2 / \omega_0^2} V_1 \tag{9.2.6}
$$

ここで

$$
\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}, \qquad Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}{C_1 R_1 (1 - K) + C_2 (R_1 + R_2)} \tag{9.2.7}
$$

である。通常 $C_1 R_1 = C_2 R_2 = CR$ として設計され、このとき

$$
\omega_0 = \frac{1}{CR}, \qquad Q = \frac{1}{2 - K + C_2 / C_1} \tag{9.2.8}
$$

となる。$K = 2$ では $Q = C_1 / C_2$ となり広い範囲で Q を設定することができる。但し K が $2 + C_2 / C_1$ に近くなると R_3、R_4 の誤差が Q に大きく影響するので注意が必要である。

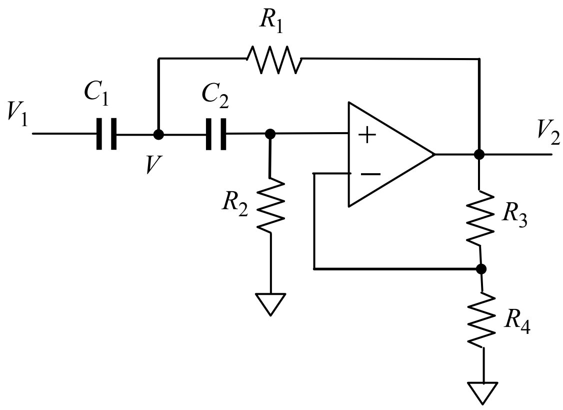


図 9-4　VCVS 型 HPF

(b) HPF

図 9-4 の回路方程式

$$
\left.
\begin{aligned}
&j\omega C_1 (V_1 - V) = j\omega C_2 (V - \frac{V_2}{K}) + \frac{V - V_2}{R_1} \\
&j\omega C_2 (V - \frac{V_2}{K}) = \frac{V_2}{K R_2} \\
&K = 1 + \frac{R_3}{R_4}
\end{aligned}
\right\} \tag{9.2.9}
$$

より、出力応答は次式となる。

$$V_2 = -K\frac{\omega^2/\omega_0^2}{1+j\omega/Q\omega_0-\omega^2/\omega_0^2}V_1 \tag{9.2.10}$$

ここで

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}, \qquad Q = \frac{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}{(C_1+C_2)R_1+C_2R_2(1-K)} \tag{9.2.11}$$

である。LPF と同様、通常$C_1R_1 = C_2R_2 = CR$として設計され、このとき

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}, \qquad Q = \frac{1}{2-K+C_2/C_1} \tag{9.2.12}$$

となる。LPF と同様$K=2$では$Q=C_1/C_2$となり広い範囲でQを設定することができる。

9-2-2 多重帰還型フィルター（multiple feedback filter）

(a) LPF

図 9-5 の回路方程式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{R_3}(V_1-V) = \frac{1}{R_1}(V-V_2)+\frac{V}{R_2}+j\omega C_1V \\ &\frac{V}{R_2} = -j\omega C_2V_2 \end{aligned}\right\} \tag{6.6.8}$$

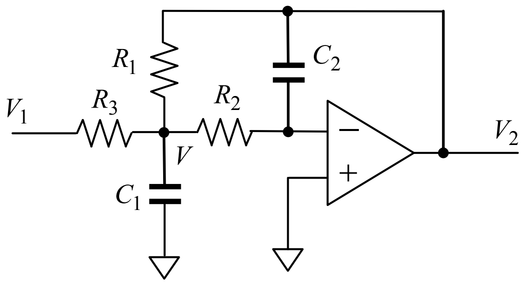


図 9-5　LPF

より出力応答は

$$V_2 = -\frac{K}{1+j\omega/Q\omega_0-\omega^2/\omega_0^2}V_1 \tag{9.2.13}$$

となる。ここで

$$K = \frac{R_1}{R_3}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1C_2R_1R_2}}, \qquad Q = \frac{\sqrt{R_1R_2}}{R_2(1+K)+R_1}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \tag{9.2.14}$$

である。通常$R_1 = R_2 = R_3 = R$として設計され、その場合は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_1C_2}R}, \qquad Q = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}, \qquad K=1 \tag{9.2.15}$$

となり、大きなQが必要な場合には適さない。

(b) HPF

LPF（図 9-5）の抵抗とコンデンサーを入れ替えた図 9-6 の回路において

$$
\left.\begin{aligned}
&j\omega C_1(V_1 - V) = \frac{V}{R_1} + j\omega C_2 V + j\omega C_3 (V - V_2) \\
&j\omega C_2 V = -\frac{V_2}{R_2}
\end{aligned}\right\} \tag{9.2.16}
$$

より、出力応答は

$$
V_2 = \frac{K\omega^2/\omega_0^2}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2} V_1 \tag{9.2.17}
$$

となる。ここで

$$
\left.\begin{aligned}
&K = \frac{C_1}{C_3} \\
&\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_2 C_3 R_1 R_2}} \\
&Q = \frac{\sqrt{C_2/C_3}}{1 + K + C_2/C_3}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}
\end{aligned}\right\} \tag{9.2.18}
$$

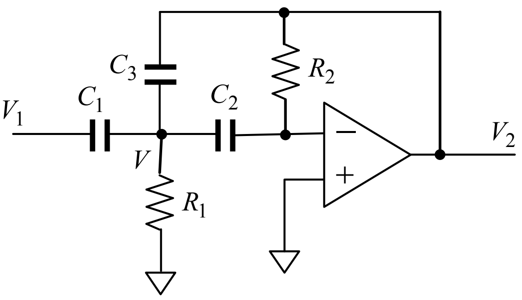


図 9-6　HPF

である。ここで $C_1 = C_2 = C_3 = C$ とすると

$$
\omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}}, \qquad Q = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \tag{9.2.19}
$$

となる。

(c) BPF

図 9-7 において

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{R_1}(V_1 - V) = \frac{V}{R_2} + j\omega C_1 V + j\omega C_2 (V - V_2) \\
&j\omega C_1 V = -\frac{V_2}{R_3}
\end{aligned}\right\} \tag{9.2.20}
$$

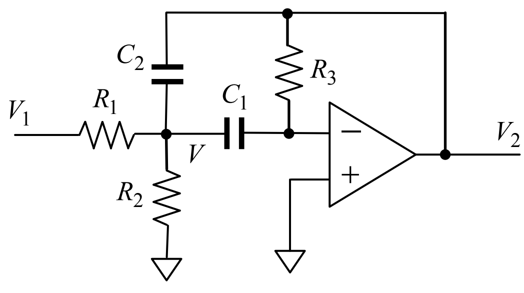


図 9-7　BPF

より出力は

$$
V_2 = -K\frac{j\omega/Q\omega_0}{1 + j\omega/Q\omega_0 - \omega^2/\omega_0^2} V_1 \tag{9.2.21}
$$

となる。ここで

$$
K = \frac{C_1 R_3}{(C_1 + C_2)R_1}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{1/R_1 + 1/R_2}{C_1 C_2 R_3}}, \qquad Q = \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_1 + C_2}\sqrt{(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})R_3} \tag{9.2.22}
$$

である。ここで $R_1 = R_2 = R_3 = R$ とすると

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{C_1 C_2} R}, \qquad Q = K\sqrt{\frac{2C_2}{C_1}}, \qquad K = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \tag{9.2.23}$$

となる。この場合$K<1$のため大きなQが必要な場合には適さない。一方、$C_1 = C_2 = C_3 = C$とすると

$$\omega_0 = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{1}{R_3}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})}, \qquad Q = \frac{1}{2}\sqrt{2K + \frac{R_3}{R_2}}, \qquad K = \frac{R_3}{2R_1} \tag{9.2.24}$$

となり、$R_3/R_1 = R_3/R_2 = 20$とすることで$Q = 3.16$を得ることができる。

9-2-3 状態変数フィルター（state variable filter）

VCVS 型フィルターや多重帰還型フィルターでは、ゲイン、共振周波数、Q値が互いに影響し合うので設計が難しく、また大きなQ値を得ることが難しい。これに対して、状態変数フィルターは必要なオペアンプの数が 3 個と多くなるが、ゲイン、共振周波数、Q値を独立に決めることができるので設計が容易で自由度が大きく、大きなQ値を容易に実現することができる。また LPF、BPF、HPF 出力が同時に得られるのが特徴であり、状態変数フィルターを用いた発振回路では二つの出力の位相が$90°$異なる二相発振器を容易に実現することができ、汎用性の高いフィルターである。

図 9-8 に示すようにA_1の出力を状態変数$X(s)$と定義し、さらに

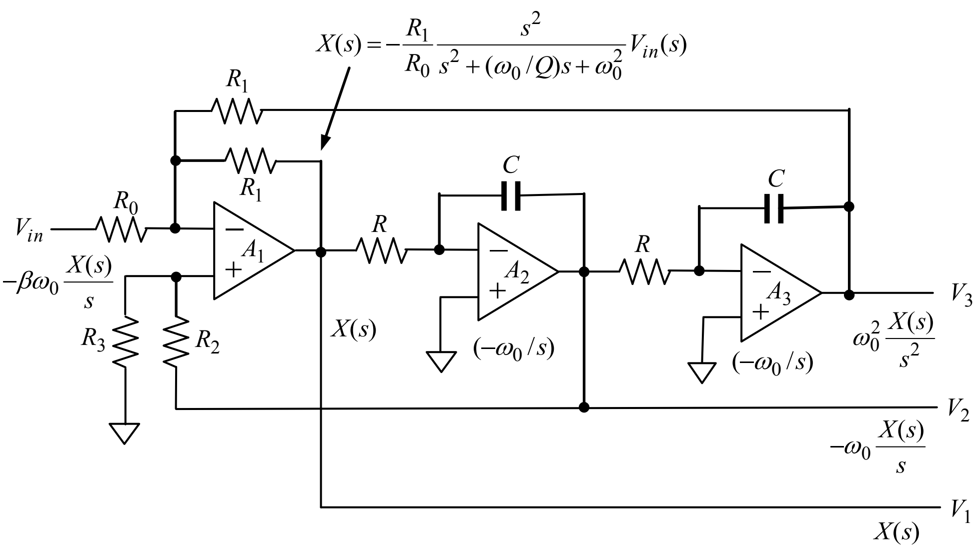


図 9-8　状態変数フィルター

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}, \quad K = \frac{R_1}{R_0}, \quad \beta = \frac{R_3}{R_2 + R_3}, \quad \frac{1}{Q} = (2 + \frac{R_1}{R_0})\beta \tag{9.2.25}$$

と置くと

$$\left.\begin{aligned}&G_0V_{in}(s)=-\{X(s)+\frac{\omega_0}{Q}\frac{X(s)}{s}+\omega_0^2\frac{X(s)}{s^2}\}\\&V_1(s)=X(s),\qquad V_2(s)=-\omega_0\frac{X(s)}{s},\qquad V_3(s)=\omega_0^2\frac{X(s)}{s^2}\end{aligned}\right\} \tag{9.2.26}$$

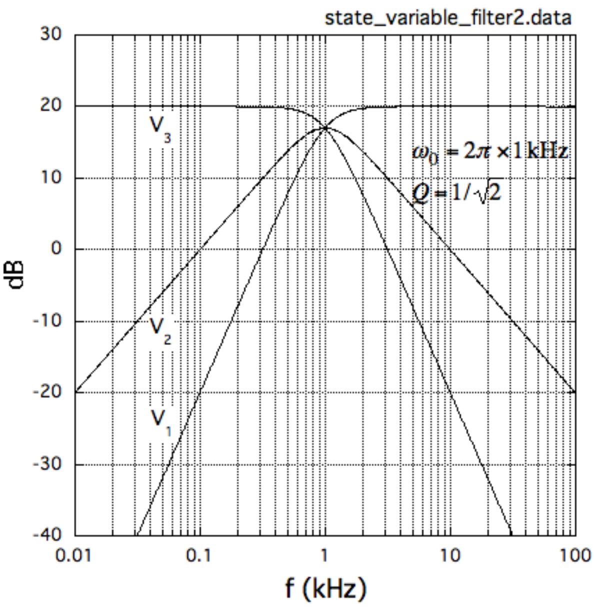
が成立する。これより

$$X(s)=-\frac{Ks^2}{s^2+(\omega_0/Q)s+\omega_0^2}V_{in}(s) \tag{9.2.27}$$

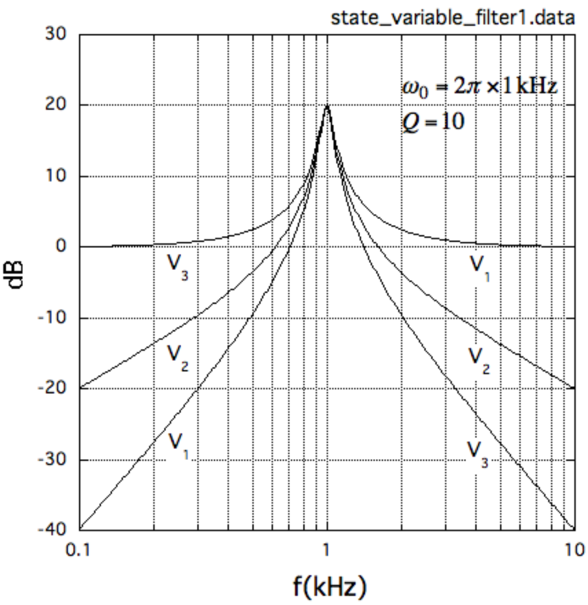
となり、$s=j\omega$と置くことで

$$\left.\begin{aligned}V_1&=K\frac{\omega^2/\omega_0^2}{1+j\omega/Q\omega_0-\omega^2/\omega_0^2}V_{in}\\V_2&=K\frac{j\omega/\omega_0}{1+j\omega/Q\omega_0-\omega^2/\omega_0^2}V_{in}\\V_3&=-K\frac{1}{1+j\omega/Q\omega_0-\omega^2/\omega_0^2}V_{in}\end{aligned}\right\} \tag{9.2.28}$$

を得る。



(a) $K=10,\quad Q=1/\sqrt{2}$
$(10R_0=R_1=47k\Omega,$
$R_2=75k\Omega, R_3=10k\Omega)$



(b) $K=1,\quad Q=10$
$(R_0=R_1=47k\Omega,$
$R_2=290k\Omega, R_3=10k\Omega)$

図 9-9　状態変数フィルター（$\omega_0=2\pi\times1kHz$）の特性

望みのK、Qを与えれば

$$R_1=KR_0,\quad R_2=\{(2+K)Q-1\}R_3 \tag{9.2.29}$$

により抵抗値の比が決まる。図 9-9 に出力V_1、V_2、V_3の例を示す。オペアンプが３個必要であるがK、ω_0、Qを独立に設定できるので VCVS 型や多重帰還型に比べて設計が容易であり、またQの設定範囲が広いので汎用性が高い。

9-3 バターワースフィルター

LPF 以外のフィルターの伝達関数は周波数変換により LPF の伝達関数から得ることができるので、以下では LPF についてのみ述べる。

フィルターの周波数特性関数を$G(j\omega)$として、n次バターワース LPF は

$$|G_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}} \tag{9.3.1}$$

で定義される。図 9-10 に振幅周波数特性 $|G_n(j\omega)|$ を示す。次数nに依らずω_cが-3dB カットオフ周波数になっていて、ω_cから離れた周波数での減衰カーブは

$1/\omega^n$ （$-6n\ dB/oct$）

に比例している。伝達関数は(9.3.1)式に おいて$s = j\omega$とおくことで

$$|G_n(s)|^2 = \frac{1}{1+(s/j\omega_c)^{2n}} \tag{9.3.2}$$

で与えられ、特性方程式は

$$1+(s/j\omega_c)^{2n} = 0 \tag{9.3.3}$$

となる。この特性方程式の$2n$個の根は図 9-11 に示すように複素 s 平面の原点を中心とする半半径ω_cの円上にあるが、$G(s)$は安定でなければならないことから$\mathrm{Re}(p_m) < 0$でなければならない。したがって$G(s)$のポールは

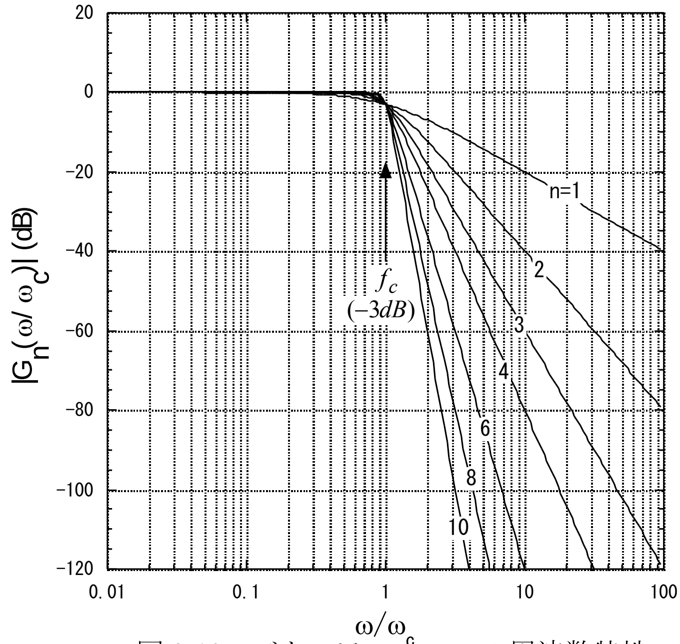


図 9-10　バターワース LPF の周波数特性

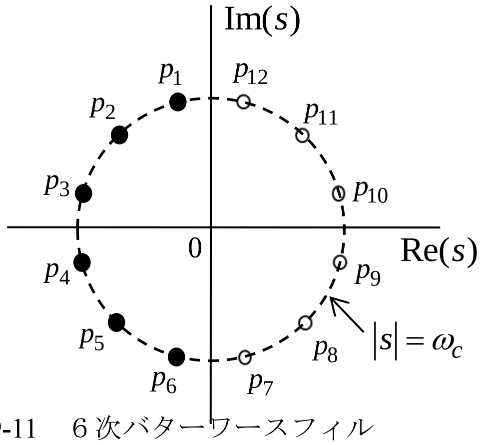


図 9-11　６次バターワースフィルターの伝達関数のポール（黒丸印）

$$p_m = j(-1)^{1/2n}\omega_c = \omega_c e^{j\theta_m} \tag{9.3.4}$$

ここで

$$\theta_m = \frac{2m+n-1}{2n}\pi \qquad (m = 1, 2, \cdots, 2n) \tag{9.3.5}$$

となる。図 9-11 に $n=6$（6 次）の場合の s 平面上における根 p_m の配置を示す。図中黒丸で示す $p_1, p_2, \cdots, p_6$ が $G(s)$ のポールである。

$G(s)$ の分母をポール $p_1, p_2, \cdots, p_n$ により因数分解して

$$G_n(s) = \frac{\omega_c^n}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \sum_{m=1}^{n} \frac{R_m}{s-p_m} \tag{9.3.6}$$

と書くことができ、$p_m\ (m=1,2,\cdots,n)$ は全て 1 次のポールであるので逆ラプラス変換は

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \sum_{m=1}^{n} R_m e^{p_m t} \tag{9.3.7}$$

で与えられる。ここで R_m は $s=p_m$ における留数 $R_m = [(s-p_m)G(s)]_{s=p_m}$ であり次式で与えられる。

$$R_m = \frac{\omega_c^n}{\prod_{\substack{k=1 \\ (k\neq m)}}^{n} (p_m - p_k)} = \frac{\omega_c e^{-j(2m+n-1)\pi/2n}}{\prod_{\substack{k=1 \\ (k\neq m)}}^{n} (1-e^{j(k-m)\pi/n})} \tag{9.3.8}$$

R_m を用いて(9.3.7)式によりバターワース・フィルターの時間的応答を求めることができる。以上のフィルターを具体的なアナログ回路で実現するには、以下に述べるように $G(s)$ を 1 次及び 2 次の伝達関数の積で書き表わし、それらの従属接続で構成するのが一般的である。

(9.3.5)式及び図 9-11 から分かるように

$$p_{n-(m-1)} = p_m^* \tag{9.3.9}$$

であり、n が奇数の場合は $p_{(n-1)/2+1}$ は実数となる。(9.3.9)式より特性方程式の根 p_m は、n が偶数の場合は $n/2$ 対の共役複素根からなり、n が奇数の場合は一つの実根と $(n-1)/2$ 対の共役複素根からなることが分かる。虚軸から遠い根から順に番号をつけ直すと（2 次の伝達関数を Q の小さい順に並べることに対応）

$$p_k = \omega_c e^{j\theta_k} \tag{9.3.10}$$

として

n が偶数の場合：

$$\begin{cases} \theta_k = \dfrac{n-k+1/2}{n}\pi \qquad (k=1,2,\cdots. n/2) \\ p_{-k} = p_k^* \end{cases} \tag{9.3.11}$$

n が奇数の場合

$$\begin{cases} \theta_k = \dfrac{n-k}{n}\pi \qquad (k=0,1,2,\cdots.(n-1)/2) \\ p_{-k} = p_k^* \end{cases} \tag{9.3.12}$$

である。これより n が奇数か偶数かによって伝達関数は次のようになる。

n が偶数の場合：特性方程式は $n/2$ 対の共役複素根を持つので、伝達関数は次のように $n/2$ 個の２次の伝達関数の積となる。

$$G_n(s)=\frac{\omega_c^2}{s^2+(\omega_c/Q_1)s+\omega_c^2}\cdot\frac{\omega_c^2}{s^2+(\omega_c/Q_2)s+\omega_c^2}\cdots\cdot\frac{\omega_c^2}{s^2+(\omega_c/Q_{n/2})s+\omega_c^2} \tag{9.3.13}$$

ここで

$$Q_k=-\frac{\omega_c}{p_k+p_k^*}=-\frac{1}{2\cos\theta_k}$$

$$=\frac{1}{2\cos\{(k-1/2)\pi/n\}} \tag{9.3.14}$$

は (p_k, p_k^*) をポールに持つ２次の伝達関数の Q 値である。

n が奇数の場合：特性方程式は一つの実根と $(n-1)/2$ 対の共役複素根を持つので、伝達関数は次のように一つの１次の伝達関数と $(n-1)/2$ 個の２次の伝達関数の積となる。

$$G_n(s)=\frac{\omega_c}{s+\omega_c}\cdot\frac{\omega_c^2}{s^2+(\omega_c/Q_1)s+\omega_c^2}\cdot\frac{\omega_c^2}{s^2+(\omega_c/Q_2)s+\omega_c^2}\cdots\cdot\frac{\omega_c^2}{s^2+(\omega_c/Q_{(n-1)/2})s+\omega_c^2} \tag{9.3.15}$$

ここで

$$Q_k=-\frac{\omega_c}{p_k+p_k^*}=-\frac{1}{2\cos\theta_k}$$

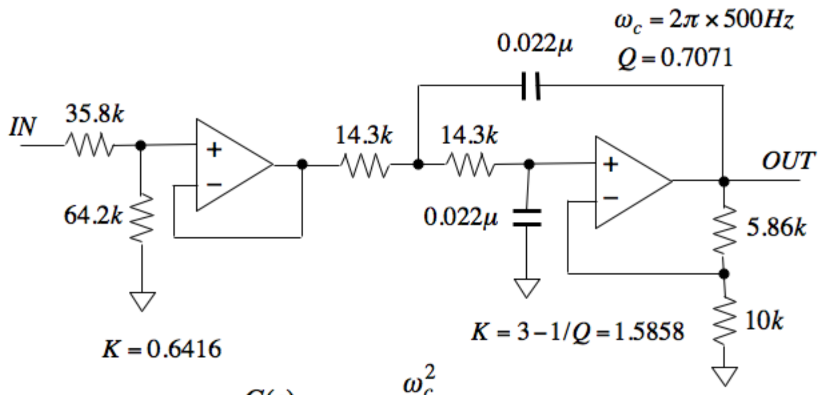
$$=\frac{1}{2\cos\{(k/n)\pi\}} \tag{9.3.16}$$

である。

すなわち n が偶数の場合は Q 値がそれぞれ $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{n/2}$ である２次の LPF を $n/2$ 個従属接続する、また n が奇数の場合は
１次の LPF と $(n-1)/2$ 個の２次の LPF を従属接続することで n 次のバターワース LPF を構成することができる。表 9-1 に ω_c で規格化したポール p_k/ω_c 及び Q_k の例を示す。表 9-1 により４次までのバターワース型ローパスフィルター（LPF）を VCVS フィルターで構成した回路例を図 9-12～9-14 に示す。

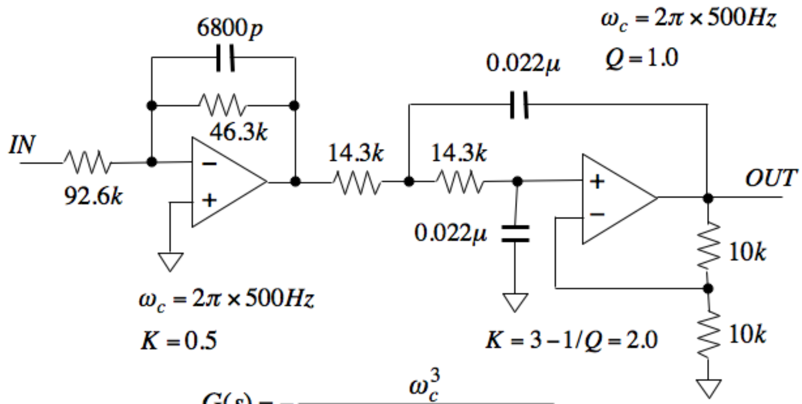
n		p_k/ω_c	Q_k	
1	１次	-1		
2	２次	$e^{\pm j3\pi/4}$	Q_1	0.7071
3	１次	-1		
	２次	$e^{\pm j2\pi/3}$	Q_1	1.0
4	２次	$e^{\pm j7\pi/8}$	Q_1	0.5412
		$e^{\pm j5\pi/8}$	Q_2	1.3066
5	１次	-1		
	２次	$e^{\pm j4\pi/5}$	Q_1	0.6180
		$e^{\pm j3\pi/5}$	Q_2	1.6180
6	２次	$e^{\pm j11\pi/12}$	Q_1	0.5176
		$e^{\pm j9\pi/12}$	Q_2	0.7071
		$e^{\pm j7\pi/12}$	Q_3	1.9319
8	２次	$e^{\pm j15\pi/16}$	Q_1	0.5098
		$e^{\pm j13\pi/16}$	Q_2	0.6013
		$e^{\pm j11\pi/16}$	Q_3	0.9000
		$e^{\pm j9\pi/16}$	Q_4	2.5629

表 9-1　バターワース・フィルターの p_k/ω_c 及び Q_k



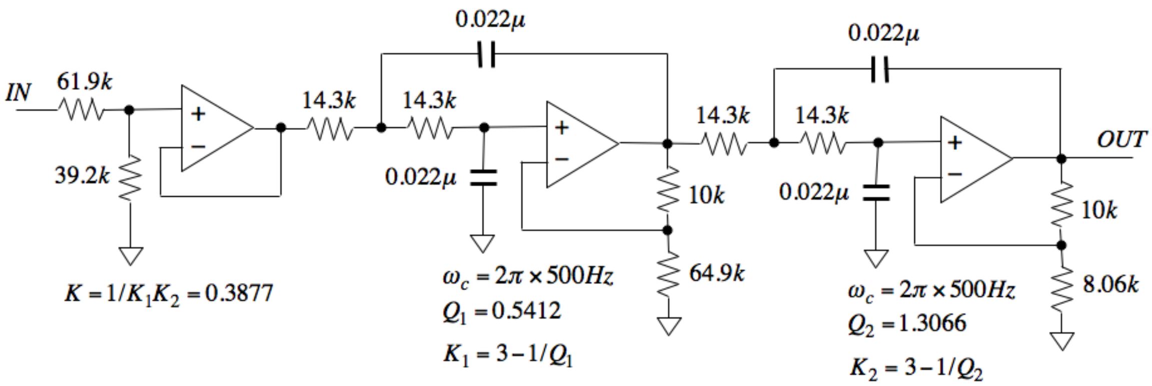
$$G(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$$

図 9-12　２次バターワース・フィルター（LPF）



$$G(s) = -\frac{\omega_c^3}{(s+\omega_c)(s^2 + \omega_c s + \omega_c^2)}$$

図 9-13　３次バターワース・フィルター（LPF）



$$G(s) = \frac{\omega_c^4}{(s^2 + \frac{\omega_c}{1.3066}s + \omega_c^2)(s^2 + \frac{\omega_c}{0.5412}s + \omega_c^2)}$$

図 9-14　４次バターワース・フィルター（LPF）

9-4 ベッセルフィルター

ベッセルフィルターは群遅延時間が最も平坦なフィルターである。群遅延時間は

$$\tau = -\frac{d\theta}{d\omega} \tag{9.4.1}$$

で定義され、信号の伝播時間を表す。信号 $x(t)$ に対して時間を τ だけ遅らせた信号は $x_d(t) = x(t-\tau)$ である。これをラプラス変換 $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ で表現すると

$$X_d(s) = \mathcal{L}[x(t-\tau)] = e^{-\tau s} X(s) \tag{9.4.2}$$

と表される。これより周波数成分は

$$X_d(j\omega) = e^{-j\omega\tau} X(j\omega) \tag{9.4.3}$$

となり、$X_d(j\omega)$ は $X(j\omega)$ に対して周波数に比例した位相遅れ

$$-\theta = \omega\tau \tag{9.4.4}$$

を有する。ここで $x(t-\tau)$ は $x(t)$ を時間軸方向に平行移動しただけであるので、波形は同一である。すなわち位相遅れが周波数に比例する場合は波形歪がないことを意味する。すなわち位相遅れを周波数で微分したもの（群遅延時間）は時間遅れ τ を表わしており、τ が一定であることは波形歪がないことの条件の一つである。

ベッセルフィルター（LPF）は信号の通過帯域内での群遅延時間が最も一定であるフィルターとして定義される。時間遅れの伝達関数 $e^{-\tau s}$ を

$$e^{-\tau s} = \frac{1}{\cosh(\tau s) + \sinh(\tau s)} = \frac{1}{v(\tau s) + u(\tau s)} \tag{9.4.5}$$

とおき、$\coth(\tau s)$ を次のように連分数に展開する。

$$\frac{v(\tau s)}{u(\tau s)} = \coth(\tau s) = \frac{1}{\tau s} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{\tau s} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{\tau s} + \cdots}} \tag{9.4.6}$$

連分数展開を n 回で打ち切り、分子を $v_n(\tau s)$ 、分母を $u_n(\tau s)$ とおくと

$$\left.\begin{array}{ll} v_1(\tau s) = 1, & u_1(\tau s) = \tau s \\ v_2(\tau s) = \tau^2 s^2 + 3, & u_2(\tau s) = 3\tau s \\ v_3(\tau s) = 6\tau^2 s^2 + 15, & u_3(\tau s) = \tau^3 s^3 + 15\tau s \\ \quad \cdots\cdots\cdots & \quad \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{9.4.7}$$

となる。ここで

$$D_n(\tau s) = v_n(\tau s) + u_n(\tau s) \tag{9.4.8}$$

とおくと$1/D_n(\tau s)$はsのn次有理式による$e^{-\tau s}$の近似になる。n次の多項式$D_n(\tau s)$は

$$\left.\begin{aligned} &D_1(\tau s) = \tau s + 1 \\ &D_2(\tau s) = \tau^2 s^2 + 3\tau s + 3 \\ &D_3(\tau s) = \tau^3 s^3 + 6\tau^2 s^2 + 15\tau s + 15 \\ &D_4(\tau s) = \tau^4 s^4 + 10\tau^3 s^3 + 45\tau^2 s^2 + 105\tau s + 105 \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{9.4.9}$$

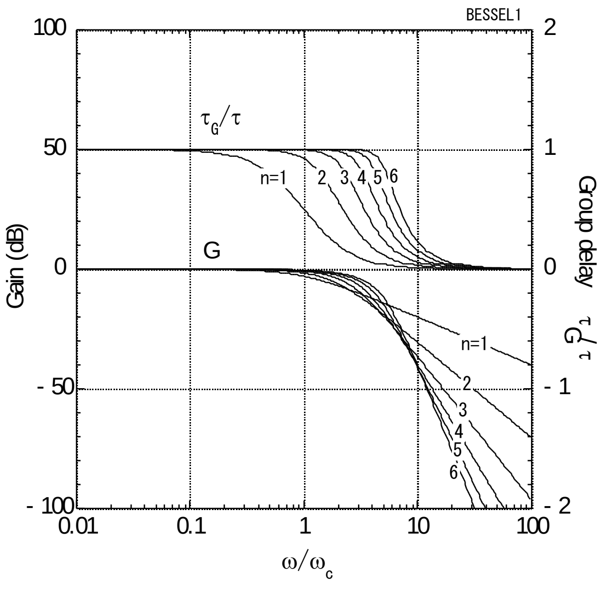
より

$$D_n(\tau s) = (2n-1)D_{n-1}(\tau s) + (\tau s)^2 D_{n-2}(\tau s) \tag{9.4.10}$$

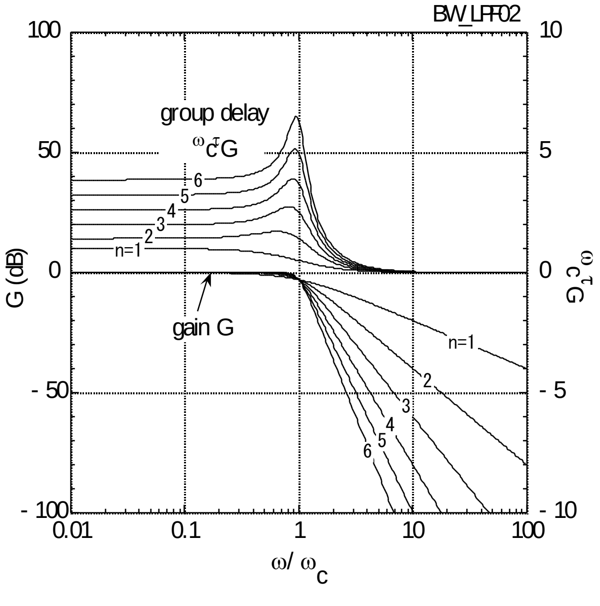
で与えられる。以上よりn次のベッセル型 LPF の伝達関数を次式で定義する。

$$G(s) = \frac{D_n(0)}{D_n(\tau s)} \tag{9.4.11}$$

n次のベッセルフィルターは時間遅れをn次の有理式で近似したフィルターであり、振幅特性は LPF となる。次数を上げるほど$e^{-\tau s}$に対する近似が良くなり、郡遅延特性、振幅特性ともに平坦になるが、カットオフ周波数も高くなる。なお、３次以上のベッセルフィルターの特性方程式$D_n(\tau s)=0$の根を解析的に求めることはほとんど不可能なので、計算機による専用プログラムで設計することになる。



(a)ベッセルフィルター

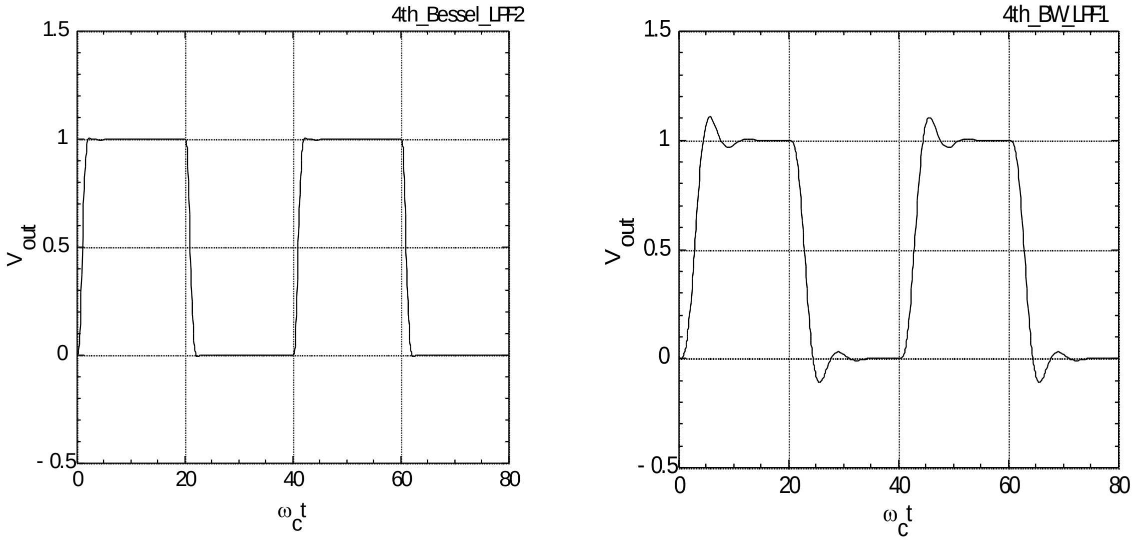


(b)バターワースフィルター

図 9-13　群遅延特性及び振幅特性

図 9-13 に群遅延特性及び振幅特性を示す。通過帯域では群遅延が一定であることが分かる。これに対して図(b)に示すようにバターワースフィルターではカットオフ周波数に近づくと群遅延が

大きく変化する。また、図 9-14(a)には矩形波信号に対する４次ベッセルフィルターの出力を示す。同図(b)に示す４次バターワース LPF の矩形波出力に対して波形歪みが小さいことが分かる。



(a) ４次ベッセルフィルター　　(b) ４次バターワース LPF

図 9-14　矩形波応答

9-5 チェビシェフ・フィルター

チェビシェフ・フィルター（LPF）は通過帯域内に多少のリプル即ち振幅周波数特性の変動を許容して変動を一定限度に抑え、かつ可能な限り最も急峻な遮断特性となるように考えられたフィルターである。バターワース・フィルターの伝達関数$|G(j\omega)|=\sqrt{1/\{1+(\omega/\omega_c)^{2n}\}}$を拡張して、通過帯域のゲインが 1 の$n$次チェビシェフ・フィルターの伝達関数は

$$|G(j\omega)|=\sqrt{\frac{1}{1+\{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}^2}} \tag{9.5.1}$$

で定義される。ここでチェビシェフ多項式$C_n(\omega)$は

$$\omega/\omega_c=\begin{cases}\cos\psi & (0\le\omega/\omega_c\le 1)\\ \cosh\psi & (1<\omega/\omega_c)\end{cases} \tag{9.5.2}$$

$$C_n(\omega/\omega_c)=\begin{cases}\cos n\psi & (0\le\omega/\omega_c\le 1)\\ \cosh n\psi & (1<\omega/\omega_c)\end{cases} \tag{9.5.3}$$

で与えられる。例として図 9-15 に$|C_4(\omega/\omega_c)|^2$の振る舞いを示す。$\omega/\omega_c<1$では 0 と 1 の間を$n/2$回振動し、$1<\omega/\omega_c$では急激に単調増加する。具体形は

$$
\left.\begin{aligned}
&C_1(x) = x \\
&C_2(x) = 2x^2 - 1 \\
&C_3(x) = 4x^3 - 3x \\
&C_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
&\quad \cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \qquad (9.5.4)
$$

即ち

$$
C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x) \qquad (9.5.5)
$$

である。また

$$
\left|C_n(\omega/\omega_c)\right| \le 1 \ \ (0 < \omega/\omega_c < 1)
$$

であるので通過帯域におけるゲイン変動幅（リプル）は$\sqrt{1+\varepsilon^2}$になる（図 9-16）。

バターワース LPF とチェビシェフ LPF の減衰率を比較するために$\omega/\omega_c =1$におけるn次の伝達関数の傾きを比較してみる。n次バターワースでは

$$
\left.\frac{d\left|G_n(\omega/\omega_c)\right|}{d(\omega/\omega_c)}\right|_{\omega/\omega_c=1} = -\frac{n}{2\sqrt{2}} \qquad (9.5.6)
$$

一方n次チェビシェフでは

$$
\left.\frac{d\left|G_n(\omega/\omega_c)\right|}{d(\omega/\omega_c)}\right|_{\omega/\omega_c=1} = -\frac{\varepsilon^2 n^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \qquad (9.5.7)
$$

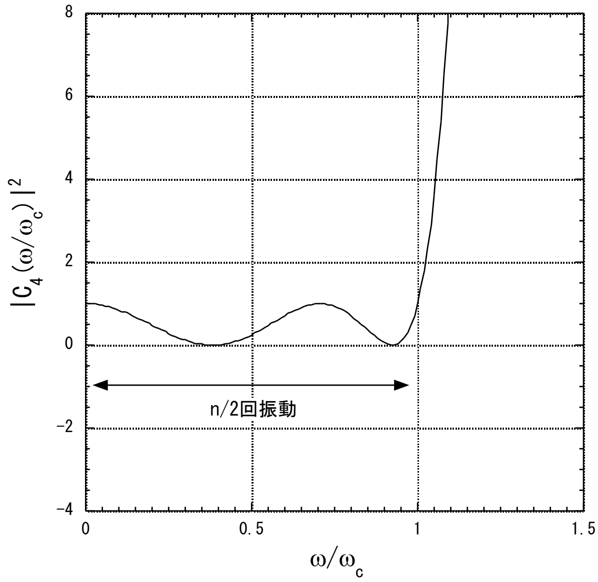


図 9-15　$\left|C_4(\omega/\omega_c)\right|^2$

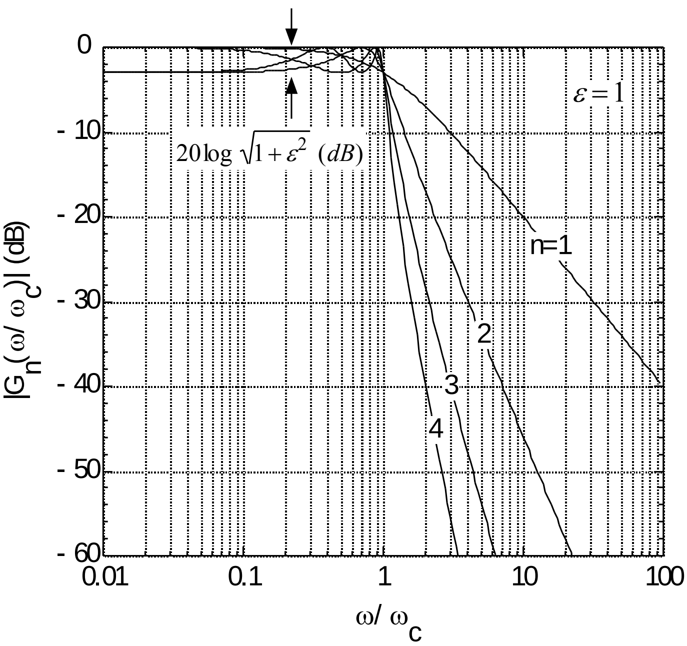


図 9-16　チェビシェフ LPF のリプル

となり、$\varepsilon \approx 1$とすると$\omega/\omega_c = 1$の近傍においてチェビシェフ LPF はバターワース LPF のn倍の減衰率を持つことが分かる。

次に伝達関数のポールを求める。(9.5.1)式において$j\omega = s$と置くと

$$
G(s)G(-s) = \frac{1}{1+\{\varepsilon C_n(s/j\omega_c)\}^2} \qquad (9.5.8)
$$

であることから、特性方程式は

$$1+\{\varepsilon C_n(s/j\omega_c)\}^2=0 \tag{9.5.9}$$

で与えられる。更に

$$\{C_n(s/j\omega_c)\}^2=\left\{\begin{array}{ll}\cos^2 n\psi & (0\le\omega/\omega_c\le 1)\\ \cosh^2 n\psi & (1<\omega/\omega_c)\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\{C_{2n}(s/j\omega_c)+1\} \tag{9.5.10}$$

より $C_{2n}(s/j\omega_c)$ は次のようになる。

$$C_{2n}(s/j\omega_c)=-(2+\varepsilon^2)/\varepsilon^2 \tag{9.5.11}$$

一方、μ、ν を実数として

$$s/j\omega_c=\cos(\mu+j\nu) \tag{9.5.12}$$

と置くと

$$\begin{aligned}C_{2n}(s/j\omega_c)&=\cos 2n(\mu+j\nu)\\&=\cos(2n\mu)\cosh(2n\nu)+j\sin(2n\mu)\sinh(2n\nu)\end{aligned} \tag{9.5.13}$$

したがって

$$\left.\begin{array}{l}\cos(2n\mu)\cosh(2n\nu)=-(2+\varepsilon^2)/\varepsilon^2\\ \sin(2n\mu)\sinh(2n\nu)=0\end{array}\right\} \tag{9.5.14}$$

である。第二式より $\sin(2n\mu)=0$ または $\sinh(2n\nu)=0$ であるが、$\sinh(2n\nu)=0$ のときは $\cosh(2n\nu)=1$ より $\cos(2n\mu)=-(2+\varepsilon^2)/\varepsilon^2<-1$ となるため $\sin(2n\mu)=0$ でなければならない。

また第一式より $\cos(2n\mu)<0$ であるから

$\cos(2n\mu)=-1$、即ち

$$\left.\begin{aligned}2n\mu&=(2k+1)\pi \qquad (k=0,1,\cdots,2n-1)\\2n\nu&=\cosh^{-1}\{(2+\varepsilon^2)/\varepsilon^2\}\\&=2\ln\{(\sqrt{1+\varepsilon^2}+1)/\varepsilon\}\end{aligned}\right\} \tag{9.5.15}$$

となる。したがって特性方程式の根 p は(9.5.15)式を満たす ν、μ を用いて

$$\begin{aligned}p/j\omega_c&=\cos(\mu+j\nu)\\&=\cosh\nu\cdot\sin(\mu-\pi/2)\\&\quad-j\sinh\nu\cdot\cos(\mu-\pi/2)\end{aligned} \tag{9.5.16}$$

で与えられる。即ち根

$$\begin{aligned}p&=\omega_c\sinh\nu\cdot\cos(\mu-\pi/2)\\&\quad+j\omega_c\cosh\nu\cdot\sin(\mu-\pi/2)\end{aligned} \tag{9.5.17}$$

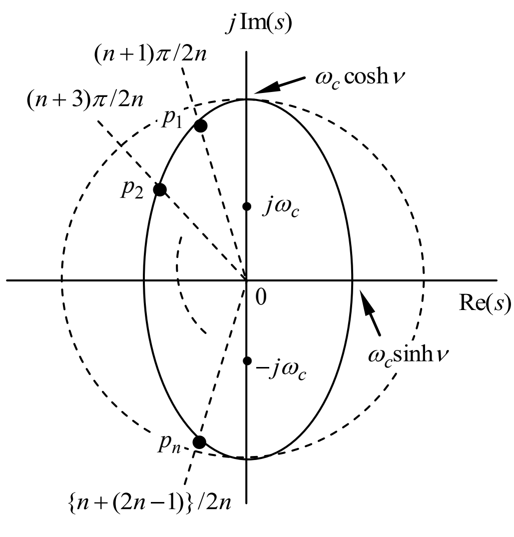


図 9-17　チェビシェフ・フィルターのポールの配置

は、焦点が$0 \pm j\omega_c$にあり短軸a及び長軸bがそれぞれ

$$a = \omega_c \sinh \nu, \qquad b = \omega_c \cosh \nu$$

であるs平面上の楕円上にあり、偏角が$\theta = \mu - \pi/2$の点であることが分かる。上で求めた特性方程式の根が伝達関数のポールであるためには、安定条件$\mathrm{Re}(p) < 0$より

$$\pi/2 < \theta < 3\pi/2 \tag{9.5.18}$$

でなければならない。これより$k = n+1, \cdots, 2n$であり、許される根

$$p_k = \omega_c \sinh \nu \cdot \cos \theta_k + j\omega_c \cosh \nu \cdot \sin \theta_k \tag{9.5.19}$$

は偏角が

$$\theta_k = (2k+n-1)\pi/2n \qquad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{9.5.20}$$

のものだけである。これはバターワース・フィルターのポールの偏角（(9.3.5)式）と同じであり 9-2 節の偏角についての議論がそのまま成立する。図 9-17 にs平面におけるチェビシェフ・フィルターのポールの配置（9.5.20）式）を示す。また (9.5.4)式及び(9.5.5)式より

$$C_n(\omega/\omega_c)\Big|_{\omega \to 0} = \begin{cases} 0 & (\text{for } n = odd) \\ 1 & (\text{for } n = even) \end{cases} \tag{9.5.21}$$

であることから、通過帯域でのゲインが 1 である伝達関数は

$$\begin{aligned} |G(s)| &= \sqrt{\frac{1}{1 + \{\varepsilon C_n(s/j\omega_c)\}^2}} \times \begin{cases} 1 & (\text{for } n = odd) \\ \sqrt{1+\varepsilon^2} & (\text{for } n = even) \end{cases} \\ &= \left| \frac{p_1 \cdots p_n}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} \right| \end{aligned} \tag{9.5.22}$$

と書くことができる。バターワース・フィルターの場合と同様に、ポールを虚軸から遠いものから順に番号をつけ直すと

nが偶数の場合：

$$\begin{cases} \theta_k = \dfrac{n-k+1/2}{n}\pi & (k = 1, 2, \cdots . n/2) \\ p_{-k} = p_k^* \end{cases} \tag{9.5.23}$$

nが奇数の場合

$$\begin{cases} \theta_k = \dfrac{n-k}{n}\pi & (k = 0, 1, 2, \cdots . (n-1)/2) \\ p_{-k} = p_k^* \end{cases} \tag{9.5.24}$$

となる。以上よりチェビシェフ・ローパスフィルターの伝達関数は次のようになる。

nが奇数の場合：特性方程式は一つの実根と$(n-1)/2$対の共役複素根を持つので、伝達関数は 1 次の伝達関数一つと$(n-1)/2$個の 2 次の伝達関数の積となる。

$$G_n(s)=\frac{\omega_c\sinh\nu}{s+\omega_c\sinh\nu}\cdot\frac{\omega_1^2}{s^2+(\omega_1/Q_1)s+\omega_1^2}\cdot\frac{\omega_2^2}{s^2+(\omega_2/Q_2)s+\omega_2^2}$$
$$\cdots\cdots\frac{\omega_{(n-1)/2}^2}{s^2+(\omega_{(n-1)/2}/Q_{(n-1)/2})s+\omega_{(n-1)/2}^2} \tag{9.5.25}$$

nが偶数の場合：特性方程式は$n/2$対の共役複素根を持つので、伝達関数は$n/2$個の2次の伝達関数の積となる。

$$G_n(s)=\frac{\omega_1^2}{s^2+(\omega_1/Q_1)s+\omega_1^2}\cdot\frac{\omega_2^2}{s^2+(\omega_2/Q_2)s+\omega_2^2}\cdots\cdots\frac{\omega_{n/2}^2}{s^2+(\omega_{n/2}/Q_{n/2})s+\omega_{n/2}^2} \tag{9.5.26}$$

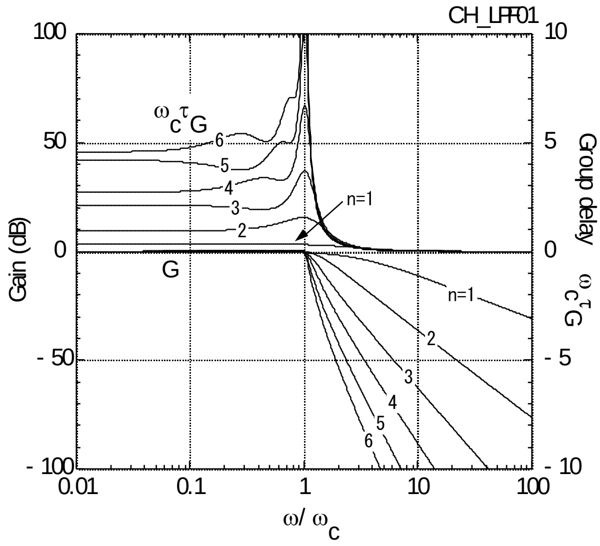
上でω_k、Q_kは(p_k,p_k^*)をポールとする2次の伝達関数の共振周波数及びQ値であり、次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}\omega_k&=\sqrt{p_kp_k^*}=\frac{\omega_c}{\sqrt{2}}\sqrt{\cosh 2\nu-\cos 2\theta_k}\\ Q_k&=-\frac{\sqrt{p_kp_k^*}}{p_k+p_k^*}=-\frac{\sqrt{\cosh 2\nu-\cos 2\theta_k}}{2\sqrt{2}\sinh\nu\cdot\cos\theta_k}\end{aligned}\right\} \tag{9.5.27}$$

表9-2にチェビシェフ・フィルターのリプルを$0.5dB$ $(\varepsilon=0.34)$としたときのω_k及びQ_kを、図9-18～9-20に群遅延特性、振幅特性、矩形波応答波形を示す。群遅延時間の変化が大きく矩形波の波形が乱れていることが分かる。また、図9-21～9-23にVCVS型フィルターで構成したカットオフ周波数$500Hz$のチェビシェフ型ローパスフィルターの回路例を示す。

リプル 0.5dB					
n		ω_k/ω_c		Q_k	
1	1次	ω_0/ω_c	2.8628		
2	2次	ω_1/ω_c	1.2313	Q_1	0.8637
3	1次	ω_0/ω_c	0.6265		
	2次	ω_2/ω_c	1.0689	Q_1	1.7062
4	2次	ω_1/ω_c	0.5970	Q_1	0,7051
		ω_2/ω_c	1.0313	Q_2	2.9406
5	1次	ω_0/ω_c	0.3623		
	2次	ω_1/ω_c	0.6905	Q_1	1.1778
		ω_2/ω_c	1.0177	Q_2	4.5450
6	2次	ω_1/ω_c	0.3962	Q_1	0.6836
		ω_2/ω_c	0.7681	Q_2	1.8104
		ω_3/ω_c	1.0114	Q_3	6.5128
8	2次	ω_1/ω_c	0.2967	Q_1	0.6766
		ω_2/ω_c	0.5989	Q_2	1.6107
		ω_3/ω_c	0.8610	Q_3	3.4657
		ω_4/ω_c	1.0059	Q_4	11.531

表9-2　チェビシェフ・フィルター（$\varepsilon=0.34$）のω_k及びQ_k



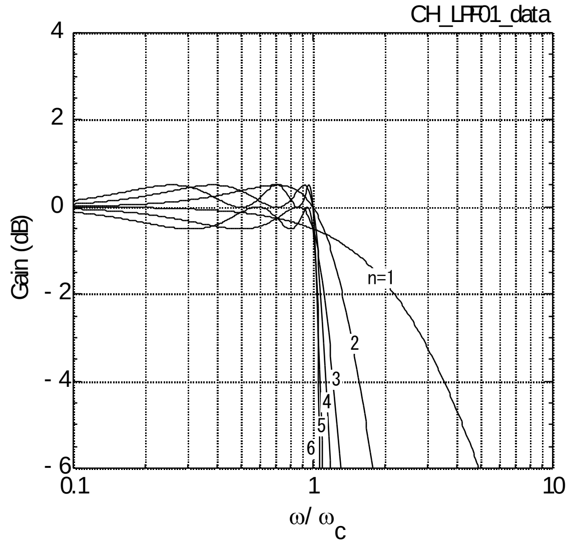


図 9-18　チェビシェフ・フィルター（リプル$0.5dB$）の振幅及び群遅延時間

図 9-19　リプルの拡大図

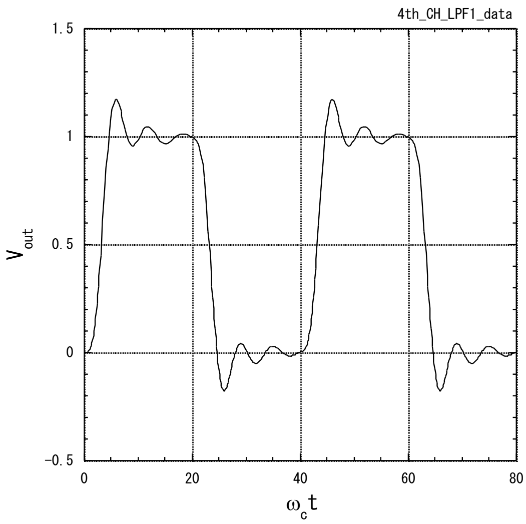


図 9-20　4 次チェビシェフ・フィルターの矩形波応答

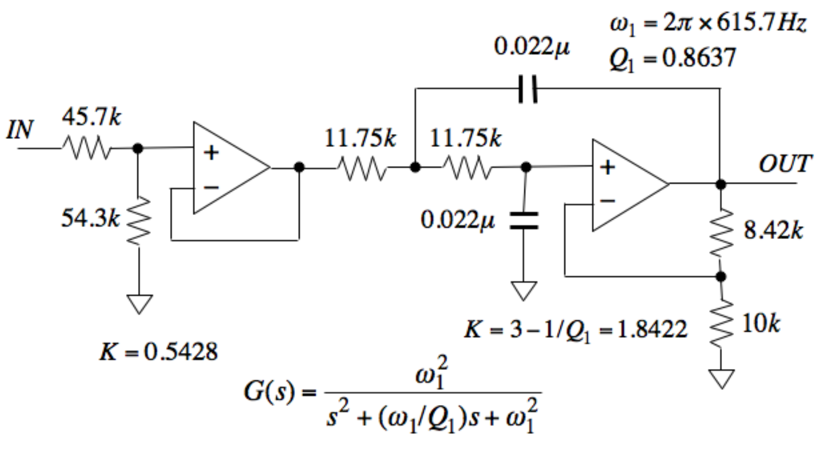
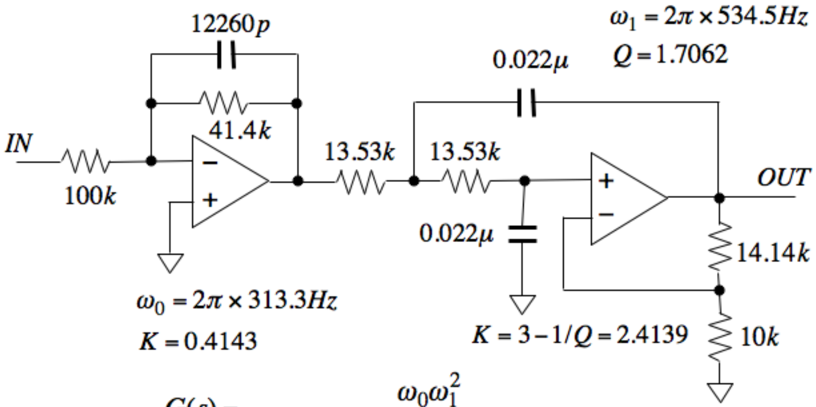
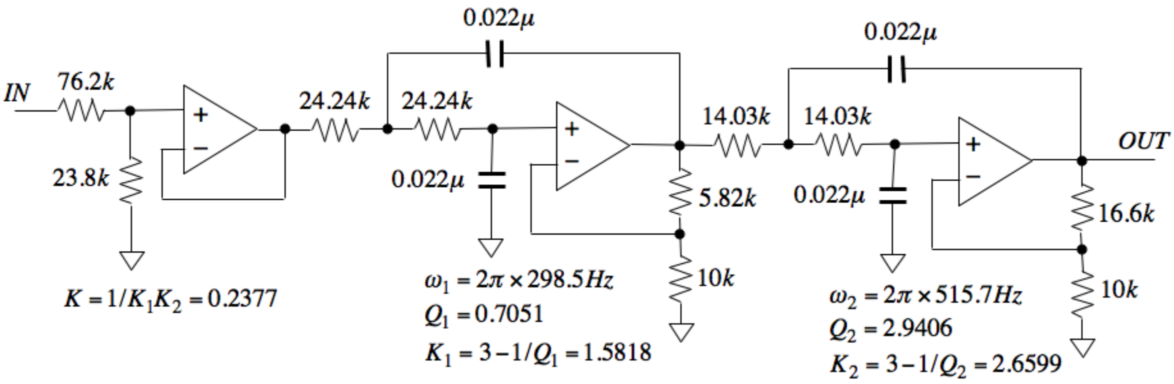


図 9-19　２次チェビシェフ・フィルター（LPF）



$$G(s) = -\frac{\omega_0 \omega_1^2}{(s+\omega_0)\{s^2 + (\omega_1/Q_1)s + \omega_1^2\}}$$

図 9-20　３次チェビシェフ・フィルター（LPF）



$$G(s) = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\{s^2 + (\omega_1/Q_1)s + \omega_1^2\}\{s^2 + (\omega_2/Q_2)s + \omega_2^2\}}$$

図 9-21　４次チェビシェフ・フィルター（LPF）

チェビシェフ・フィルターは減衰特性が急峻であるが通過帯域にリプルが生ずる。それに対して、減衰帯域にリプルを許容することで通過帯域の特性が平坦でかつ減衰特性が急峻となるように考えられたのが次節で述べる「逆チェビシェフ・フィルター」である。更に「連立チェビシェフ・フィルター」（または「楕円フィルター」）では通過帯域及び減衰帯域のいずれにもリプルを許容することで、チェビシェフ・フィルターより急峻な減衰特性を得ている。連立チェビシェフ・フィルターはチェビシェフ多項式$C_n(\omega)$の代わりにヤコビの楕円関数により定義されるチェビシェフ有理関数$R_{n,k_1}(\omega/\omega_c)$によって周波数特性が定義されるもので楕円フィルターとも呼ばれ、9-7 節でその概要を解説する。

9-6 逆チェビシェフ・フィルター

チェビシェフ・フィルターは周波数特性の通過帯域にリプルを許容して急峻な減衰特性を実現している。一方、逆チェビシェフ・フィルターは逆に減衰帯域にリプルを許容して通過帯域のリプルをなくしたフィルターである。バターワース・フィルターやチェビシェフ・フィルターの減衰領域では$(\omega/\omega_c)^{-n}$に比例して無限に減衰していくのに対して、逆チェビシェフ・フィルターの減衰量は有限に留まるが、十分に周波数特性が減衰した領域ではリプルがあっても問題がない場合が多い。

通過帯域にリプルのないフィルターとして

$$|G_{HPF}(j\omega)|^2 = 1 - \frac{1}{1+\{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}^2} \tag{9.6.1}$$

を考える。$\omega/\omega_c \to \infty$では$|G_{HPF}(j\omega)| \to 1$、$\omega/\omega_c \to 0$では$|G_{HPF}(j\omega)| \to \sim \varepsilon^2 << 1$となることから、HPF の性質を持ち減衰領域ではリプルがあるが通過帯域にはリプルがない。(9.6.1)式は

$$|G_{HPF}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\{\frac{1}{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)}\}^2} \tag{9.6.2}$$

と書き直すことができる。これはチェビシェフ・フィルターの定義((9.5.1)式)において$\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)$を$1/\{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}$に置き換えたものに等しくこのようなフィルターを逆チェビシェフ・フィルターという。(9.6.2)式に対して周波数変換を行うことで、通過帯域にリプルを持たない逆チェビシェフ LPF を構成する。$|G_{HPF}(j\omega)|$はまた

$$|G_{HPF}(j\omega)|^2 = \frac{\{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}^2}{1+\{\varepsilon C_n(\omega/\omega_c)\}^2} \tag{9.6.3}$$

と書け、これより逆チェビシェフ HPF の伝達関数$G_{HPF}(s)$はチェビシェフ・フィルターと同じ特性方程式を持つ。したがってチェビシェフ・フィルターのポールp_kを用いて

$$G_{HPF}(s) = \frac{\varepsilon(s-q_1)\cdots(s-q_n)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} \tag{9.6.4}$$

と書くことができる。ここでq_k は$C_n(s/j\omega_c)$の零点である（$C_n(q_k/j\omega_c)=0$)。α、βを実数として

$$s/j\omega_c = \cos(\alpha + j\beta) \tag{9.6.5}$$

とおくと

$$\begin{aligned} C_n(s/j\omega_c) &= \cos n(\alpha + j\beta) \\ &= \cos(n\alpha)\cosh(n\beta) + j\sin(n\alpha)\sinh(n\beta) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{9.6.6}$$

より

$$\alpha = (2k-1)\pi/2n, \qquad \beta = 0$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (9.6.7)$$

したがって零点q_kは

$$q_k/\omega_c = j\cos\{(2k-1)\pi/2n\}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (9.6.8)$$

で与えられる。(9.6.4)式に対して周波数変換 $s/\omega_c \rightarrow \omega_c/s$ を行い LPF の伝達関数に変換すると

$$G(s) = \frac{(\omega_c/s - q_1/\omega_c)\cdots(\omega_c/s - q_n/\omega_c)}{(\omega_c/s - p_1/\omega_c)\cdots(\omega_c/s - p_n/\omega_c)} \qquad (9.6.9)$$

を得る。ここでp_kはチェビシェフ・フィルターのポール

$$\left.\begin{aligned} p_k/\omega_c &= \sinh\nu\cdot\cos\theta_k + j\cosh\nu\cdot\sin\theta_k \\ \theta_k &= (2k+n-1)\pi/2n \end{aligned}\right\}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (9.6.10)$$

である((9.5.19)式参照)。$G(s)$のポールω_c^2/p_kの実数部は負である

$$\mathrm{Re}(\omega_c^2/p_k) = (\omega_c/|p_k|)^2\,\mathrm{Re}(p_k) < 0$$

ので$G(s)$は安定であることが分かる。図 9-22、図 9.23 に(9.6.9)式の周波数特性及び群遅延特性を示す。逆チェビシェフ・フィルターもチェビシェフ・フィルターと同様に１次と２次のアナログ・フィルターのカスケード接続で構成することができるが、伝達関数の零点を作るための GIC 回路等による LC 直列共振フィルターが必要となるため、複雑な構成となる。現在ではこのような複雑な高次フィルターはデジタルフィルターで構成するのが一般的であり、本節ではアナログ・能動フィルターによる構成例は省略する。

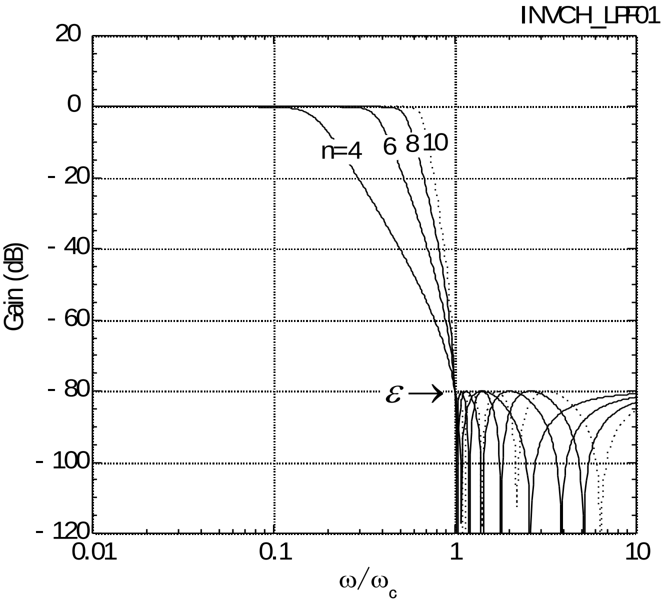


図 9-22　逆チェビシェフ LPF 特性

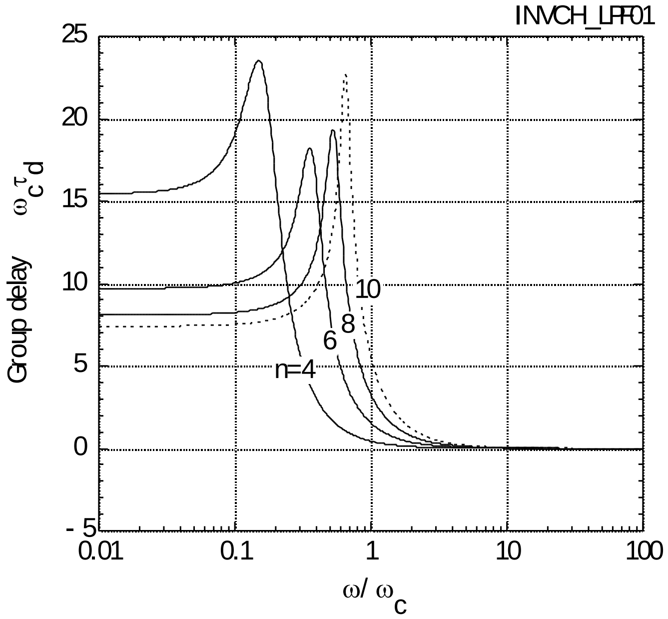


図 9-23　逆チェビシェフ LPF の
群遅延特性

注：逆チェビシェフ・フィルターの規格化について

p_kをポール、q_kを零点として

$$x = \omega_c/\omega$$

と置くと

$$\frac{\{\varepsilon C_n(x)\}^2}{1+\{\varepsilon C_n(x)\}^2} \to \begin{cases} \varepsilon^2/(1+\varepsilon^2) & (x\to 0) \\ 2^{2n}\varepsilon^2 x^{2n}/(1+2^{2n}\varepsilon^2 x^{2n}) & (x\to\infty) \end{cases}$$

$$\left|\varepsilon C_n(x)\right|_{x\to\infty} = \left|K_2(jx-q_1)\cdots(jx-q_n)\right|_{x\to\infty} \to \left|K_2 x^n\right|_{x\to\infty}$$

より

$$\left|G(jx)\right|_{x\to\infty} = \left|\frac{K_1K_2(jx-q_1)\cdots(jx-q_n)}{(jx-p_1)\cdots(jx-p_n)}\right|_{x\to\infty} = \left|\frac{K_1K_2x^n}{x^n}\right|_{x\to\infty} = K_1K_2$$

したがって$\left|G(jx)\right|_{x\to\infty}=1$とすると

$$K_1K_2 = 1$$

故に(9.6.9)式

$$\left|G(jx)\right| = \left|\frac{(jx-q_1)\cdots(jx-q_n)}{(jx-p_1)\cdots(jx-p_n)}\right|$$

が成立する。

9-7 連立チェビシェフ・フィルター（楕円フィルター）

チェビシェフ・フィルター及び逆チェビシェフ・フィルターの周波数特性は

$$\left|G(j\omega)\right|^2 = \frac{1}{1+f^2(\omega/\omega_c)} \tag{9.7.1}$$

なる形をしており、チェビシェフ・フィルターでは$f(\omega/\omega_c)=C_n(\omega/\omega_c)$、逆チェビシェフ・フィルターでは$f(\omega/\omega_c)=1/C_n(\omega_c/\omega)$である。そこで通過帯域及び減衰帯域の両方にリプルを持ち、急峻な減衰特性を持つフィルターを作るにはどのような性質の関数$f(\omega/\omega_c)$を考えれば良いだろうか。チェビシェフ・フィルターと逆チェビシェフ・フィルターにおける$f(\omega/\omega_c)$の性質をまとめると次表のようになる。

	$C_n(\omega/\omega_c)$	$1/C_n(\omega_c/\omega)$
$\omega<\omega_c$	-1~1 で振動 （n 個の零点を持つ）	緩やかに単調増加
$\omega>\omega_c$	急速に単調増加	1~∞ で振動 （n 個のポールを持つ）

$C_n(\omega/\omega_c)$と$1/C_n(\omega_c/\omega)$の性質を併せ持つ$f(\omega/\omega_c)$として、$\omega<\omega_c$で n 個の零点を持ち$\omega>\omega_c$で個のポールを持つ関数を用いることで、チェビシェフ・フィルターと逆チェビシェフ・フィルターの性質を持ったフィルターを構成することができる。そのような関数$f(\omega/\omega_c)$として、ヤコビの楕円関数$cd(x,k)$、$sn(x,k)$により定義されるチェビシェフ有理関数$R_{n,k'}(\omega/\omega_c)$を用い、周波数特性関数$G(j\omega)$が

$$\left|G(j\omega)\right|^2=\frac{1}{1+\{\varepsilon R_{n,k'}(\omega/\omega_c)\}^2} \tag{9.7.2}$$

で与えられるフィルターを考えると、通過帯域及び阻止帯域で等リプルとなる特性を得ることができる。このようなフィルターを連立チェビシェフ・フィルターまたは楕円フィルターという。

第 1 種楕円積分

$$u=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{9.7.3}$$

の逆関数を

$$z=sn(u,k)$$

と書く。ここでkを関数snの母数と云い

$$k'=\sqrt{1-k^2} \tag{9.7.4}$$

を補母数という。$cn(u,k)$、$dn(u,k)$、$cd(u,k)$を

$$\left.\begin{aligned} cn(u,k)&=\{1-sn^2(u,k)\}\\ dn(u,k)&=\{1-k^2sn^2(n,k)\}\\ cd(u,k)&=cn(u,k)/dn(u,k)\end{aligned}\right\} \tag{9.7.5}$$

で定義する。関数$cd(u,k)$により関数

$$R_{n,k'}(x)=cd(\frac{nK'}{K}cd^{-1}(x,k),k') \tag{9.7.6}$$

を定義すると、$R_{n,k'}(x)$はn個の零点とn個のポールを持ち以下のn次の有理式（チェビシェフ有理関数）で表わすことができる。

$$\left.\begin{aligned} R_{n,k'}(x)&=x\prod_{m=1}^{(n-1)/2}\frac{k^2(\omega_{n,m}/\omega_c)^2-1}{1-(\omega_{n,m}/\omega_c)^2}\frac{x^2-(\omega_{n,m}/\omega_c)^2}{k^2(\omega_{n,m}/\omega_c)^2x^2-1} \qquad (\text{for } n=odd)\\ R_{n,k'}(x)&=\prod_{m=1}^{n/2}\frac{k^2(\omega_{n,m}/\omega_c)^2-1}{1-(\omega_{n,m}/\omega_c)^2}\frac{x^2-(\omega_{n,m}/\omega_c)^2}{k^2(\omega_{n,m}/\omega_c)^2x^2-1} \qquad (\text{for } n=even)\end{aligned}\right\} \tag{9.7.7}$$

ここで

$$x=\omega/\omega_c, \qquad \omega_{n,m}/\omega_c=sn(\frac{n-2m-1}{n}K,k) \tag{9.7.8}$$

またK、K'は次の第１種完全楕円積分

$$K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad K'=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \tag{9.7.9}$$

である。$R_{n,k'}(\omega/\omega_c)$のポールを$\alpha_{n,m}$、零点を$\beta_{n,m}$とすると

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{n,m}&=\omega_c^2/k\omega_{n,m}\\ \beta_{n,m}&=\omega_{n,m}\end{aligned}\right\} \tag{9.7.10}$$

であり、$R_{n,k'}(x)$のポール$\omega=\alpha_{n,m}$は$G(j\omega)$の零点になり、$R_{n,k'}(x)$の零点$\omega=\beta_{n,m}$では$G(j\omega)$は１となる。なお、(9.7.8)式より $\omega_{m,n}/\omega_c<1$ である。$R_{n,k'}(\omega/\omega_c)$及び$|G(j\omega)|^2$は下に示す表のような周波数依存性を持ち阻止域の$|G(j\omega)|^2$は

$$\frac{1}{1+(\varepsilon/k')^2}\cong(\frac{k'}{\varepsilon})^2 \quad (k'<<\varepsilon) \tag{9.7.11}$$

となる。例として通過帯域のリプルを$\sqrt{1+\varepsilon^2}=0.5dB$、阻止域の減衰量を$k'/\varepsilon=-60dB$とすると

$$\varepsilon=0.34931$$

$$k'=3.4931\times10^{-4}$$

$$k=\sqrt{1-k'^2}=0.999825$$

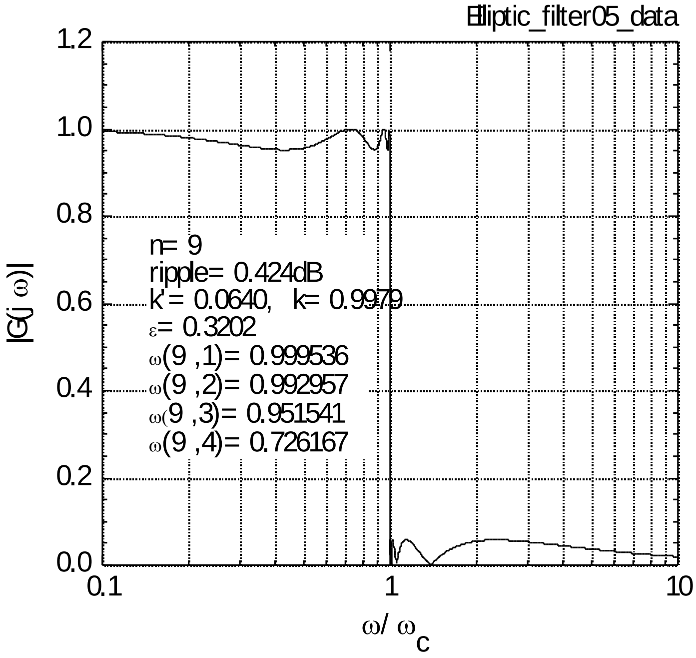


図 9-24　９次連立チェビシェフ・フィルター（楕円フィルター）の周波数特性例（リプル$0.4dB$ $(\varepsilon=0.32)$、$k'=0.064$）

となる。図9-24に９次の連立チェビシェフ・フィルター（９次,$\varepsilon=0.3202$, $k'=0.064$, $k=0.9979$）の例を示す。

	$R_{n,k'}(\omega/\omega_c)$	$\|G(j\omega)\|^2$
$\omega<\omega_c$	n 個の零点を持ち-1~1 の間で振動	$1\sim1/(1+\varepsilon^2)$の間で振動
$\omega>\omega_c$	n 個のポールを持ち絶対値が$1/k'\sim\infty$の間で振動	$0\sim1/\{1+(\varepsilon/k')^2\}$の間で振動

第１０章　z−変換：デジタルフィルター

10-1 z-変換の定義

現在では信号を電圧等のアナログ値のまま処理するよりも、信号を周期的にサンプルして離散的信号に変換した後 A/D コンバーターにてデジタルデータに変換し、デジタルフィルターにて処理することが主流になっている。このような離散的信号の応答はラプラス変換に基づいた伝達関数では記述が困難である。そこで本節では離散的信号の応答を記述するために考えられた z 変換について述べる。

10-1-1 離散的信号

信号 $x(t)$ を周期 T（サンプリング周波数 $f_s = 1/T$）でサンプルした信号 $x^*(t)$ は

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) \tag{10.1.1}$$

と書ける。以下 $x(kT)$ は簡略化のため x_k とも書くことがある。なお、(10.1.1)式のデルタ関数の次元は$[1/t]$であるので、$x^*(t)$ の次元は源信号 $x(t)$ の次元を時間で割った次元になることに注意。
$x^*(t)$ のスペクトル構造を見るため $x^*(t)$ のラプラス変換

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \mathcal{L}[x^*(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-ksT} \end{aligned} \tag{10.1.2}$$

を考える。ここで $x(t)$ のラプラス変換を $X(s)$ として

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{ksT} ds \tag{10.1.3}$$

より $X^*(s)$ は

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s')e^{-(s-s')kT} ds'$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{X(s')}{1-e^{-(s-s')T}} ds' \tag{10.1.4}$$

となる。$|s'| \to \infty$ で $|X(s')| \to 0$ であるので、上の積分は図 10-1 のような閉曲線 Γ に沿った積分

$$X^*(s)=\frac{1}{2\pi j}\oint_\Gamma \frac{X(s')}{1-e^{-(s-s')T}}ds'=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}R_n \quad (10.1.5)$$

に等しい。ここでR_nはΓに囲まれるポール

$$s'=s+j2\pi n/kT \quad (n=-\infty,\cdots,-1,0,1,\cdots,\infty)$$

における留数

$$R_n=\left[X(s')\frac{(s'-s-j2\pi n/T)}{1-e^{-(s-s')T}}\right]_{s'\to s+j2\pi n/T}$$

$$=-\frac{1}{T}X(s+j2\pi n/kT) \quad (10.1.6)$$

である。しがって

$$X^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(s+jn\omega_s) \quad (10.1.7)$$

と書くことができる。ここで

$$\omega_s=2\pi f_s=2\pi/T \quad (10.1.8)$$

はサンプリング（角）周波数である。即ちサンプリング信号の周波数スペクトル$X^*(j\omega)$は、

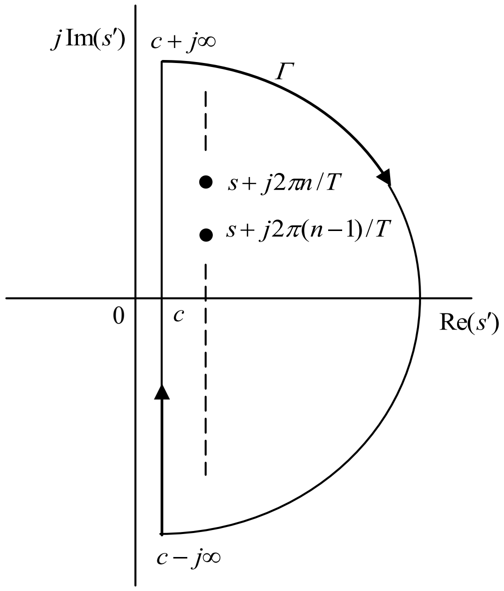


図 10-1　(10.1.5)式の積分路

図 10-2 に示すようなサンプリング周波数ω_sの整数倍の周波数$n\omega_s$を中心として、源信号の周波数スペクトル$X(j\omega)$と同じ分布が周期的に繰り返す形となる。そこで図 10-2(a)のように$\omega_s/2$が源信号$x(t)$のスペクトルの上限周波数ω_{max}より大きければ、$X^*(j\omega)$のスペクトルは隣同士重なり合うことはないので、源信号をカットオフ周波数$\omega_s/2$以下のローパスフィルターを通して$\omega_s/2$以上の周波数成分を除去した後サンプルすることで、源信号$x(t)$を再現できる。

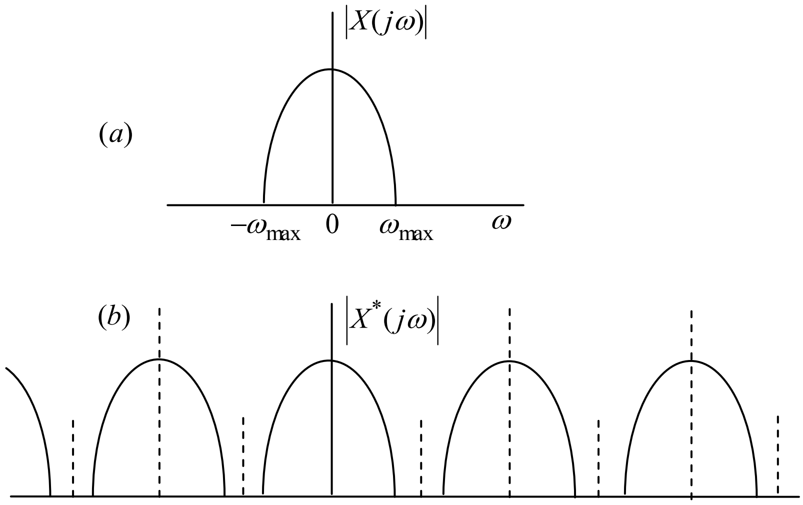


図 10-2　サンプル値$x(kT)$の周波数スペクトル。
(a) 源信号$x(t)$のスペクトル、
(b) サンプル値$x^*(t)$のスペクトル。

一方、サンプリング周波数が低く$\omega_s/2$が$\omega_{\max}$より低い場合には、図 10-3 のように$X(j\omega)$のスペクトルが隣同士重なり合ってしまうので、源信号のスペクトル$X(j\omega)$を再現することはできない。このような重なり合いにより、$\omega_s/2$で折り返して$\omega_s/2$以下の帯域に重なるスペクトルをエイリアスと云う。

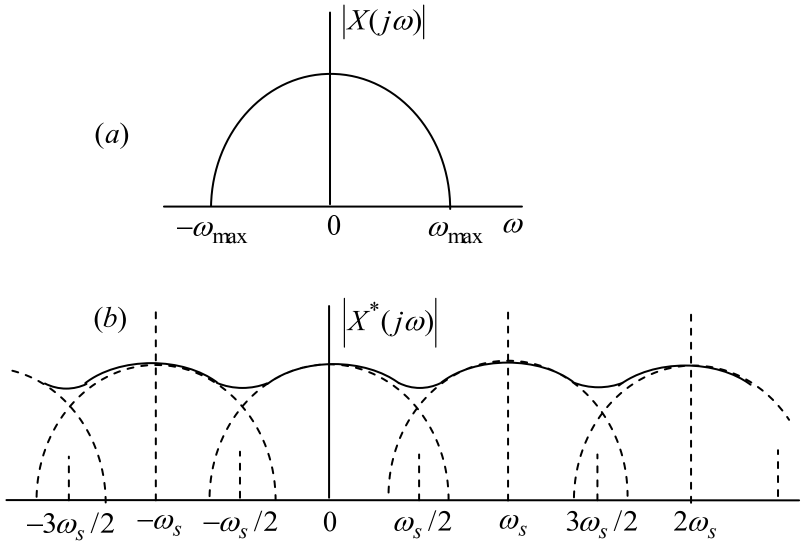


図 10-3　源信号の周波数スペクトルの広がりω_cが$\omega_s/2$より広い場合

したがって元の信号を再現するには図 10-4 に示すように、源信号をローパスフィルター（アンチエリアシング・フィルター）を通して$\omega_s/2$以上の不要な周波数成分を除去した後でサンプリングする必要がある。また、信号に白色雑音のような広い帯域に渡る連続スペクトルを持つ雑音が乗っている場合には、エリアシングにより雑音のスペクトルが幾重にも重なることで雑音が増大するため、S/N を問題にする場合にはアンチエリアシング・フィルターが重要である。

以上のようにサンプリング信号から元の信号を再現するためには、サンプリング周波数はもとの信号スペクトルの上限周波数の 2 倍以上でなければならない。これを「サンプリング定理」という。

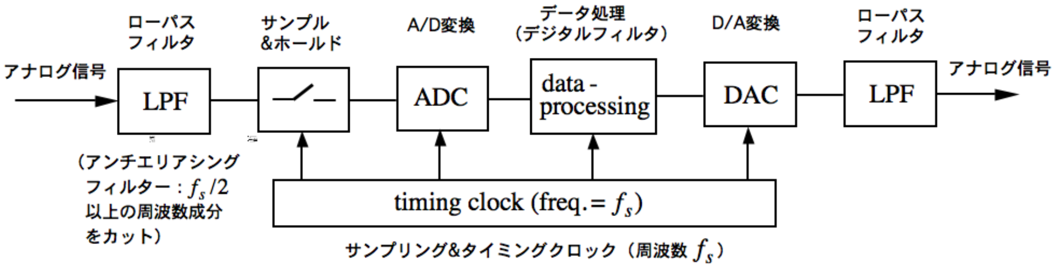


図 10-4　信号のデジタル処理

10-1-2 z 変換

前節で述べた離散的信号の応答を記述するには、連続信号に対するラプラス変換に対応して z 変換が用いられる。$f(t)$を周期Tでサンプルした信号の z 変換$F(z)$は$\mathcal{Z}[f(nT)]$と書かれ

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(nT)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \tag{10.1.9}$$

で定義される。なおラプラス変換と同様に$n<0$では$f(nT)=0$とする。これは(10.1.2)式でe^{sT}をzに置き換えたものである。したがって$z=e^{sT}$とおくことでz変換$F(z)$は$f(t)$のサンプリング値$f^*(t)$のラプラス変換$F^*(s)$となる。したがって$z \to e^{j\omega T}$と置き換えた$F(e^{j\omega T})$が$F(z)$の周波数特性を表わす。

z変換$F(z)$が存在する場合には逆変換

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz \tag{10.1.10}$$

が存在する。ここで積分路Cは被積分関数の全てのポールを囲む閉曲線とする。

[証明]　(10.1.9)式を(10.1.10)式の右辺に代入して

$$\oint_C F(z) z^{n-1} dz = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \oint_C z^{n-k-1} dz$$

ここでコーシーの積分定理より

$$\oint_C z^n dz = \begin{cases} 2\pi j & (n=-1) \\ 0 & (n \neq -1) \end{cases}$$

したがって

$$\frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \oint_C z^{n-k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \begin{Bmatrix} 2\pi j & (k=n) \\ 0 & (k \neq n) \end{Bmatrix}$$
$$= f(nT)$$

となり、式(10.1.10)が成立する。

定義(10.1.9)式より以下のz変換の基本的な性質が導かれる。

(a) 時間遅れ

$$\mathcal{Z}[f((n-k)T)] = F(z) z^{-k} \tag{10.1.11}$$

即ちz^{-1}はサンプリング時間間隔Tだけの時間遅れを表わす。

[証明]

$$\mathcal{Z}[f((n-k)T)] = \sum_{n=0}^{\infty} f((n-k)T) z^{-n}$$
$$= z^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} f((n-k)T) z^{-(n-k)} \qquad (\because f((n-k)T) = 0 \quad for\ n<k)$$
$$= z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} = z^{-k} F(z)$$

(b) 畳み込み

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} f_1(kT) f_2((n-k)T) z^{-n} = F_1(z) F_2(z) \tag{10.1.12}$$

[証明]　$n<k$では$f_2((n-k)T)=0$であることから

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} f_1(kT)f_2((n-k)T)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT)f_2((n-k)T)z^{-n}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT)\sum_{n=0}^{\infty} f_2((n-k)T)z^{-n}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT)z^{-k}F_2(z)$$
$$= F_1(z)F_2(z)$$

10-2 デジタルフィルター

基本的なデジタルフィルターには以下に述べる FIR フィルター（finite impulse response filter）と IIR フィルター（infinite impulse response filter）がある。

10-2-1 FIR フィルター

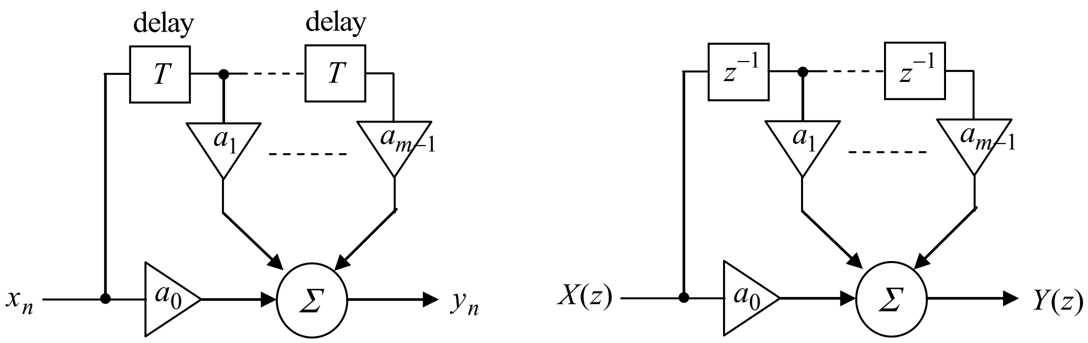
非再帰フィルターとも呼ばれ図 10-5 (a) に示すように、入力x_nをk サンプルステップ$(k=0,1,2,\cdots,m-1)$遅延した信号x_{n-k}に重みa_kをかけて和をとり

$$y_n = a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \cdots + a_{m-1}x_{n-m+1} \tag{10.2.1}$$

これを出力y_nとするものである。mを「タップ数」という。(10.1.11)式より z 変換では 1 サンプルステップTのディレーはz^{-1}で表わされ、(a)図は(b)図のように表わされる。$t=nT$にインパルスx_nを入力すると、$n, n+1, \cdots, n+m-1$にm個のインパルス即ち有限個のインパルス列

$$y_n = a_0x_n,\quad y_{n+1} = a_1x_n,\quad \cdots\cdots,\quad y_{n+m-1} = a_{m-1}x_n \tag{10.2.2}$$

が出力される。



(a) 時間領域での表記　　(b) z 変換での表記

図 10-5　FIR フィルター

簡単のために

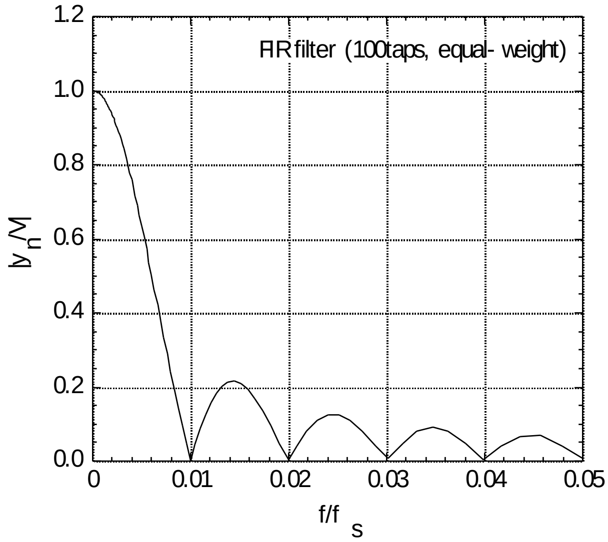
$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 1/m \tag{10.2.3}$$

の場合を考えると、これはm個の入力データの移動平均を表す。$e^{j\omega t}$で振動する信号をサンプルした信号を入力とすると

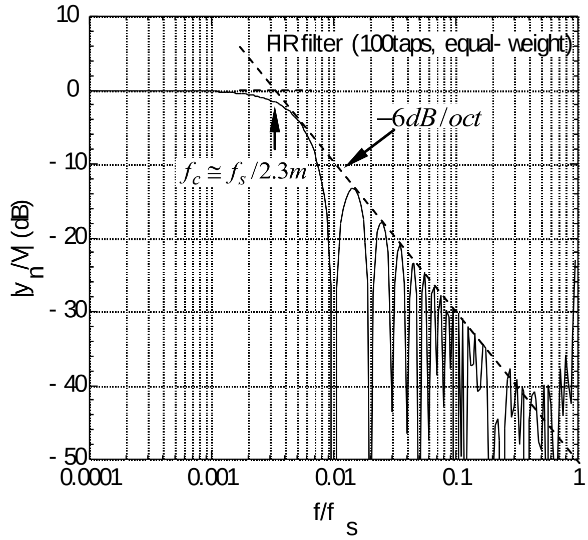
$$x_n = Ve^{jn\omega T} \tag{10.2.4}$$

より

$$y_n = \frac{V}{m}\sum_{k=0}^{m-1} e^{j\omega(n-k)T} = \frac{V}{m} e^{j\{n-(m-1)/2\}\omega T} \frac{\sin(m\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \tag{10.2.5}$$



(a)線形目盛



(b)対数目盛

図 10-6　移動平均 y_n $(m = 100)$の周波数特性：

したがってy_nの周波数特性は

$$\left|\frac{y_n}{x_n}\right| = \left|\frac{\sin(m\omega T/2)}{m \cdot \sin(\omega T/2)}\right| \tag{10.2.6}$$

となる。図 10-6 に$m = 100$の場合の移動平均の周波数特性を示す。減衰領域を図のように-6 dB/octの減衰カーブでフィットすると、-3 dBカットオフ周波数$f_c \cong f_s/2.3m$の 1 次 LPF と似た特性であると推測される。

また、以上よりサンプルデータの周波数帯域及び周波数分解能を知ることができる。時間間隔Tでサンプリングしたn点のデータセットの意味のある周波数帯域は$f_s/2$であり-3 dB周波数分解能は$f_s/2.3n$である。

10-2-2 IIR フィルター

再帰フィルターとも呼ばれ図 10-7(a)に示すように、出力 $y_{n-1}, y_{n-2}, \cdots, y_{n-m}$ にそれぞれ重み $b_1, b_2, \cdots, b_m$ をかけて入力 x_n との和をとるものである。即ち

$$y_n = x_n + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + \cdots + b_m y_{n-m} \tag{10.2.7}$$

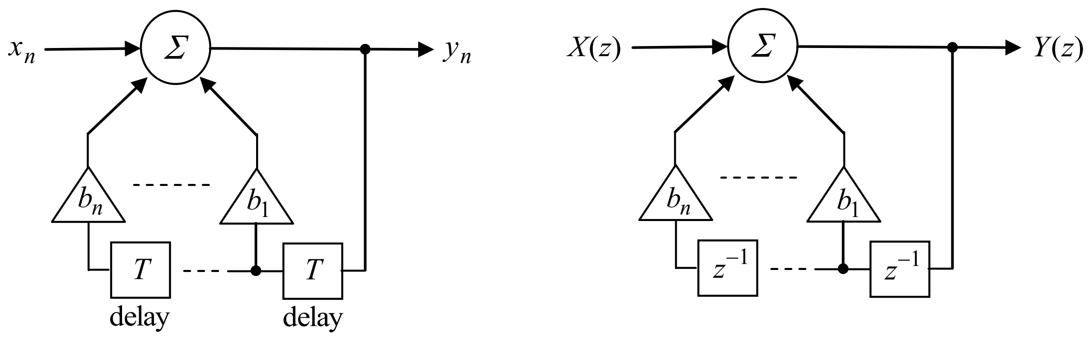
FIR フィルターの場合と同じく m をタップ数という。z 変換では(b)図のダイアグラムで表現され

$$Y(z) = X(z) + (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_m z^{-m}) Y(z) \tag{10.2.8}$$

したがって

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \cdots - b_m z^{-m}} \tag{10.2.9}$$

となる。



(a) 時間領域での表記　　(b) z 変換による表記

図 10-7　IIR フィルター

問題を簡単化するため、$b_1 \neq 0$、$b_k = 0\,(k \geq 2)$ の 1 タップ IIR フィルターを考える。$t = nT$ にインパルス x_n

$$x_n \neq 0, \quad x_k = 0\,(k \neq n) \tag{10.2.10}$$

を入力すると

$$\left.\begin{aligned} b_1^k y_n &= b_1^k x_n + b_1^{k+1} y_{n-1} \\ b_1^{k-1} y_{n+1} &= b_1^{k-1} x_{n+1} + b_1^k y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n+k} &= x_{n+k} + b_1 y_{n+k-1} \end{aligned}\right\} \tag{10.2.11}$$

より、k サンプルステップ後の出力は

$$\begin{aligned} y_{n+k} &= x_{n+k} + b_1 x_{n+k-1} + \cdots + b_1^{k-1} x_{n+1} + b_1^k x_n + b_1^{k+1} y_{n-1} \\ &= b_1^k x_n \end{aligned} \tag{10.2.12}$$

となり、無限に出力が続くことになる。また(10.2.9)式より

$$Y(z)=\frac{1}{1-b_1z^{-1}}X(z) \tag{10.2.13}$$

また(10.2.10)式より

$$X(z)=z^{-n}x_n \tag{10.2.14}$$

であるから

$$\begin{aligned} y_{n+k} &= \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{z^{n+k}}{z-b_1}X(z)dz \\ &= b_1^{n+k}X(b_1) \\ &= b_1^k x_n \end{aligned} \tag{10.2.15}$$

となり、(10.2.12)と同じ結果になる。

離散的信号に対して、図 10-8 に示すように FIR フィルターと IIR フィルターを組み合わせたフィルタリング処理をすることで、任意のフィルター特性を実現することができる。

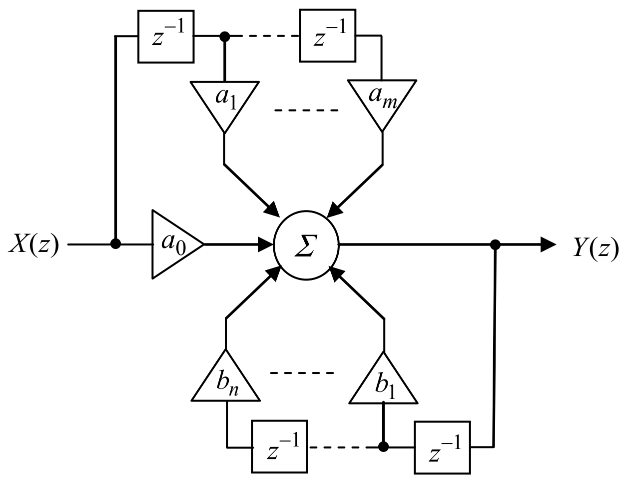


図 10-8　デジタルフィルターのブロック図

図 10-8 の伝達関数$H(z)$は

$$Y(z)=a_0X(z)+a_1z^{-1}X(z)+\cdots+a_mz^{-m}X(z)+b_1z^{-1}Y(z)+b_2z^{-2}Y(z)+\cdots+b_nz^{-n}Y(z)$$

より

$$\left.\begin{aligned} Y(z) &= H(z)X(z) \\ H(z) &= \frac{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_mz^{-m}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}-\cdots-b_nz^{-n}} \end{aligned}\right\} \tag{10.2.16}$$

となる。これより任意のz^{-1}の有理関数で表されるフィルターを実現できる。このようなフィルターの周波数特性を求めるには、(10.1.9)式の説明で述べたように

$$z=e^{j\omega T} \tag{10.2.17}$$

と置けばよい。

10-3　s-z 変換とデジタルフィルター

10-3-1 インパルス応答不変法

本節では、ラプラス変換で定義される伝達関数$G(s)$からz変換で定義される伝達関数$H(z)$を求める方法として基本的な「インパルス応答不変法」について述べ、次節で「双 1 次変換法」につ

いて述べる。

入力$x(t)$、出力$y(t)$のラプラス変換$X(s)$、$Y(s)$として、$X(s)$に対する$Y(s)$の応答

$$Y(s)=G(s)X(s) \tag{10.3.1}$$

を表す伝達関数$G(s)$の逆変換を

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)] \tag{10.3.2}$$

とすると、$t=nT$における$y(t)$は

$$y(nT)=\int_0^{nT} g(t')x(nT-t')dt' \tag{10.3.3}$$

で与えられる。積分を和で近似すると

$$y(nT)=T\sum_{k=0}^{n-1} g(kT)x((n-k)T) \tag{10.3.4}$$

と書けるので、$y(nT)$をz変換すると

$$\begin{aligned} Y(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} Tg(kT)x((n-k)T)z^{-n} \\ &=\sum_{k=0}^{\infty} Tg(kT)z^{-k}\sum_{n=0}^{\infty} x((n-k)T)z^{-(n-k)} \\ &\qquad (\because x((n-k)T)=0 \text{ for } n-k<0) \end{aligned} \tag{10.3.5}$$

となり

$$Y(z)=H(z)X(z) \tag{10.3.6}$$

と書くことができる。$X(z)$は$x(t)$のz変換$X(z)=\mathcal{Z}[x(nT)]$であり

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty} Tg(nT)z^{-n}\equiv\mathcal{Z}[Tg(nT)] \tag{10.3.7}$$

をz変換における伝達関数と定義することができる。$y(t)=g(t)$はインパルス入力に対する応答を表わしていることからインパルス応答の再現性が良く、このような$H(z)$の決定法を「インパルス応答不変法」と呼ぶ。以下に１次 LPF 及び HPF、２次 LPF 及び HPF について例を示す。

(a) １次ローパスフィルター（LPF）

伝達関数は

$$\left.\begin{aligned} G(s)&=\frac{\omega_c}{s+\omega_c} \\ g(t)&=\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right]=\omega_c e^{-\omega_c t} \end{aligned}\right\} \tag{10.3.8}$$

で与えられ、信号$x(t)$を１次 LPF に通した後の信号$y(t)$は

$$y(t) = \int_0^t g(t')x(t-t')dt'$$
$$= \omega_c \int_0^t e^{-\omega_c t'} x(t-t')dt' \qquad (10.3.9)$$

となる。ここで$\omega_c T << 1$として(10.3.9)式の積分を級数和で近似すると

$$y(nT) = \omega_c T \sum_{k=0}^{n} e^{-\omega_c kT} x((n-k)T) \qquad (10.3.10)$$

と書けるので、これを z 変換して

$$Y(z) = \omega_c T \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-\omega_c kT} x((n-k)T) z^{-n}$$
$$= H(z)X(z) \qquad (10.3.11)$$

となる。ここで

$$\left.\begin{aligned} H(z) &= \mathcal{Z}[\omega_c T e^{-\omega_c nT}] = \omega_c T \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\omega_c nT} z^{-n} \\ &= \omega_c T \frac{z}{z - e^{-\omega_c T}} \quad (|z| > e^{-\omega_c T}) \\ X(z) &= \mathcal{Z}[x(nT)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n} \end{aligned}\right\} \qquad (10.3.12)$$

である。この$H(z)$は(10.2.16)式において

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \omega_c T, \quad a_k = 0 \ (k = 1, 2, \cdots) \\ b_1 &= e^{-\omega_c T}, \quad b_k = 0 \ (k = 2, 3, \cdots) \end{aligned}\right\} \qquad (10.3.13)$$

とおいたもので与えられることから IIR フィルターで実現できることが分かり、$H(z)$のダイアグラムは図 10-9 のように描ける。ここで(10.3.11) 式の逆変換を求めてみると

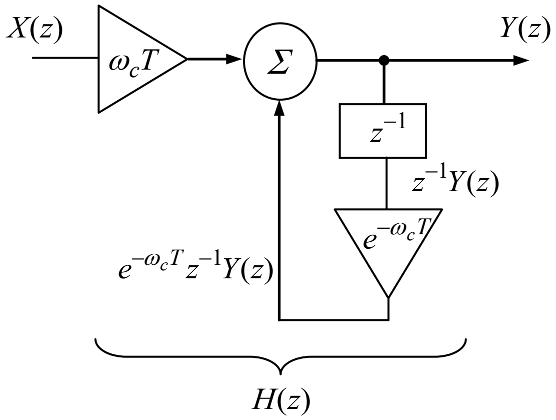


図 10-9　1 次 LPF と等価な$H(z)$ ((10.3.12)式）を表すダイアグラム

$$y(nT) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)X(z)]$$
$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_C H(z)X(z)z^{n-1}dz = \frac{\omega_c T}{2\pi j} \oint_C \frac{z^n}{z - e^{-\omega_c T}} X(z)dz$$
$$= \frac{\omega_c T}{2\pi j} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \oint_C \frac{z^{n-k}}{z - e^{-\omega_c T}} dz = \omega_c T \sum_{k=0}^{n} x(kT) e^{-(n-k)\omega_c T}$$
$$= \omega_c T \sum_{k=0}^{n} x((n-k)T) e^{-k\omega_c T}$$

となり、(10.3.10)式と同じ結果を得ることが分かる（注参照）。

周波数特性：

伝達関数 $H(z)$ の周波数特性は z 変換の定義で述べたように、$z=e^{j\omega T}$ とおいて

$$H(e^{j\omega T})=\frac{\omega_c T}{1-e^{-\omega_c T}e^{-j\omega T}} \tag{10.3.14}$$

で与えられる。$\omega T<<1$ 及び $\omega_c T<<1$ では

$$H(e^{j\omega T})=\frac{1}{1+j\omega/\omega_c} \tag{10.3.15}$$

と近似でき、これはラプラス変換から求めた周波数特性関数 $G(j\omega)$ に等しい。

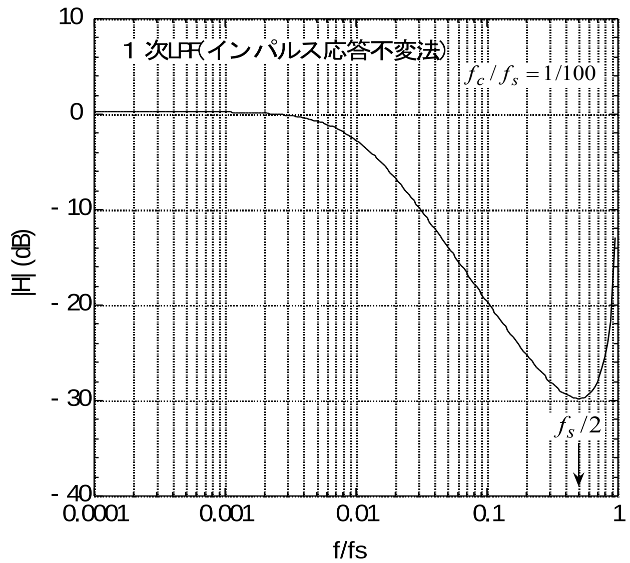


図 10-10　1 次 LPF の周波数特性

（インパルス応答不変法）

$\left|H(e^{j\omega T})\right|$ は図 10-10 のようになり、$f_s/2\ \ (f_s=\omega_s/2\pi)$ 以下の周波数領域では $G(j\omega)$ に一致することが分かる。

注：複素積分 $\oint_C \frac{z^{n-k}}{z-e^{-\omega_c T}}dz$ について

$n-k\geq 0$ のとき

$$\oint_C \frac{z^{n-k}}{z-e^{-\omega_c T}}dz=2\pi j[z^{n-k}]_{z=e^{-\omega_c T}}=2\pi je^{-(n-k)\omega_c T}$$

$n-k<0$ のとき

$$\oint_C \frac{z^{n-k}}{z-e^{-\omega_c T}}dz=\oint_C \frac{1}{z^{k-n}(z-e^{-\omega_c T})}dz$$

$$=2\pi j[\frac{1}{z^{k-n}}]_{z=e^{-\omega_c T}}+\frac{2\pi j}{(k-n-1)!}[\frac{d^{k-n-1}}{dz^{k-n-1}}(\frac{1}{z-e^{-\omega_c T}})]_{z=0}$$

$$=2\pi je^{-(n-k)\omega_c T}+\frac{2\pi j(-1)^{k-n-1}(k-n-1)!}{(k-n-1)!}[\frac{1}{(z-e^{-\omega_c T})^{k-n}}]_{z=0}$$

$$=2\pi je^{-(n-k)\omega_c T}+\frac{2\pi j(-1)^{k-n-1}}{(-1)^{k-n}}\cdot\frac{1}{e^{-(k-n)\omega_c T}}=0$$

(b) １次ハイパスフィルター（HPF）

伝達関数

$$G(s)=\frac{s}{s+\omega_c} \tag{10.3.16}$$

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)]=\delta(t)-\omega_c e^{-\omega_c t} \tag{10.3.17}$$

より

$$\begin{aligned} y(nT)&=\int_0^{nT}\{\delta(t')-\omega_c e^{-\omega_c t'}\}x(nT-t')dt' \\ &=x(nT)-\sum_{k=0}^{n}T\omega_c e^{-\omega_c kT}x((n-k)T) \end{aligned} \tag{10.3.18}$$

したがって $Y(z)=\mathcal{Z}[y(nT)]$ は

$$\begin{aligned} Y(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT)z^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}T\omega_c e^{-\omega_c kT}x((n-k)T)z^{-n} \\ &=H(z)X(z) \end{aligned} \tag{10.3.19}$$

となる。ここで伝達関数 $H(z)$ は

$$\begin{aligned} H(z)&=1-\omega_c T\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n\omega_c T}z^{-n} \\ &=1-\frac{\omega_c T}{1-e^{-\omega_c T}z^{-1}} \\ &=\frac{1-\omega_c T-e^{-\omega_c T}z^{-1}}{1-e^{-\omega_c T}z^{-1}} \end{aligned} \tag{10.3.20}$$

で与えられる。

周波数特性は $z=e^{j\omega T}$ とおいて

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T})&=1-\frac{\omega_c T}{1-e^{-\omega_c T}e^{-j\omega T}} \\ &=\frac{1-\omega_c T-e^{-\omega_c T}e^{-j\omega T}}{1-e^{-\omega_c T}e^{-j\omega T}} \end{aligned} \tag{10.3.21}$$

となる（図 10-11）。低域の減衰特性は１次アナログ HPF より悪い。

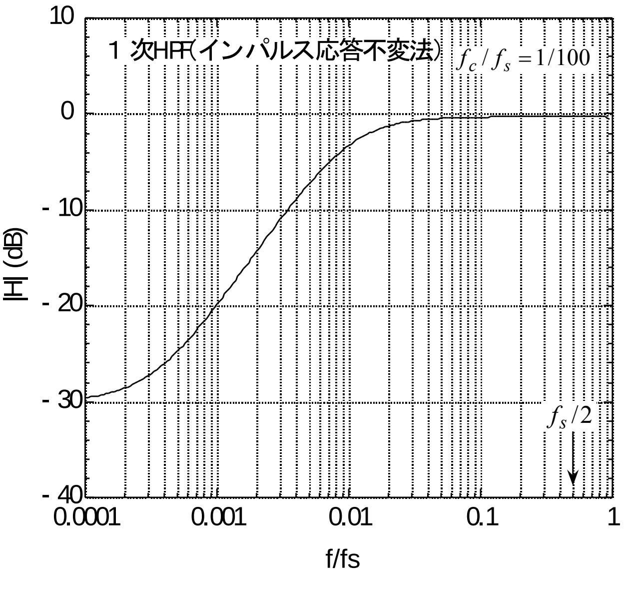


図 10-11　１次 HPF の周波数特性 (インパルス応答不変法)

(c) ２次ローパスフィルター(LPF)

２次 LPF の伝達関数は

$$G(s)=\frac{\omega_c^2}{s^2+2\zeta\omega_c s+\omega_c^2} \tag{10.3.22}$$

で与えられる。$G(s)$は特性方程式の根

$$\left.\begin{array}{ll} p_{1,2}=-\zeta\omega_c\pm\omega_c\sqrt{\zeta^2-1} & (\zeta\neq 1) \\ p_1=p_2=-\zeta\omega_c & (\zeta=1) \end{array}\right\} \tag{10.3.23}$$

を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned} G(s)&=\frac{\omega_c^2}{(s-p_1)(s-p_2)} \\ &=\begin{cases} \dfrac{\omega_c^2}{p_1-p_2}\left(\dfrac{1}{s-p_1}-\dfrac{1}{s-p_2}\right) & (\zeta\neq 1) \\ \dfrac{\omega_c^2}{(s+\omega_c)^2} & (\zeta=1) \end{cases} \end{aligned} \tag{10.3.24}$$

これより$G(s)$の逆変換は

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[G(s)\right]=\begin{cases} \dfrac{\omega_c^2}{p_1-p_2}(e^{p_1 t}-e^{p_2 t}) & (\zeta\neq 1) \\ \omega_0^2 t e^{-\omega_0 t} & (\zeta=1) \end{cases} \tag{10.3.25}$$

となり、$H(z)$は次のように求まる。

$$\begin{aligned} H(z)=T\sum_{n=0}^{\infty}g(nT)z^{-n}&=\begin{cases} \dfrac{\omega_c T/2}{\sqrt{\zeta^2-1}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\{(e^{p_1T}z^{-1})^n-(e^{p_2T}z^{-1})^n\} & (\zeta\neq 1) \\ \omega_c^2T^2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n(e^{-\omega_cT}z^{-1})^n & (\zeta=1) \end{cases} \\ &=\frac{a_1z^{-1}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}} \end{aligned} \tag{10.3.26}$$

ここで

$$\left.\begin{array}{l} a_1=\omega_c^2T^2e^{-\omega_cT} \\ b_1=2e^{-\omega_cT} \\ b_2=e^{-2\omega_cT} \end{array}\right\}(\text{for } \zeta=1),\qquad \left.\begin{array}{l} a_1=\dfrac{\omega_cT/2}{\sqrt{\zeta^2-1}}(e^{p_1T}-e^{p_2T}) \\ b_1=e^{p_1T}+e^{p_2T} \\ b_2=e^{(p_1+p_2)T} \end{array}\right\}(\text{for } \zeta\neq 1) \tag{10.3.27}$$

である。ダイアグラムで表わすと図 10-12 のようになる。

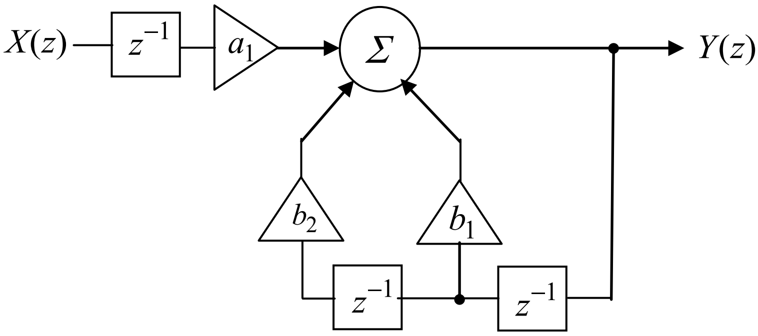


図 10-12　２次 LPF と等価な $H(z)$ を表すダイアグラム

ここで入力 $X(z)$ のラインに入っている遅延要素 z^{-1} は全体の応答を 1 サンプリングステップ T だけ遅らせるだけであるので $\omega_c T << 1$ であれば無視できる。そこで伝達関数 $H(z)$ は

$$H(z) = \frac{a_0}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} \tag{10.3.28}$$

であるものとする。ここで

$$\left.\begin{array}{ll} \zeta < 1 & \left\{\begin{array}{l} a_0 = \dfrac{\omega_c T e^{-\zeta\omega_c T}}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin(\omega_c T\sqrt{1-\zeta^2}) \\ b_1 = 2e^{-\zeta\omega_c T}\cos(\omega_c T\sqrt{1-\zeta^2}), \quad b_2 = -e^{-2\zeta\omega_c T} \end{array}\right. \\ \zeta = 1 & \left\{\begin{array}{l} a_0 = (\omega_c T)^2 e^{\omega_c T} \\ b_1 = 2e^{\omega_c T}, \quad b_2 = -e^{2\omega_c T} \end{array}\right. \\ \zeta > 1 & \left\{\begin{array}{l} a_0 = \dfrac{\omega_c T e^{-\zeta\omega_c T}}{\sqrt{\zeta^2-1}} sinh(\omega_c T\sqrt{\zeta^2-1}) \\ b_1 = 2e^{-\zeta\omega_c T}\cosh(\omega_c T\sqrt{\zeta^2-1}), \quad b_2 = -e^{-2\zeta\omega_c T} \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{10.3.29}$$

であり、ダイアグラムは図 10-13 のようになる。

確認のため $Y(z) = G(z)X(z)$ の逆変換を求めると

$$\begin{aligned} y_{1,2}(nT) &= \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{z}{z - e^{p_{1,2}T}} X(z) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi j}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \oint_C \frac{z^{n-k}}{z - e^{p_{1,2}T}} dz \\ &= \sum_{k=0}^{n} x(kT) e^{j(n-k)p_{1,2}T} \end{aligned} \tag{10.3.30}$$

より

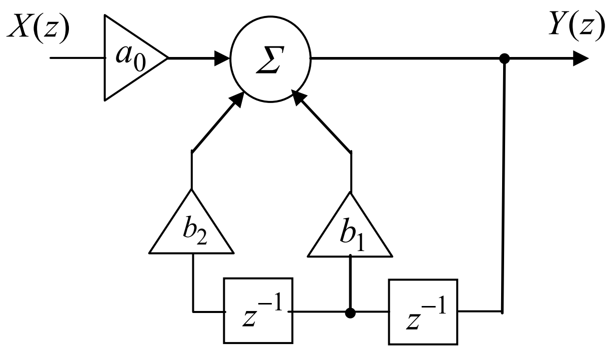


図 10-13　２次 LPF と等価な $H(z)$ を表わすダイアグラム

$$y(nT)=\frac{\omega_c T}{2j\sqrt{1-\zeta^2}}\{y_1(nT)-y_2(nT)\}$$

$$=\frac{\omega_c T}{2\sqrt{1-\zeta^2}}\sum_{k=0}^{n}x((n-k)T)(e^{jkp_1T}-e^{jkp_2T}) \tag{10.3.31}$$

となる。一方$\omega_c T<<1$として、ラプラス逆変換（(10.3.25)式）より

$$y(nT)=\int_0^{nT}g(t')x(t-t')dt'$$

$$=\frac{\omega_c^2}{p_1-p_2}\int_0^{nT}(e^{p_1t'}-e^{p_2t'})x(nT-t')dt'$$

$$=\frac{\omega_c T}{2\sqrt{1-\zeta^2}}\sum_{k=0}^{n}(e^{p_1kT}-e^{p_2kT})x((n-k)T) \qquad (for\ \omega_c T<<1) \tag{10.3.32}$$

となり、(10.3.31)式と一致することが分かる。

$H(z)$の周波数特性は$z=e^{j\omega T}$とおいて$H(e^{j\omega T})$で与えられ、図 10-14 に

$$\begin{cases}\omega_c/\omega_s=0.1\,(=\omega_c T/2\pi)\\ \zeta=1\end{cases}$$

の場合の$\left|H(e^{j\omega T})\right|$を示す。1 次 LPF の場合と同様$f_s/2$以下の領域で$G(j\omega)$に一致する。

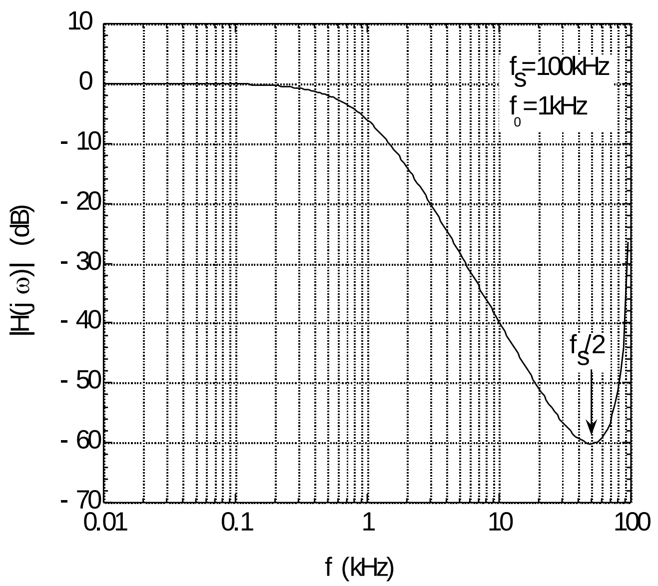


図 10-14　２次 LPF $(\zeta=1)$の周波数特性

（インパルス応答不変法）

(d) ２次ハイパスフィルター（**HPF**）

伝達関数

$$G(s)=\frac{s^2}{s^2+2\zeta\omega_c s+\omega_c^2} \tag{10.3.33}$$

において、$\zeta=1$の場合について考えよう。$\zeta=1$ では $G(s)$ の逆変換

$$g(t)=\mathcal{L}^{-1}[\frac{s^2}{(s+\omega_c)^2}]=\delta(t)-2\omega_c e^{-\omega_c t}+\omega_c^2 te^{-\omega_c t} \qquad (10.3.34)$$

より

$$\begin{aligned}H(z)&=1-\sum_{n=0}^{\infty}T(2\omega_c e^{-n\omega_c T}-n\omega_c^2 Te^{-n\omega_c T})z^{-n}\\&=1-\frac{2\omega_c T}{1-e^{-\omega_c T}z^{-1}}+\frac{\omega_c^2 T^2 e^{-\omega_c T}z^{-1}}{(1-e^{-\omega_c T}z^{-1})^2}\\&=\frac{a_0+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}{1-b_1 z^{-1}-b_2 z^{-2}}\end{aligned} \qquad (10.3.35)$$

となる。ここで

$$\begin{cases}a_0=1-2\omega_c T\\a_1=-(2-2\omega_c T-\omega_c^2 T^2)e^{-\omega_c T}\\a_2=e^{-2\omega_c T}\\b_1=2e^{-\omega_c T}\\b_2=-e^{-2\omega_c T}\end{cases} \qquad (10.3.36)$$

である。周波数特性は

$$H(e^{j\omega T})=\frac{a_0+a_1 e^{-j\omega T}+a_2 e^{-2j\omega T}}{1-b_1 e^{-j\omega T}-b_2 e^{-2j\omega T}} \qquad (10.3.37)$$

で与えられるが、図 10-15 に示すように低周波領域の減衰特性が不十分である。

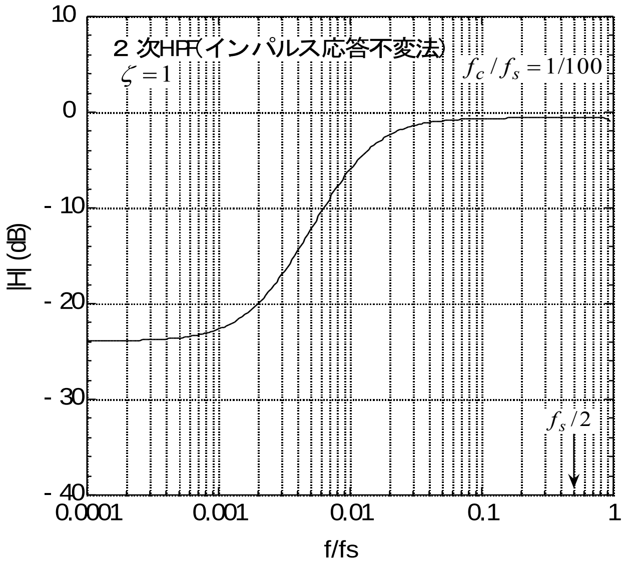


図 10-15　２次 HPF $(\zeta=1)$ の周波数特性（インパルス応答不変法）

10-3-2 双１次変換法

インパルス応答不変法では LPF では図 10-14 に見るように高い周波数領域で周波数特性が $f_s/2$ より低い周波数から上昇し誤差が大きくなる。また HPF では図 10-15 に示すように減衰特性が不十分である。そこで本節ではもう一つの $s-z$ 変換法である双 1 次変換法を考察することにする。

$x(t)$ の積分を $y(t)$ とすると

$$y(nT)=\int_{(n-1)T}^{nT}x(t)dt+y((n-1)T) \qquad (10.3.38)$$

であるから、積分を台形公式で近似して

$$y(nT)=\frac{T}{2}\{x(nT)+x((n-1)T)\}+y((n-1)T) \tag{10.3.39}$$

即ち

$$y(nT)-y((n-1)T)=\frac{T}{2}\{x(nT)+x((n-1)T)\} \tag{10.3.40}$$

となる。これをz変換して

$$(1-z^{-1})Y(z)=\frac{T}{2}(1+z^{-1})X(z) \tag{10.3.41}$$

即ち

$$Y(z)=\frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}X(z) \tag{10.3.42}$$

を得る。一方、$y(t)$は$x(t)$の積分であるからラプラス変換では

$$Y(s)=\frac{1}{s}X(s) \tag{10.3.43}$$

であることから$1/s\rightarrow(T/2)(1+z^{-1})/(1-z^{-1})$なる対応関係が成立し、$s$と$z$の対応は

$$s\rightarrow\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{10.3.44}$$

となる。即ち$G(s)$に対応する伝達関数$H(z)$は

$$H(z)=G(\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}) \tag{10.3.45}$$

で与えられる。以上の$s-z$変換を「双１次変換」という。

以下、例として双１次変換法により１次 LPF、１次 HPF、２次 LPF 及び２次 HPF の伝達関数を求める。

(a) １次 LPF

伝達関数は

$$G(s)=\frac{\omega_c}{s+\omega_c} \tag{10.3.46}$$

で与えられる。ここで (10.3.45)式の変換を適用すると$G(s)$のz変換は

$$H(z)=\frac{\omega_c}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+\omega_c}=\frac{\omega_c T/2}{1+\omega_c T/2}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-pz^{-1}} \tag{10.3.47}$$

となる。ここで

$$p = \frac{1 - \omega_c T/2}{1 + \omega_c T/2} \qquad (10.3.48)$$

である。したがって$H(z)$の周波数特性は

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{\omega_c T/2}{1 + \omega_c T/2} \cdot \frac{1 + e^{-j\omega T}}{1 - pe^{-j\omega T}}$$

(10.3.49)

で与えられ、図 10-16 のようになる。

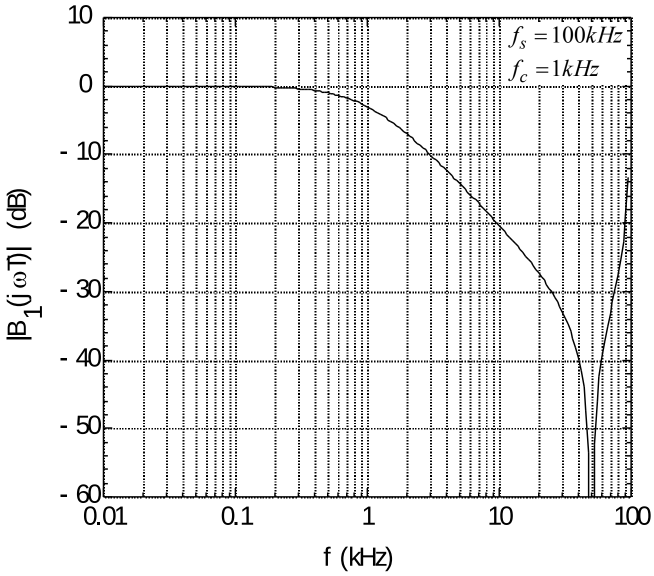


図 10-16　1 次 LPF（双 1 次変換）

(b) 1 次 HPF

伝達関数

$$G(s) = \frac{s}{s + \omega_c} \qquad (10.3.50)$$

に双 1 次変換を施すことでz変換による伝達関数

$$H(z) = \frac{1+p}{2} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 - pz^{-1}}$$

(10.3.51)

を得る。ここでpは(10.3.48)式で与えられる。また$H(z)$の周波数特性は$z = e^{j\omega T}$と置いて

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{1+p}{2} \cdot \frac{1 - e^{-j\omega T}}{1 - pe^{-j\omega T}}$$

(10.3.52)

となる。図 10-17 に$\omega_c T = 2\pi f_c / f_s = 2\pi/100$の場合についての$\left|H(e^{j\omega T})\right|$を示す。インパルス応答不変法（図 10-14）に比べて低周波数領域の減衰特性が素直であることが分かる。

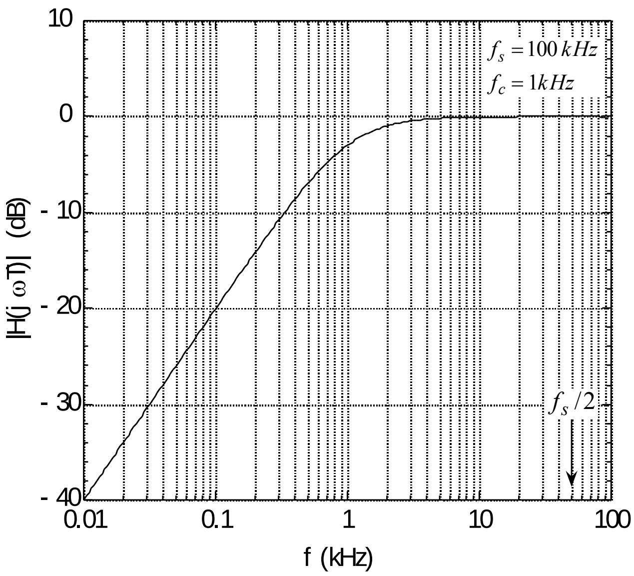


図 10-17　1 次 HPF の周波数特性

（双 1 次変換）

(c) ２次 LPF

伝達関数

$$G(s)=\frac{\omega_c^2}{s^2+2\zeta\omega_c s+\omega_c^2} \tag{10.3.53}$$

に双１次変換を施して

$$\begin{aligned}H(z)&=\frac{(\omega_c T/2)^2(1+2z^{-1}+z^{-2})}{1-2z^{-1}+z^{-2}+\zeta\omega_c T(1-z^{-2})+(\omega_c T/2)^2(1+2z^{-1}+z^{-2})}\\&=a_0\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}}\end{aligned} \tag{10.3.54}$$

を得る。ここで

$$\left.\begin{aligned}a_0&=\frac{(\omega_c T/2)^2}{1+\zeta\omega_c T+(\omega_c T/2)^2}\\b_1&=\frac{2\{1-(\omega_c T/2)^2\}}{1+\zeta\omega_c T+(\omega_c T/2)^2}\\b_2&=-\frac{1-\zeta\omega_c T+(\omega_c T/2)^2}{1+\zeta\omega_c T+(\omega_c T/2)^2}\end{aligned}\right\} \tag{10.3.55}$$

であり、周波数特性は

$$H(e^{j\omega T})=a_0\frac{1+2e^{-j\omega T}+e^{-2j\omega T}}{1-b_1e^{-j\omega T}-b_2e^{-2j\omega T}} \tag{10.3.56}$$

となる。図 10-18 に $\zeta=1$、$\omega_c T=2\pi f_c/f_s=2\pi/100$ の場合の $\left|H(e^{j\omega T})\right|$ を示す。

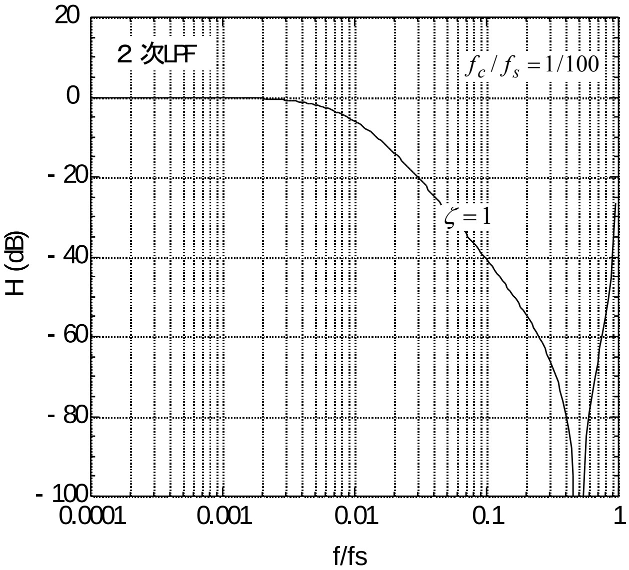


図 10-18　２次 LPF の周波数特性

（双１次変換）

(d) ２次 HPF

伝達関数

$$G(s)=\frac{s^2}{s^2+2\zeta\omega_c s+\omega_c^2} \tag{10.3.57}$$

に双１次変換を施して

$$H(z)=\frac{(1-z^{-1})^2}{1-2z^{-1}+z^{-2}+\zeta\omega_c T(1-z^{-2})+(\omega_c T/2)^2(1+2z^{-1}+z^{-2})}$$
$$=a_0\frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}} \tag{10.3.58}$$

を得る。ここで

$$\left.\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{1+\zeta\omega_c T+(\omega_c T/2)^2}\\ b_1&=2\{1-(\omega_c T/2)^2\}a_0, \qquad b_2=-\{1-\zeta\omega_c T+(\omega_c T/2)^2\}a_0 \end{aligned}\right\} \tag{10.3.59}$$

である。周波数特性は

$$H(e^{j\omega T})=a_0\frac{1-2e^{-j\omega T}+e^{-2j\omega T}}{1-b_1e^{-j\omega T}-b_2e^{-2j\omega T}} \tag{10.3.60}$$

で与えられる。$\zeta=1$の場合について$|H(e^{j\omega T})|$を図 10-19 に示す。図 10-15 に示したインパルス応答不変法で求めた$H(e^{j\omega T})$と比較すると、減衰特性が素直であることが分かる。

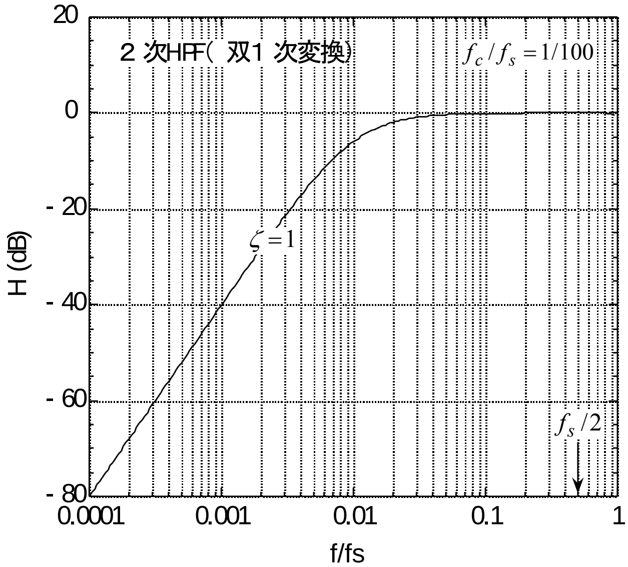


図 10-19　２次 HPF（双１次変換）

(e)　２次 BPF

伝達関数

$$G(s)=\frac{2\zeta\omega_c s}{s^2+2\zeta\omega_c s+\omega_c^2} \tag{10.3.61}$$

に対して双１次変換

$$s\to\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

を施して

$$H(z)=\frac{a_0+a_2z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}} \tag{10.3.62}$$

を得る。ここで

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= -a_2 = \frac{\zeta\omega_c T}{1+\zeta\omega_c T+(\omega_c T/2)^2} \\ b_1 &= \frac{2\{1-(\omega_c T/2)^2\}}{1+\zeta\omega_c T+(\omega_c T/2)^2} \\ b_2 &= -\frac{1-\zeta\omega_c T+(\omega_c T/2)^2}{1+\zeta\omega_c T+(\omega_c T/2)^2} \end{aligned}\right\}$$

(10.3.63)

である。周波数特性は $z=e^{j\omega T}$ と置いて

$$H(e^{j\omega T})=\frac{a_0+a_2e^{-2j\omega T}}{1-b_1e^{-j\omega T}-b_2e^{-2j\omega T}}$$

(10.3.64)

で与えられる。$\zeta=1$ の場合について

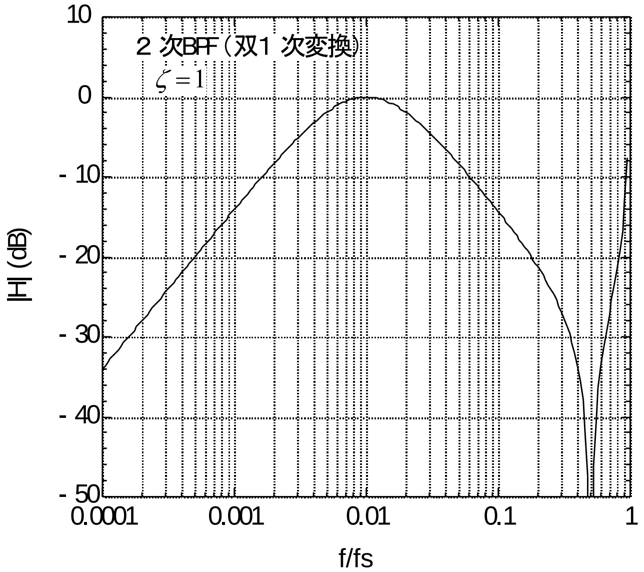


図 10-20　２次 BPF（双１次変換）

$\left|H(e^{j\omega T})\right|$ を図 10-20 に示す。以上のように、双１次変換で求めたディィジタルフィルターの特性は限界周波数（ $f_s/2$ ）近傍までアナログフィルターに相似な素直な特性を有することが分かる。

10-3-3 サンプル・ホールド信号（０次ホールド信号）

以上のようにしてデジタル処理した信号を D/A 変換してアナログ信号に変換し、何らかのアナログ機器の入力信号として用いる場合を考える（図 8-4）。このときの出力信号は図 8-21 に示すように区間 $nT\sim(n+1)T$ の間でホールドされた信号（０次ホールド信号）がよく使われる（編注：煩雑なため高次のホールドは実用的でない）。本節ではこのようなサンプル・ホールド信号

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\{u(t-kT)-u(t-(k+1)T)\}$$

(10.3.65)

の周波数特性を調べてみることにする。上式をラプラス変換すると

$$\begin{aligned} Y(s) &= \sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\left(\frac{e^{-skT}}{s}-\frac{e^{-s(k+1)T}}{s}\right) \\ &= \frac{2e^{-sT/2}}{s}sinh\left(\frac{sT}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}x(kT)e^{-skT} \end{aligned}$$

(10.3.66)

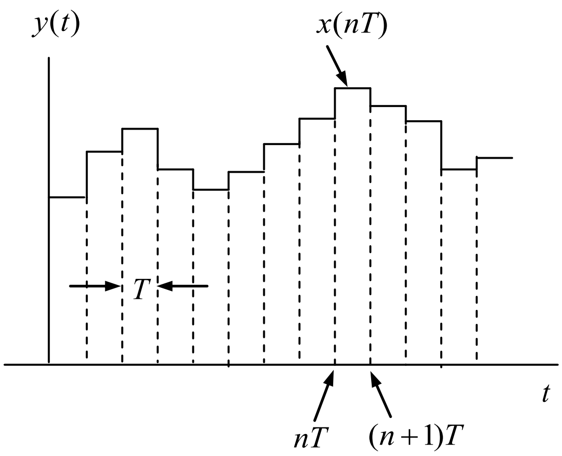


図 8-21　０次ホールドされた信号

となるので、(10.1.7)式より

$$Y(s) = \frac{2e^{-sT/2}}{s} sinh(\frac{sT}{2}) X^*(s)$$

$$= e^{-sT/2} \frac{sinh(sT/2)}{sT/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s + jn\omega_s) \qquad (10.3.66)$$

となる。したがって $y(t)$ の周波数特性は

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega T/2} \frac{sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j(\omega + n\omega_s)) \qquad (10.3.67)$$

となる。これより $\omega_s > 2\omega_{\max}$ の場合は $\omega < \omega_s/2$ の周波数領域においては

$Y(j\omega) = G_H(j\omega)X(j\omega)$ (10.3.68)

とすることができる。ここで

$$G_H(s) = e^{-sT/2} \frac{sinh(sT/2)}{sT/2}$$

(10.3.69)

は０次ホールドの伝達関数である。

図 10-22 に周波数特性 $|G_H(j\omega)|$ を示す。

即ちデジタルフィルターで処理したデータを D/A 変換して０次ホールドされたアナログ信号に変換した場合、信号の周波数特性はフィルターの周波数特性関数 $H(e^{j\omega T})$ と $G_H(j\omega)$ の積で与えられる。

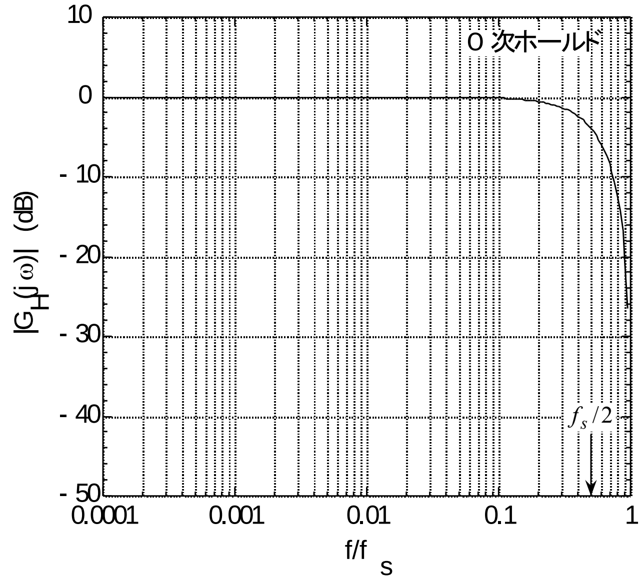


図 10-22　０次ホールドの周波数特性

$$Y(j\omega) = G_H(j\omega)H(e^{j\omega T})X(j\omega) \qquad (\text{for } \omega < \omega_s/2) \qquad (10.3.70)$$

図から分かるように $f_s/10$ 以上の周波数領域では、信号スペクトルに対する $G_H(j\omega)$ の影響が無視できないので注意が必要である。

10-4 伝達関数の安定性

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

において

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_m z^{-m}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \cdots - b_n z^{-n}} \qquad (10.4.1)$$

の特性方程式

$$z^n - b_1 z^{n-1} - b_2 z^{n-2} - \cdots - b_n = 0 \tag{10.4.2}$$

は重根を持たないものとすると、特性方程式の根即ち$H(z)$のポールp_k $(k = 1, 2, \cdots, n)$を用いて

$$H(z) = \frac{F(z)}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_n)} \tag{10.4.3}$$

と書くことができる。ここで$F(z)$はポールを持たないものとする。$H(z)$の逆変換を

$$h(nT) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] \tag{10.4.4}$$

として

$$y(mT) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT)x((m-k)T) \tag{10.4.5}$$

が有限であるためには

$$|h(mT)| < 0 \quad \text{for } m \to \infty \tag{10.4.6}$$

でなければならない。ここで

$$h(mT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C H(z)z^{m-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{F(z)z^{m-1}}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}dz$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{F(p_k)}{\prod_{r \neq k}^{n}(p_k - p_r)} p_k^{m-1} \tag{10.4.7}$$

より$m \to \infty$でp_k^{m-1}が有限でなければならず、$H(z)$の全てのポールp_kの絶対値が

$$|p_k| < 1 \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{10.4.8}$$

であることが、系が安定であるための条件である。即ち系が安定であるためには、伝達関数の全てのポールはz平面の原点を中心とする半径 1 の円内になければならない（図 10-23）。

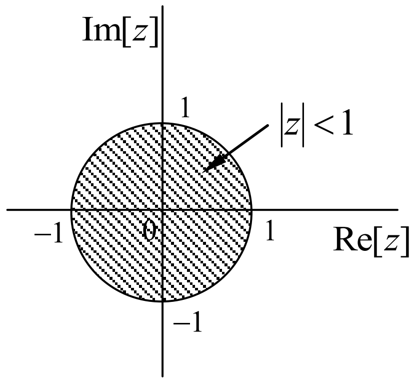


図 10-23　安定領域

10-5 バターワースフィルター

9-3 節で述べたようにn次バターワース・ローパスフィルターの伝達関数は(9.3.6)式

$$G_n(s) = \frac{\omega_c^n}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)} = \sum_{m=1}^{n} \frac{R_m}{s - p_m} \tag{9.3.6}$$

で与えられる。ここでp_m $(m = 1, 2, \cdots, n)$は全て 1 次のポール（(9.3.4)式、(9.3.5)式）、R_mは留数である（(9.3.8)式）。(9.3.7)式で与えられる逆ラプラス変換$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$を用いて、インパルス応答不変法を適用することで、バターワースフィルター（ローパス）の z 変換における伝達関数$H(z)$は

$$H(z) = T\mathcal{Z}[g(kT)]$$
$$= T\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} R_m e^{p_m kT} z^{-k}$$
$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{TR_m}{1-e^{p_m T} z^{-1}} \tag{10.5.1}$$

で与えられ、図 10-25 に示すアルゴリズムにより実現できる。但しこのままでは複素数演算が必要なため演算速度の点で不安が残る。そこで実数演算のみで済む方法を考えよう。

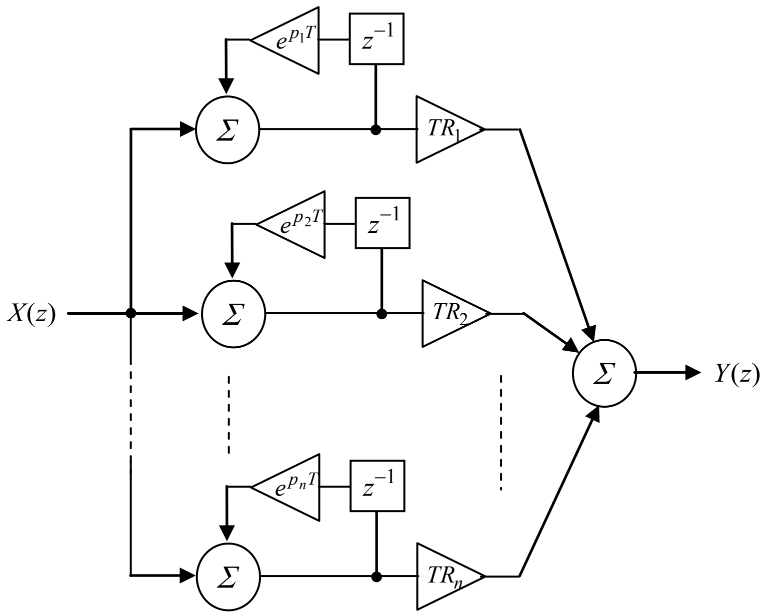


図 10-25　バターワース・ローパスフィルターのアルゴリズム（複素数演算）

ポール p_m、p_m^* における留数を $R(p_m)$、$R(p_m^*)$ とすると、(9.3.13)式及び (9.3.15)式より

$$R(p_0) = R^*(p_0), \qquad R(p_m^*) = R^*(p_m) \quad (m \neq 0) \tag{10.5.2}$$

であることから $H(z)$ は次のように書ける。

n が偶数の場合：

$$H(z) = T\sum_{m=1}^{n/2}\left(\frac{R_m}{1-e^{p_m T}z^{-1}} + \frac{R_m^*}{1-e^{p_m^* T}z^{-1}}\right)$$
$$= \sum_{m=1}^{n/2}\frac{a_{0m} - a_{1m}z^{-1}}{1-b_{1m}z^{-1}-b_{2m}z^{-2}} \tag{10.5.3}$$

n が奇数の場合：

$$H(z) = \frac{TR_0}{1-e^{p_0 T}z^{-1}} + T\sum_{m=1}^{(n-1)/2}\left(\frac{R_m}{1-e^{p_m T}z^{-1}} + \frac{R_m^*}{1-e^{p_m^* T}z^{-1}}\right)$$
$$= \frac{a_{00}}{1-b_{10}z^{-1}} + \sum_{m=1}^{(n-1)/2}\frac{a_{0m} - a_{1m}z^{-1}}{1-b_{1m}z^{-1}-b_{2m}z^{-2}} \tag{10.5.4}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
&a_{00} = TR_0, \quad b_{10} = e^{p_0 T} = e^{-\omega_c T} \\
&a_{0m} = T(R_m + R_m^*), \quad a_{1m} = -T(R_m e^{p_m^* T} + R_m^* e^{p_m T}) \\
&b_{1m} = e^{p_m T} + e^{p_m^* T}, \quad b_{2m} = -e^{(p_m + p_m^*)T} = -e^{-\omega_c T/Q_m}
\end{aligned}\right\} \tag{10.5.5}$$

である。$H(z)$ は図 10-26 のダイアグラムで表わされ、係数 $a_{om}, a_{1m}, b_{1m}, b_{2m}$ は全て実数であるので、あらかじめ計算して与えておけばあとは実数演算のみで済む。(10.5.1)式または(10.5.3)、

(10.5.4)式より求まる伝達関数 $H(z)$ の周波数特性 $\left|H(e^{j\omega T})\right|$ を図 10-27 に示す。

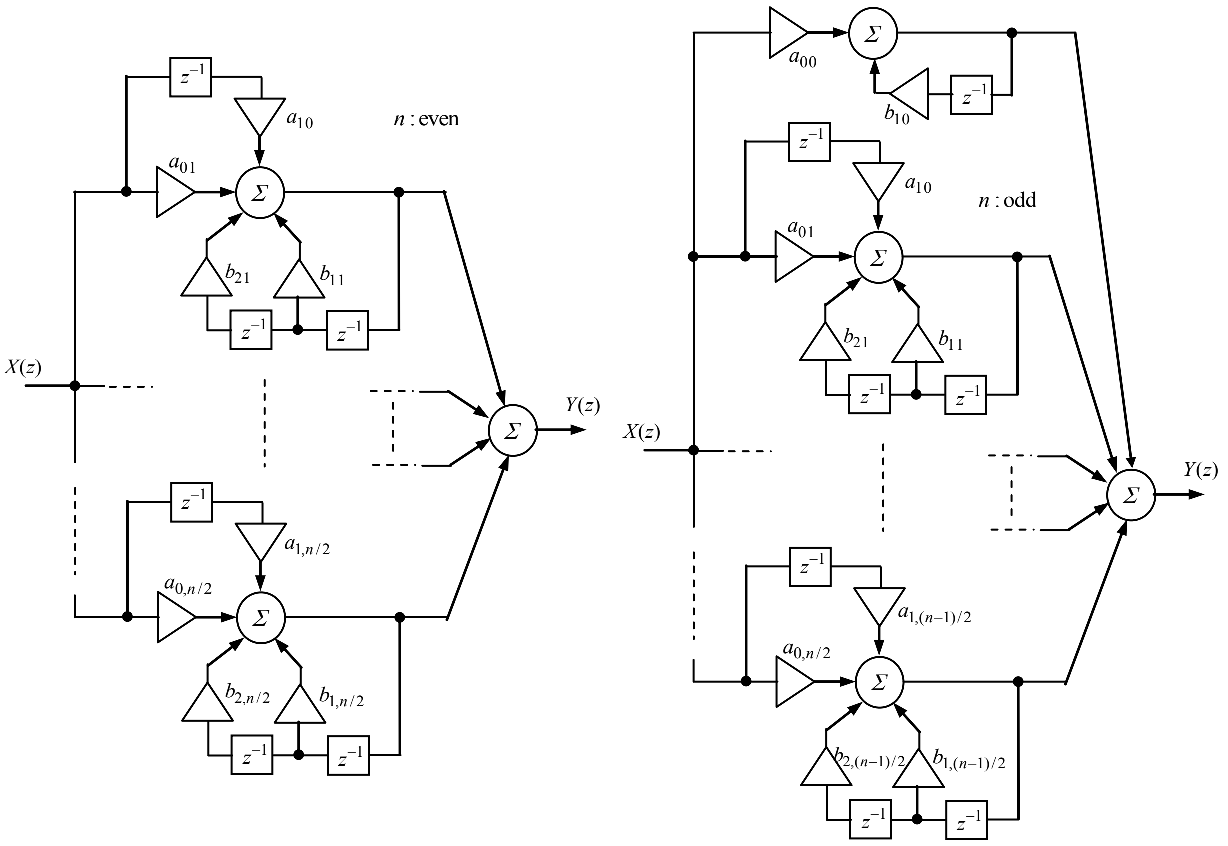
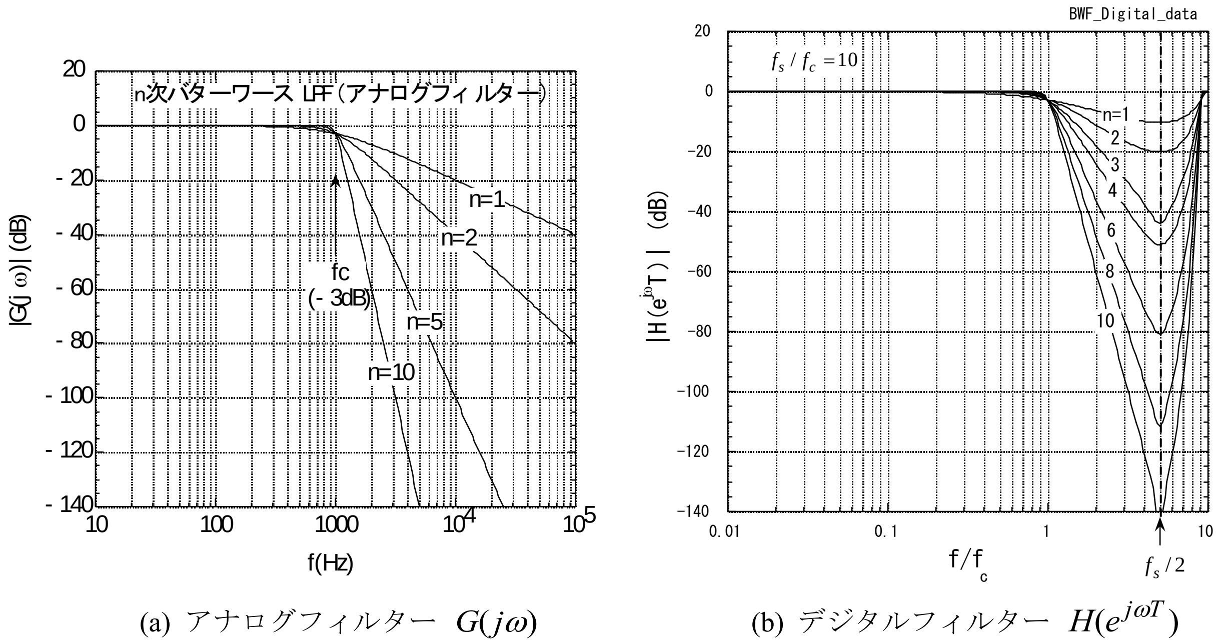


図 10-26　n次バターワース・フィルター（実数演算）



(a) アナログフィルター　$G(j\omega)$　　(b) デジタルフィルター　$H(e^{j\omega T})$

（インパルス応答不変法）

図 10-27　バターワース・ローパスフィルターの減衰特性

10-6 チェビシェフ・フィルター

チェビシェフ・フィルターにおいても、伝達関数$G(s)$のポールをp_mとし、p_mに対する留数をR_mとすると、バターワース・フィルターの伝達関数(10.5.1)式または(10.5.3)式、(10.5.4)式と同形の関係式が成立し、係数を

$$\left.\begin{aligned} &a_{00}=TR_0,\quad b_{10}=e^{p_0T}=e^{-\omega_0T}\\ &a_{0m}=T(R_m+R_m^*),\quad a_{1m}=-T(R_me^{p_m^*T}+R_m^*e^{p_mT})\\ &b_{1m}=e^{p_mT}+e^{p_m^*T},\quad b_{2m}=-e^{(p_m+p_m^*)T}=-e^{-\omega_mT/Q_m}\end{aligned}\right\}$$

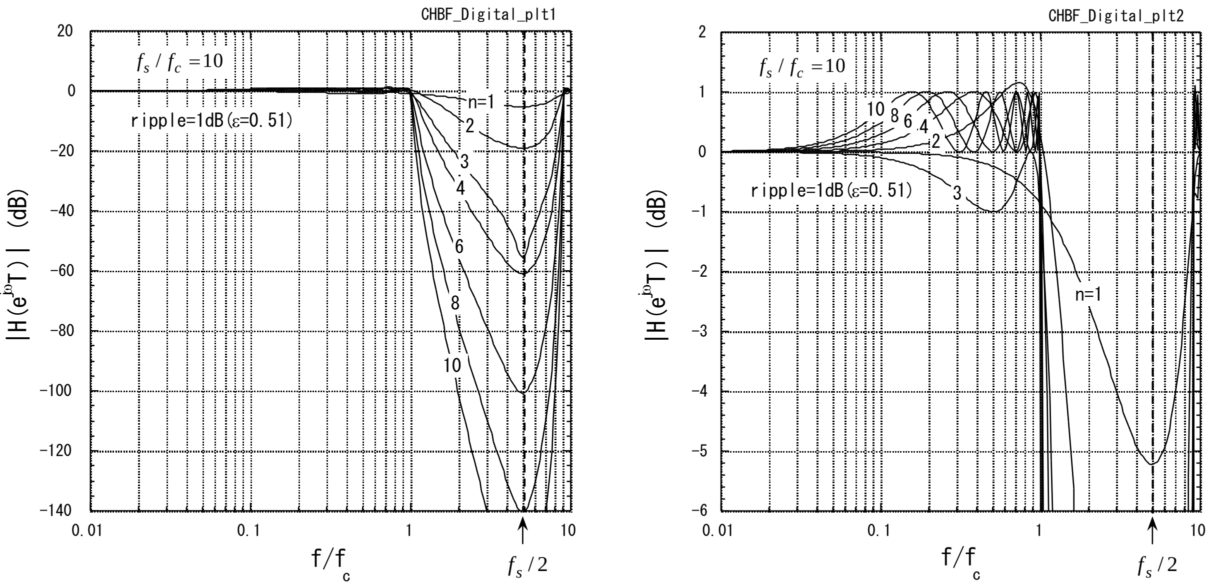
とすることで、図 10-26 と同じアルゴリズムが適用できる。ここで

$$\left.\begin{aligned} &p_k=-\omega_c\sinh\nu\cdot\cos\{(k-1/2)\pi/n\}+j\omega_c\cosh\nu\cdot\sin\{(k-1/2)\pi/n\}\quad(\text{for }n=even)\\ &p_k=-\omega_c\sinh\nu\cdot\cos(k\pi/n)+j\omega_c\cosh\nu\cdot\sin(k\pi/n)\qquad(\text{for }n=even)\end{aligned}\right\}$$

はチェビシェフ・フィルターのポール、また各々の２次の伝達関数においては

$$\left.\begin{aligned} &\omega_k=\sqrt{p_kp_k^*}=\frac{\omega_c}{\sqrt{2}}\sqrt{\cosh 2\nu-\cos 2\theta_k}\\ &Q_k=-\frac{\sqrt{p_kp_k^*}}{p_k+p_k^*}=-\frac{\sqrt{\cosh 2\nu-\cos 2\theta_k}}{2\sqrt{2}\sinh\nu\cdot\cos\theta_k}\end{aligned}\right\}$$

である。図 10-28 に$H(z)$の周波数特性を示す。



(a) 減衰特性　　　　(b) リプル拡大図

図 10-28　チェビシェフ・ローパスフィルター
の減衰特性（インパルス応答不変法）

10-7 FIR フィルター

前節ではインパルス応答不変法を用いた IIR フィルターの構築法を述べてきたが、留数の計算等少々面倒な手続きが必要である。もっと直感的に望みのフィルター特性をデジタルフィルターで実現する方法に FIR フィルターを用いる方法がある。FIR フィルターには任意のフィルターで直線位相特性を簡単に実現できる長所があり、広く用いられている。そこで本節では位相直線フィルターを取り上げ、広く用いられている窓関数法について解説する。

10-7-1 位相直線（群遅延一定）フィルター

時間が τ だけ遅れた信号 $f(t-\tau)$ の波形は元の信号 $f(t)$ と同じである。$f(t)$ のラプラス変換を

$$F(s)=\mathcal{L}[f(t)] \tag{10.7.1}$$

とすると、$f(t-\tau)$ のラプラス変換は

$$F_d(s)=\mathcal{L}[f(t-\tau)]=e^{-\tau s}F(s) \tag{10.7.2}$$

である。即ち、$f(t-\tau)$ の周波数特性関数は

$$F_d(j\omega)=e^{-j\omega\tau}F(j\omega) \tag{10.7.3}$$

で与えられ、元の信号の周波数特性関数に対して位相が

$$\theta=-\omega\tau \tag{10.7.4}$$

だけ遅れる。ここで

$$d\theta/d\omega=-\tau \tag{10.7.5}$$

を郡遅延時間と云う。これより位相遅れが周波数 ω と直線関係にある場合、即ち郡遅延時間が一定の場合には波形が保存されることが分かる。これより、伝達関数の位相遅れが周波数と直線関係にある（郡遅延時間が一定である）ことは、波形歪みが少ない条件の一つであることが云える。そこで波形歪みの少ないフィルターとして位相直線フィルターを考えることにする。

N タップ FIR フィルターでフィルターを構成するものとして、その伝達関数を

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(nT)z^{-n} \tag{10.7.6}$$

とする。図 10-29 に示すようにタップの重み関数がタップの前半と後半で対称

$$h((N-1-n)T)=h(nT) \tag{10.7.7}$$

であれば、$H(z)$ の周波数特性 $H(j\omega)$ の位相が直線特性となる。

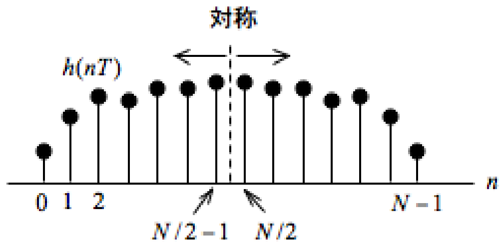


図 10-29　偶対称なタップ

＜証明＞

タップ数が偶数の場合：

$$\begin{aligned}H(z) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} h(nT)z^{-n} + \sum_{n=N/2}^{N-1} h(nT)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} h(nT)z^{-n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} h((N-1-n)T)z^{-(N-1-n)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} h(nT)(z^{-n} + z^{-N+1}z^{n})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H(e^{j\omega T}) &= e^{-j(N-1)\omega T/2}\sum_{n=0}^{N/2-1} h(nT)\{e^{j(2n-N+1)\omega T/2} + e^{-j(2n-N+1)\omega T/2}\} \\ &= 2e^{-j(N-1)\omega T/2}\sum_{n=0}^{N/2-1} h(nT)\cos\{(n-\frac{N-1}{2})\omega T\}\end{aligned}$$

したがって $F(\omega)\ (=F^{*}(\omega))$ を実数関数として $H(e^{j\omega T})$ は

$$H(e^{j\omega T}) = F(\omega)e^{-j\omega T(N-1)/2}$$

と書け、位相 $\theta = -(N-1)\omega T/2$ は ω に比例する（直線位相である）ことが証明される。

タップ数が奇数の場合も同様にして証明できる。

位相直線 FIR フィルターの簡単な例として N 重移動平均

$$h(nT) = 1/N \quad (n = 0, 1, \cdots, N-1) \tag{10.7.8}$$

を考えてみよう。移動平均の伝達関数は

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(nT)z^{-n} \qquad \left(h(nT) = \begin{cases} 1/N & \text{for } 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right) \tag{10.7.9}$$

と書けるのでその周波数特性関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}H(e^{j\omega T}) &= e^{-j\omega(N-1)T/2}\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N/2-1}\cos\{\omega(2n-N+1)T/2\} \\ &= \frac{1}{N}e^{-j\pi(N-1)\omega/\omega_s}\frac{\sin(\pi N\omega/\omega_s)}{\sin(\pi\omega/\omega_s)}\end{aligned} \tag{10.7.10}$$

ここで $\omega_s = 2\pi/T$ はサンプリング周波数である。したがって $H(e^{j\omega T})$ の位相は

$$\theta = -\pi(N-1)\omega/\omega_s \tag{10.7.11}$$

となり、直線位相であることが分かる。$\left|H(e^{j\omega T})\right|$及び$\theta$を図 10-30 に示す。

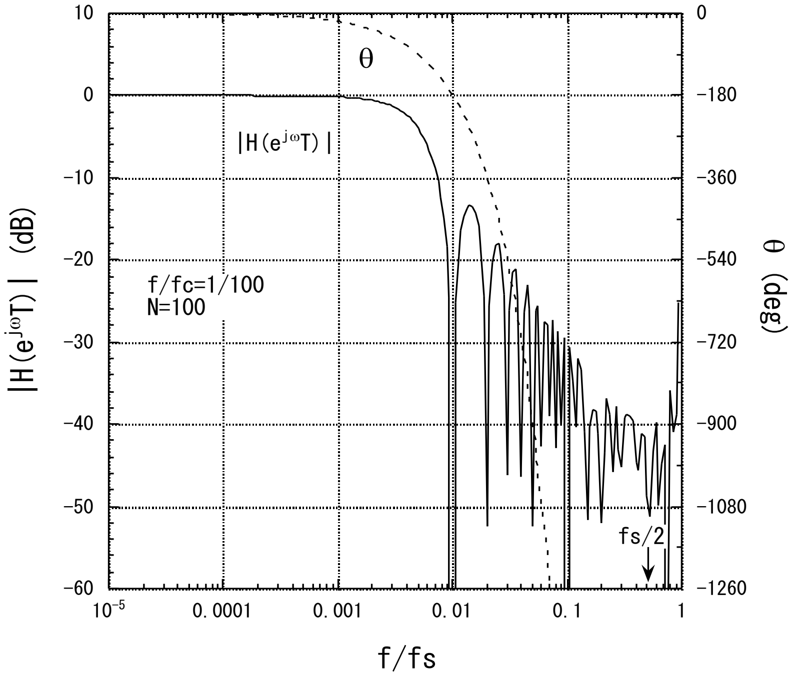


図 10-30　移動平均の周波数特性

10-7-2 窓関数

図 10-30 に見るように、FIR フィルターのタップの重み関数$h(nT)$を 0 からいきなり有限値とし、また有限値からいきなり 0 にしてしまうと大きなリプルが生ずる（ギブス現象）。このようなリプルを抑制するためには$h(nT)$に窓関数（window function）$w(n)$をかけて 0 から連続的に大きくし、さらに有限値から連続的に減少していって 0 にする操作が行われる。窓関数をかけた伝達関数$H_w(z)$は

$$H_w(z)=\sum_{n=0}^{N-1} h(nT)w(n)z^{-n} \tag{10.7.12}$$

で与えられ、窓関数による波形歪みを最小に抑えるため、窓関数としては直線位相特性を持つように偶対称（(10.7.7)式参照）

$$w(N-1-n)=w(n) \tag{10.7.13}$$

な関数が選ばれる。

代表的な窓関数として、ハニング窓関数

$$w(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\{1-\cos(\dfrac{2\pi n}{N-1})\} & (0\le n\le N-1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases} \tag{10.7.14}$$

ハミング窓関数

$$w(n)=\begin{cases}0.54-0.46\cos(\dfrac{2\pi n}{N-1})\} & (0\le n\le N-1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases} \tag{10.7.15}$$

（減衰特性を急峻にできる）、及びブラックマン窓関数

$$w(n)=\begin{cases}0.42-0.50\cos(\dfrac{2\pi n}{N-1})+0.08\cos\dfrac{4\pi n}{N-1} & (0\le n\le N-1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases} \tag{10.7.16}$$

（阻止域での減衰量を大きくできる）等がある。なおハニング窓関数は一般化ハミング窓関数

$$w(n)=\begin{cases}\alpha-(1-\alpha)\cos(\dfrac{2\pi n}{N-1}) & (0\le n\le N-1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases} \tag{10.7.17}$$

（$0\le\alpha\le1$）において$\alpha=1/2$としたものである。なお$\alpha=0.54$とした場合をハミング窓関数という。以上の窓関数を図 10-31 に示す。

窓関数の効果を見るために、前述のN重移動平均

$$h(nT)=1/N$$

においてハニング窓関数を適用してみることにする。(10.7.14)式で与えられる$w(n)$を用いて$H_w(z)$は

$$H_w(z)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}w(n)z^{-n} \tag{10.7.18}$$

で与えられる。したがって周波数特性は

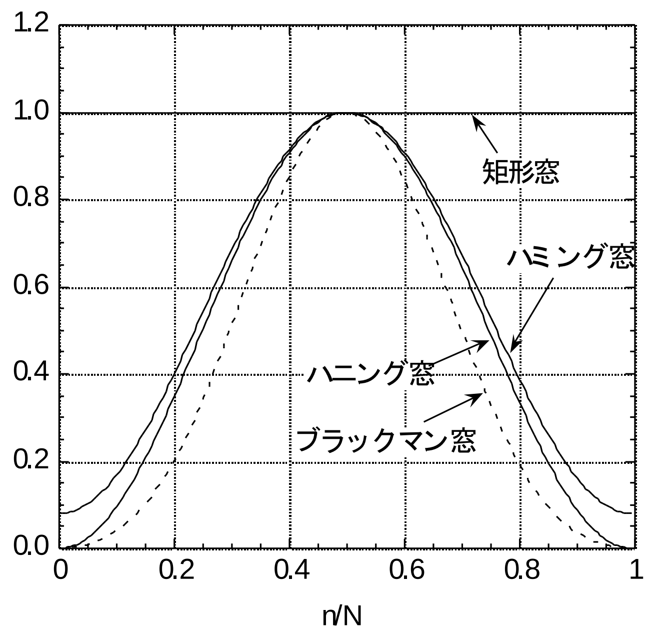


図 10-31　窓関数 $w(n)$

$$H_w(e^{j\omega T})=\frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{N-1}(1-\cos\frac{2n\pi}{N-1})e^{-jn\omega T} \tag{10.7.19}$$

となる。$N=100$の場合についての$\left|H_w(e^{j\omega T})\right|$を図 10-32 に示す。図 10-30 の減衰域に見られる大

きなリプル（ギブス現象）が抑制されていることが分かる。また、$w(n)$ は式(10.7.7)式を満たすので $h(nT)w(n)$ も式(10.7.7)式を満たし、$H_w(e^{j\omega T})$ は直線位相となる。なお、ハニング窓関数の平均値は $1/2$ であることから通過域の振幅は $6dB$ 減少

することに注意する必要がある。さらに、ハニング窓関数がある場合の $-3dB$ 周波数帯域、即ちハニング窓関数を適用して取得したデータセットの $-3dB$ 周波数分解能幅は、窓関数なし（矩形窓関数）の場合に対して約 1.65 倍となる（10-2-1 節参照）。

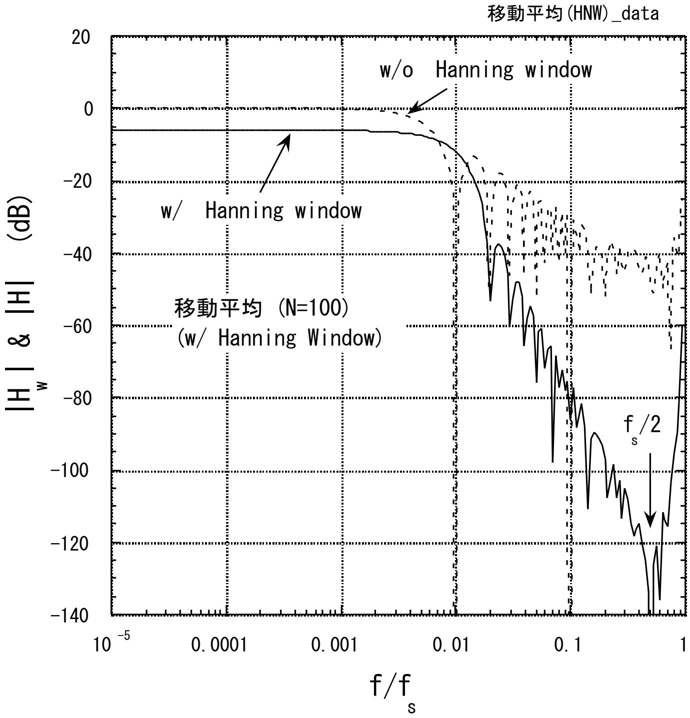


図 10-32　ハニング窓をかけた 100 重移動平均の周波数特性

10-7-3 位相直線理想ローパスフィルター

次にスペクトラム・アナライザー等のスペクトル測定に用いられる、周波数伝達関数 $G(j\omega)$ がカットオフ周波数 ω_c 以下では 1 、ω_c 以上では 0 になる理想ローパスフィルター

$$G(j\omega)=\begin{cases}1 & (-\omega_c\le\omega\le\omega_c)\\ 0 & (|\omega|>\omega_c)\end{cases} \tag{10.7.20}$$

を FIR フィルターで実現することを考える。$G(j\omega)$ を逆フーリエ変換することで

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}G(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \cos(\omega t)d\omega = 2\frac{\sin(\omega_c t)}{t} \qquad (10.7.21)$$

より

$$h(nT) = Tg(nT) = 2\frac{\sin(\omega_c nT)}{n} \qquad (10.7.22)$$

となるが、nのとり得る範囲は$-\infty < n < \infty$であるため、このままではFIRフィルターを作ることはできない。そこで、図10-33に示すように時間を$t_d = n_d T$遅らせた$h((n-n_d)T)$を考えるとタップの重みは

$$h_d(nT) = 2\frac{sin(\omega_c(n-n_d)T)}{n-n_d} \qquad (10.7.23)$$

となる。ここでnを

$$0 \le n \le 2n_d \qquad (10.7.24)$$

の範囲に制限することで$h_d(nT)$は$n = n_d$を中心として偶対称となり（図10-33参照）

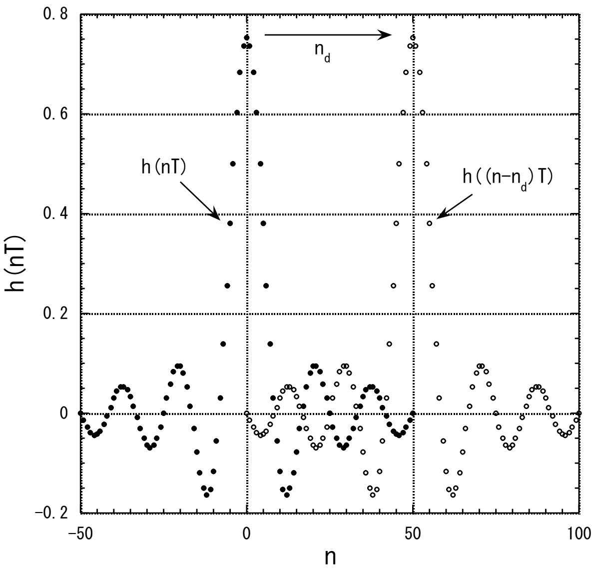
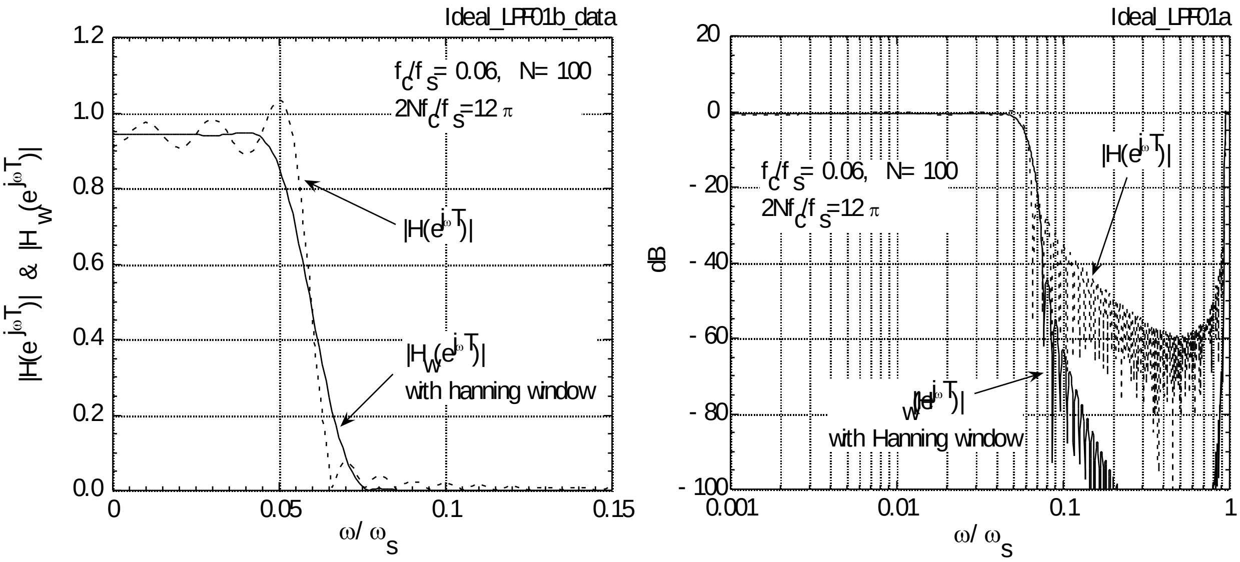


図10-33　$h(nT)$及び$h_d(nT)$



(a) 線形目盛　　(b) 対数目盛

図10-34　デジタルフィルターによる理想ローパスフィルター

（ハニング窓有無の比較）

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h_d(nT) z^{-n} \qquad (N = 2n_d + 1) \tag{10.7.25}$$

は直線位相特性を持つ FIR フィルターとなる。図 10-34 に理想 LPF を $\omega_c / \omega_s = 0.06$ として 100 タップ FIR フィルターで近似したときの周波数特性 $\left| H(e^{j\omega T}) \right|$ の例を示す。また同図にハニング窓の有無による違いも示しておく。ハニング窓によりギブス現象が抑えられ、高い周波数成分がより減衰していることが分かる。

第１１章　分布定数線路

11-1 無損失伝送線路

同軸ケーブルに代表される信号伝搬線路を分布定数線路あるいは分布定数回路と云う。図 11-1 に示すように、伝送線の方向に z 軸をとり電圧 $V(z,t)$、電流 $I(z,t)$ を定義する。伝送線路の単位長さ当たりのインダクタンスをL、同じく単位長さ当たりの線間静電容量をCとする。

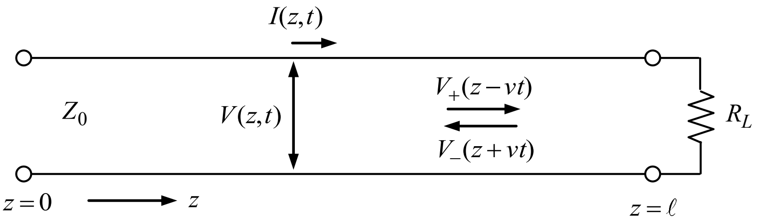


図 11-1　伝送線路

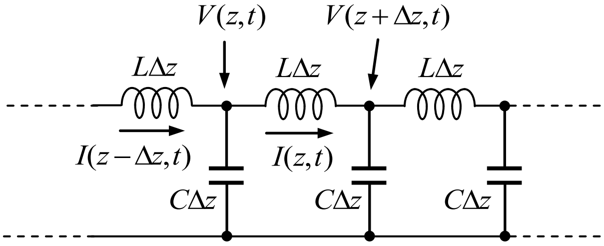


図 11-2　伝送線の等価回路

図 11-2 に示すように、線路に沿った微小区間Δzのインダクタンス$L\Delta z$両端の電圧差及び、微小時間Δt間の容量$C\Delta z$の電圧変化は

$$\left.\begin{aligned} V(z+\Delta z,t) &= V(z,t) - L\frac{\partial I(z,t)}{\partial t}\Delta z \\ V(z,t+\Delta t) &= V(z,t) + \frac{1}{C\Delta z}\{I(z-\Delta z,t) - I(z,t)\}\Delta t \end{aligned}\right\} \qquad (11.1.1)$$

と書ける。(11.1.1)式において$\Delta z \to 0$、$\Delta t \to 0$の極限をとることで$V(z,t)$、$I(z,t)$についての次の微分方程式を得る。

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -L\frac{\partial I(z,t)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -C\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} \qquad (11.1.2)$$

(11.1.2)式をさらに微分することで、$V(z,t)$、$I(z,t)$についての１次元波動方程式となる。

$$\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial^2 t} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial^2 z}, \qquad \frac{\partial^2 I(z,t)}{\partial^2 t} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 I(z,t)}{\partial^2 z} \qquad (11.1.3)$$

(11.1.3)式の一般解は

$$\left.\begin{aligned} V(z,t) &= V_+(z - t/\sqrt{LC}) + V_-(z + t/\sqrt{LC}) \\ I(z,t) &= I_+(z - t/\sqrt{LC}) + I_-(z + t/\sqrt{LC}) \end{aligned}\right\} \tag{11.1.4}$$

で与えられる。ここで$V_\pm(z \mp t/\sqrt{LC})$、$I_\pm(z \mp t/\sqrt{LC})$は任意関数である。V_+、I_+はzの正方向に伝搬する電圧、電流であり、V_-、I_-は負の方向に伝搬する電圧、電流である。(11.1.4)式は任意の波形の信号がその波形を保ったまま、伝送線路を正負両方向に速度

$$v_0 = 1/\sqrt{LC} \tag{11.1.5}$$

で伝搬することを表わしており、パルス波形等の伝送において重要な性質である。更に(11.1.2)式により

$$V_\pm(z \mp t/\sqrt{LC}) = \pm\sqrt{\frac{L}{C}} I_\pm(z \mp t/\sqrt{LC}) \tag{11.1.6}$$

なる関係が成立しており、右辺の係数

$$Z_0 = \sqrt{L/C} \tag{11.1.7}$$

を伝送線路の特性インピーダンスと云う。

伝送線には図 11-1 のように$z = \ell$に負荷抵抗R_Lが接続されているものとする。負荷端$z = \ell$における境界条件

$$V(\ell,t) = R_L I(\ell,t) \tag{11.1.8}$$

を用いて、(11.1.4)式、(11.1.6)式より

$$V_-(\ell + t/\sqrt{LC}) = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} V_+(\ell - t/\sqrt{LC}) \tag{11.1.9}$$

を得る。即ち、負荷に進行波$V_+(z - t/\sqrt{LC})$が加わると、反射波$V_-(z + t/\sqrt{LC})$が発生することを表わしており

$$r = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} \tag{11.1.10}$$

を振幅反射率と呼ぶ。

$$R_L = Z_0 \tag{11.1.11}$$

のときは

$$V_-(\ell + t/\sqrt{LC}) = 0 \tag{11.1.12}$$

即ち反射波がなくなり、給電端（$z = 0$）に加えられた進行波$V_+(z - t/\sqrt{LC})$電圧の波形がそのまま負荷端に現れ、進行波のエネルギーは全て負荷で消費されることになる。これをインピーダンス整合（インピーダンス・マッチング）と云う。$R_L > Z_0$のときは反射波電圧は進行波電圧と同極性となり、$R_L < Z_0$では反射波は逆極性となる。また、負荷端における電圧は

$$V(\ell,t) = \frac{2R_L}{R_L + Z_0} V_+(\ell - t/\sqrt{LC}) \tag{11.1.13}$$

となる。以上をまとめると次のようになる。

$R_L \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} &V(\ell,t) = 2V_+(\ell - t/\sqrt{LC}) \\ &V_-(\ell + t/\sqrt{LC}) = V_+(\ell - t/\sqrt{LC}) \end{aligned}\right\} \tag{11.1.14}$$

$R_L = Z_0$

$$\left.\begin{aligned} &V(\ell,t) = V_+(\ell - t/\sqrt{LC}) \\ &V_-(\ell + t/\sqrt{LC}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11.1.15}$$

$R_L \to 0$

$$\left.\begin{aligned} &V(\ell,t) = 0 \\ &V_-(\ell + t/\sqrt{LC}) = -V_+(\ell - t/\sqrt{LC}) \end{aligned}\right\} \tag{11.1.16}$$

次に$V(z,t)$、$I(z,t)$が時間的に周波数ωでサイン波状に振動している場合を考える。

$$V(z,t) = V(\omega,z)e^{j\omega t}, \qquad I(z,t) = I(\omega,z)e^{j\omega t} \tag{11.1.17}$$

これを(11.1.3)式に代入して

$$\frac{d^2V(\omega,z)}{dz^2} = -\omega^2 LCV(\omega,z), \qquad \frac{d^2I(\omega,z)}{dz^2} = -\omega^2 LCI(\omega,z) \tag{11.1.18}$$

これより

$$\left.\begin{aligned} &V(\omega,z) = V_+(\omega)e^{-jkz} + V_-(\omega)e^{jkz} \\ &I(\omega,z) = I_+(\omega)e^{-jkz} + I_-(\omega)e^{jkz} \end{aligned}\right\} \tag{11.1.19}$$

ここで

$$k = \omega / v_0 \tag{11.1.20}$$

は伝搬定数と呼ばれ、また(11.1.6)式の関係式は

$$V_\pm(\omega) = \pm Z_0 I_\pm(\omega) \tag{11.1.21}$$

となる。以上の解に対応する$V(z,t)$、$I(z,t)$は

$$\left.\begin{aligned} &V(z,t) = V_+(\omega)e^{-j(kz-\omega t)} + V_-(\omega)e^{j(kz+\omega t)} \\ &I(z,t) = I_+(\omega)e^{-j(kz-\omega t)} + I_-(\omega)e^{j(kz+\omega t)} \end{aligned}\right\} \tag{11.1.22}$$

となり、$V_+(\omega)$、$I_+(\omega)$はzの正方向に伝搬する進行波の振幅、$V_-(\omega)$、$I_-(\omega)$は負の方向に伝搬する反射波の振幅であることが分かる。

また (11.1.19)式、(11.1.21)式より

$$\begin{pmatrix} V(\omega,0) \\ I(\omega,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos kz & jZ_0 \sin kz \\ j\sin kz / Z_0 & \cos kz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V(\omega,z) \\ I(\omega,z) \end{pmatrix} \tag{11.1.23}$$

が得られる。ここで

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k\ell & jZ_0 \sin k\ell \\ j\sin k\ell / Z_0 & \cos k\ell \end{pmatrix} \tag{11.1.24}$$

は $z=0$ から $z=\ell$ への信号伝達を表わす基本四端子行列である。長さ ℓ の伝送線の負荷端をインピーダンス Z_L で短絡すると $V(\omega,\ell)=Z_L I(\omega,\ell)$ より

$$\begin{pmatrix} V(\omega,0) \\ I(\omega,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_L I(\omega,\ell) \\ I(\omega,\ell) \end{pmatrix} \tag{11.1.25}$$

したがって信号端 $z=0$ から伝送線を見たインピーダンス $Z=V(\omega,0)/I(\omega,0)$ は

$$Z = Z_0 \frac{jZ_0 \sin k\ell + Z_L \cos k\ell}{Z_0 \cos k\ell + jZ_L \sin k\ell} \tag{11.1.26}$$

となる。これよりインピーダンス整合がとれている場合、即ち $Z_L = Z_0$ では $Z = Z_0$ となる。

11-2 損失のある伝送線路

伝送線路を伝搬する信号は、線路を構成する電極の表皮抵抗及び線間絶縁体の誘電体損失により減衰する。これらの損失は周波数に依存するので、時間領域で取り扱うのは極めて煩雑になる。そこでこのような損失のある伝送線路を周波数領域で考察してみよう。

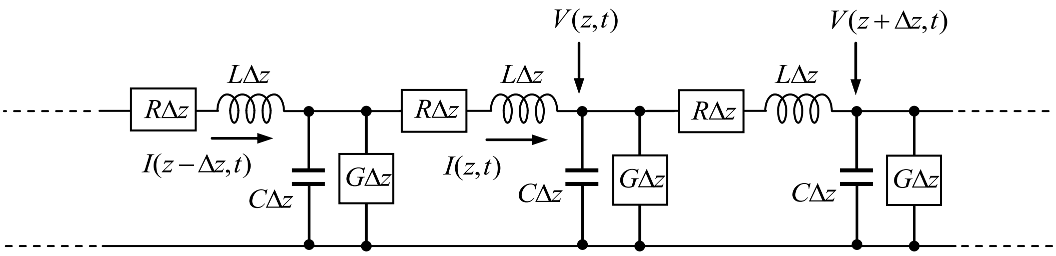


図 11-3　損失のある伝送線路

図 11-3 に示すように、区間 Δz におけるインダクタンス $L\Delta z$ に直列な抵抗成分を $R\Delta z$、容量 $C\Delta z$ に並列なコンダクタンス成分を $G\Delta z$ とする。R、G は周波数に依存し、周波数 ω が高いときは、$R(\omega)$ は線路を構成する電極の表皮抵抗、$G(\omega)$ は誘電体損失を表す（編注：高周波の場合、分極が外場の振動に追従できなくなり熱を生じる。このエネルギー損失を、誘電体損失という）。電圧、電流は時間的に周波数 ω でサイン波的に振動しているものとして

$$v(z,t) = V(\omega,z)e^{j\omega t}, \qquad i(z,t) = I(\omega,z)e^{j\omega t} \tag{11.2.1}$$

とすると、図 11-3 より

$$\left.\begin{aligned}&V(\omega,z+\Delta z)=V(\omega,z)-j\omega L\Delta zI(\omega,z)-R\Delta zI(\omega,z)\\&V(\omega,z+\Delta z)=\frac{1}{j\omega C\Delta z}\{I(\omega,z)-I(\omega,z+\Delta z)-G\Delta zV(\omega,z+\Delta z)\}\end{aligned}\right\}\qquad(11.2.2)$$

が得られ、$\Delta z\to 0$の極限では

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dV(\omega,z)}{dz}=-(R+j\omega L)I(\omega,z)\\&\frac{dI(\omega,z)}{dz}=-(G+j\omega C)V(\omega,z)\end{aligned}\right\}\qquad(11.2.3)$$

となる。これより(11.1.4)式に対応する次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2V(\omega,z)}{dz^2}=\gamma^2V(\omega,z)\\&\frac{d^2I(\omega,z)}{dz^2}=\gamma^2I(\omega,z)\end{aligned}\right\}\qquad(11.2.4)$$

ここで

$$\gamma^2=(R+j\omega L)(G+j\omega C)\qquad(11.2.5)$$

である。(11.2.4)式の解は次のようになり

$$\left.\begin{aligned}&V(\omega,z)=V_+(\omega)e^{-\gamma z}+V_-(\omega)e^{\gamma z}\\&I(\omega,z)=I_+(\omega)e^{-\gamma z}+I_-(\omega)e^{\gamma z}\end{aligned}\right\}\qquad(11.2.6)$$

(11.1.6)式に対応して、電圧、電流は特性インピーダンス$Z_0'(\omega)$で関係づけられ

$$V_\pm(\omega)=\pm Z_0'(\omega)I_\pm(\omega,z)\qquad(11.2.7)$$

特性インピーダンス

$$Z_0'=\sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}}\qquad(11.2.8)$$

は複素数となる。また、伝搬定数

$$\gamma=\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}=\alpha+jk\qquad(11.2.9)$$

の実数部αは損失係数、虚数部kは波数を表す。

$R<<2\omega L$、$G<<2\omega C$では特性インピーダンス$Z_0'(\omega)$及び伝搬定数$\gamma(\omega)$は

$$Z_0'=Z_0\left\{1-j\left(\frac{R}{2\omega L}-\frac{G}{2\omega C}\right)\right\}\qquad(11.2.10)$$

$$\gamma=\left(\frac{R}{2Z_0}+\frac{GZ_0}{2}\right)+j\omega\sqrt{LC}\qquad(11.2.11)$$

と近似できる。ここで$Z_0=\sqrt{L/C}$は無損失線路の特性インピーダンス（(11.1.7)式）である。

同軸ケーブル等の伝送線路の減衰量Γは通常$1km$当たりの減衰量dB/kmで表示される。

$$\Gamma(dB/km)=10^3\times 10\log(e^{2\alpha\ell})/\ell=2\times 10^4\alpha$$

ここで $e^{2\alpha\ell}$ となっているのは通常パワー減衰量で定義されるためである。例えば $\omega = 2\pi \times 100MHz$ で

$$\Gamma(dB/km) = 100dB/km$$

のケーブルの場合

$$\alpha = 5 \times 10^{-5}\Gamma(dB/km)/m = 5 \times 10^{-3}/m$$

程度となる。また、絶縁体がポリエチレンで構成されている同軸ケーブルでは伝搬速度は

$$v_0 = 1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} \cong 2c/3$$

である。ここで c は真空中の光速度である。そこで簡単化のために、減衰が R のみによるものとすると $\alpha = R/2Z_0$ より

$$R = 2\alpha\sqrt{L/C}$$

であるから

$$R/\omega L = 4\alpha c/3\omega = 3.2 \times 10^{-3} << 1$$

となる。減衰が G による場合（$\alpha = GZ_0/2$）にも同じ議論が成立し

$$G/\omega C = 4\alpha c/3\omega = 3.2 \times 10^{-3} << 1$$

となる。このように(11.2.10)式の虚数部は通常極めて小さいので無視でき

$$Z_0' \cong Z_0 (= \sqrt{L/C}) \tag{11.2.12}$$

として良い。

また、(11.2.6)式、(11.2.7)式より

$$\left.\begin{aligned} V(\omega,0) &= V(\omega,z)\cosh\gamma z + Z_0' I(\omega,z)\sinh\gamma z \\ I(\omega,0) &= V(\omega,z)\sinh\gamma z/Z_0' + I(\omega,z)\cosh\gamma z \end{aligned}\right\}$$

となることから、長さ ℓ の伝送線路の基本四端子行列は

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\gamma\ell & Z_0'\sinh\gamma\ell \\ \sinh\gamma\ell/Z_0' & \cosh\gamma\ell \end{pmatrix}$$

で与えられる。これより、$z = \ell$ に負荷インピーダンス Z_L を接続した場合、$V(\omega,\ell) = Z_L I(\omega,\ell)$ であることから(11.1.25)式、(11.1.26)式と同様にして、$z = 0$ から伝送線路を見たときのインピーダンス $Z(\omega) = V(\omega,0)/I(\omega,0)$ は

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= Z_0' \frac{Z_0' \sinh\gamma\ell + Z_L \cosh\gamma\ell}{Z_0' \cosh\gamma\ell + Z_L \sinh\gamma\ell} \\ &\cong Z_0 \frac{Z_0 \sinh\gamma\ell + Z_L \cosh\gamma\ell}{Z_0 \cosh\gamma\ell + Z_L \sinh\gamma\ell} \end{aligned}$$

となることが分かる。

11-3　信号伝播

$z=\ell$に負荷Z_Lを接続した場合の信号伝搬を考える。(11.2.6)式

$$\left.\begin{aligned} V(\omega,0) &= V_+(\omega)+V_-(\omega) \\ V(\omega,\ell) &= V_+(\omega)e^{-\gamma\ell}+V_-(\omega)e^{\gamma\ell} \end{aligned}\right\} \tag{11.3.1}$$

において、負荷端電圧$V(\omega,\ell)$は

$$V(\omega,\ell)=Z_L I(\omega,\ell)=Z_L I_+(\omega)e^{-\gamma\ell}+Z_L I_-(\omega)e^{\gamma\ell} \tag{11.3.2}$$

で与えられることから

$$V_-(\omega)=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0}V_+(\omega)e^{-2\gamma\ell} \tag{11.3.3}$$

が成立し、負荷端$z=\ell$における振幅反射係数は

$$r=\frac{V_-(\omega)e^{\gamma\ell}}{V_+(\omega)e^{-\gamma\ell}}=\frac{Z_L-Z_0}{Z_L+Z_0} \tag{11.3.4}$$

となる。なお。ここで$Z_0'=Z_0$とした。また入力端$z=0$における反射係数は

$$r_0=\frac{V_-(\omega)}{V_+(\omega)}=re^{-2\gamma\ell} \tag{11.3.5}$$

で与えられる。以上より、負荷端における信号電圧は$z=0$における信号電圧により次式のように与えられ

$$V(\omega,\ell)=\frac{Z_L}{Z_L\cosh\gamma\ell+Z_0\sinh\gamma\ell}V(\omega,0) \tag{11.3.6}$$

$z=0$から見た伝送線路のインピーダンスは

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \frac{V(\omega,0)}{I(\omega,0)} \\ &= Z_0\frac{Z_L\cosh\gamma\ell+Z_0\sinh\gamma\ell}{Z_0\cosh\gamma\ell+Z_L\sinh\gamma\ell} \end{aligned} \tag{11.3.7}$$

となる。ここで$Z_L=Z_0$とすると、ケーブル長ℓに関係なく

$$Z(\omega)=Z_0 \qquad (\text{for } Z_L=Z_0) \tag{11.3.8}$$

が成立する。また、給電端$z=0$に出力インピーダンスZ_sの信号源$V_s(\omega)$を接続すると、負荷端電圧は

$$\begin{aligned} V(\omega,\ell) &= \frac{Z_L}{Z_L\cosh\gamma\ell+Z_0\sinh\gamma\ell}\frac{Z(\omega)}{Z_s+Z(\omega)}V_s(\omega) \\ &= \frac{Z_L}{(Z_L+Z_s)\cosh\gamma\ell+(Z_0+Z_sZ_L/Z_0)\sinh\gamma\ell}V_s(\omega) \end{aligned} \tag{11.3.9}$$

で与えられる。これより$Z_s=Z_0$では

$$V(\omega,\ell)=\frac{Z_L}{Z_L+Z_0}e^{-\alpha\ell}e^{-jk\ell}V_s(\omega) \tag{11.3.10}$$

また、$Z_L=Z_0$では

$$V(\omega,\ell)=\frac{Z_0}{Z_s+Z_0}e^{-\alpha\ell}e^{-jk\ell}V_s(\omega) \tag{11.3.11}$$

となる。

ここで電圧定在波比（VSWR）について触れておく。進行波と反射波が同時に存在するときには定在波が発生する。無損失伝送線を考えると反射係数の定義から伝送線に発生している電圧振幅は

$$V(\omega,z)=V_+(\omega)(e^{-jkz}+re^{jkz}) \tag{11.3.12}$$

と書ける。そこで

$$r=|r|e^{j\theta} \tag{11.3.13}$$

と置くと、電圧振幅の大きさは

$$|V(\omega,z)|=|V_+(\omega)|\sqrt{1+2|r|\cos(2kz+\theta)+|r|^2} \tag{11.3.14}$$

となる。これより$|V(\omega,z)|$は

$$z=(2n+1)\lambda/4-\lambda\theta/4\pi$$

で最小

$$z=n\lambda/2-\lambda\theta/4\pi$$

で最大

$$\left.\begin{aligned}|V(\omega,z)|_{\min}&=|V_+(\omega)|(1-|r|)\\|V(\omega,z)|_{\max}&=|V_+(\omega)|(1+|r|)\end{aligned}\right\} \tag{11.3.15}$$

となる。最大振幅（山）と最小振幅（谷）の比を VSWR と云い

$$VSWR=\frac{|V(\omega,z)|_{\max}}{|V(\omega,z)|_{\min}}=\frac{1+|r|}{1-|r|} \tag{11.3.16}$$

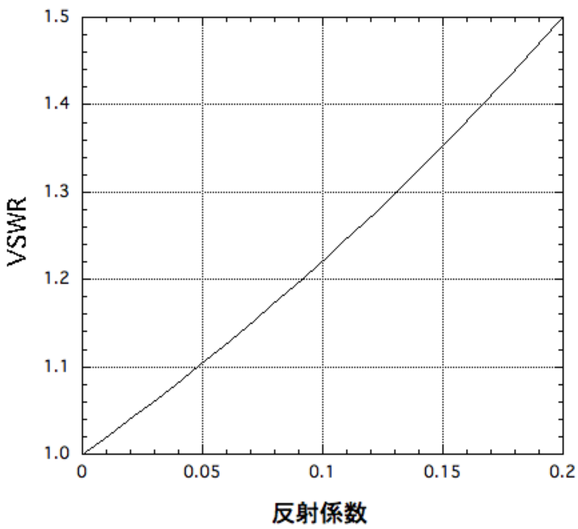


図 11-4　反射係数と VSWR の関係

VSWR を測定することで反射係数の大きさ$|r|$を知ることができる。谷と谷の間隔は半波長$\lambda/2$であるから、負荷から見て最初の山または谷ができる zとℓとの距離を知ることで位相θを知ることができる。$|r|$ の小さい範囲での VSWR を図 11-4 に示す。

11-4　低周波信号（集中定数回路近似）

無損失ケーブル（$\alpha = 0$、$\gamma = jk$）において、低周波領域

$$k\ell << 1 \quad (k = 2\pi/\lambda = \omega/v_0) \tag{11.4.1}$$

を考える。この条件はまた

$$\omega << 1/Z_0 C\ell \tag{11.4.2}$$

と書ける。$\cosh\gamma\ell = \cos k\ell = 1,\ \sinh\gamma\ell = j\sin k\ell = jk\ell$ と近似し、(11.3.9) 式及び伝播速度 $v_0 = 1/CZ_0$（(11.1.5)式、(11.1.7)式参照）より

$$\begin{aligned} V(\omega,\ell) &= \frac{R_L}{R_L\cosh\gamma\ell + Z_0\sinh\gamma\ell}\frac{Z(\omega)}{R_s + Z(\omega)}V_s(\omega) \\ &= \frac{R_L}{R_L + R_s}\frac{1}{1 + j\omega C\ell Z_0\dfrac{(Z_0 + R_s R_L/Z_0)}{R_L + R_s}}V_s(\omega) \end{aligned} \tag{11.4.3}$$

ここで $R_s \approx Z_0 << R_L$ とすると

$$V(\omega,\ell) = \frac{R_L}{R_L + R_s}\frac{1}{1 + j\omega C\ell R_s}V_s(\omega) \tag{11.4.4}$$

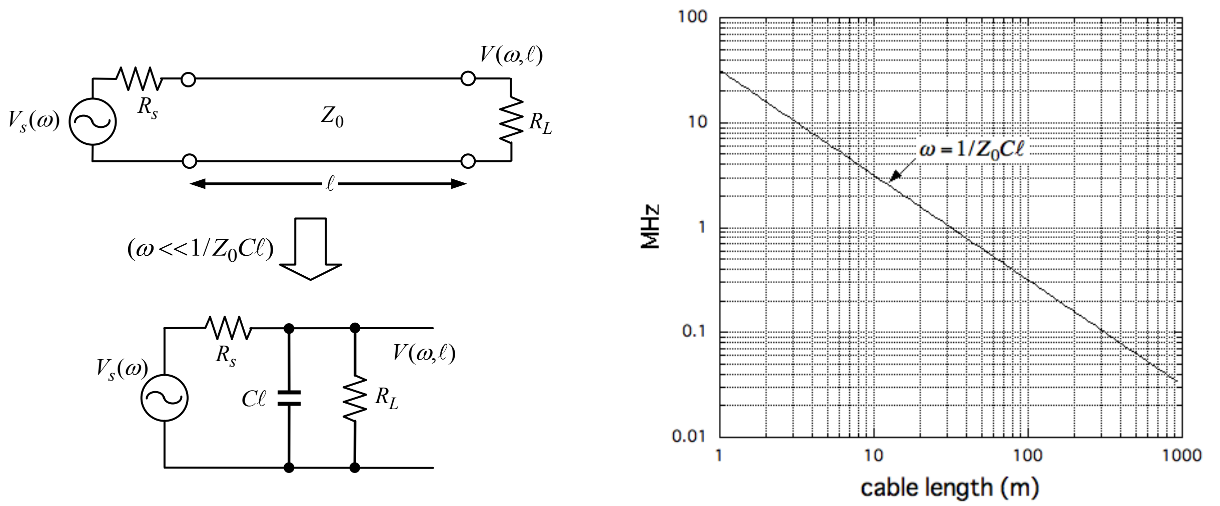


図 11-5　$R_L >> Z_0$、$\omega << 1/Z_0C\ell$ における伝送線の等価回路と集中定数回路近似の成立限界周波数

と近似され、等価回路は図 11-5 となる。すなわち、$k\ell << 1\ (\ell << \lambda/2\pi)$ では長さ ℓ のケーブルは容量 $C\ell$ と等価であり、$-3dB$ カットオフ周波数は

$$\omega_c = 1/R_s C\ell \tag{11.4.5}$$

となる。

したがって(11.4.2)式を満たす周波数領域の信号伝送においては、インピーダンス・マッチングを考慮する必要はない。

11-5 無損失同軸線路

図 11-6 に示すような、内部導体直径$2a$、外部導体内径$2b$の同軸伝送線路（同軸管）を考える。内外導体間の絶縁層の誘電率をε、透磁率をμとする。導体は完全導体、誘電体損失はないものとする。Maxwell 方程式

$$\left.\begin{aligned} &rot\boldsymbol{E} = -j\omega\mu\boldsymbol{H} \\ &rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + j\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \\ &div\boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon \\ &div\boldsymbol{H} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11.5.1}$$

を円柱座標で表し、TEMモード（$E_z = 0, H_z = 0$）を考える。軸対称（$\partial/\partial\theta = 0$）、$E_\theta = 0$を仮定すると

$$\left.\begin{aligned} &H_r = 0 \\ &\frac{\partial E_r}{\partial z} = -j\omega\mu H_\theta \end{aligned}\right\} \tag{11.5.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial H_\theta}{\partial z} = -j\omega\varepsilon E_r \\ &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\theta) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{11.5.3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) = 0 \tag{11.5.4}$$

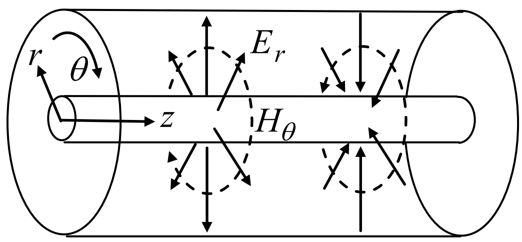


図 11-6　同軸線路中の電磁場（TEM モード）

より

$$E_r = f(z)/r, \qquad H_\theta = g(z)/r \tag{11.5.5}$$

と置ける。これらを(11.5.2)、(11.5.3)式に代入して

$$\frac{df(z)}{dz} = -j\omega\mu g(z), \qquad \frac{dg(z)}{dz} = -j\omega\varepsilon f(z) \tag{11.5.6}$$

を得る。これより

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = -\omega^2\mu\varepsilon f(z) \tag{11.5.7}$$

を得、解は

$$\left.\begin{aligned} &f(z) = f_+ e^{-j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}z} + f_- e^{j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}z} \\ &g(z) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(f_+ e^{-j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}z} - f_- e^{j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}z}) \end{aligned}\right\} \tag{11.5.8}$$

で与えられる。したがって E_r、H_θ は

$$\left.\begin{aligned} E_r(r,z) &= \frac{1}{r}(f_+ e^{-j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}z} + f_- e^{j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}z}) \\ H_\theta(r,z) &= \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(f_+ e^{-j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}z} - f_- e^{j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}z}) \end{aligned}\right\} \tag{11.5.9}$$

となる。

導体表面の境界条件は

$$H_\theta(a,z) = J_{1z}(z), \qquad H_\theta(b,z) = -J_{2z}(z) \tag{11.5.10}$$

と表される。$J_{1z}(z)$ は内部導体の表面電流密度、$J_{2z}(z)$ は外部導体の表面電流である。磁場が θ 方向成分だけなので、表面電流は z 方向成分のみである。従って内部導体の全表面電流 $I(z)$ は

$$I(z) = 2\pi a H_\theta(a,z) = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(f_+ e^{-j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}z} - f_- e^{j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}z}) \tag{11.5.11}$$

となり、また外部導体の全表面電流 $I'(z)$ は $-I(z)$ に等しい。

$$I'(z) = -2\pi b H_\theta(b,z) = -I(z) \tag{11.5.12}$$

更に外部導体に対する内部導体の電圧は

$$\begin{aligned} V(z) &= -\int_a^b E_r(r,z)dr \\ &= \ln\left(\frac{a}{b}\right)(f_+ e^{-j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}z} + f_- e^{j\omega\sqrt{\varepsilon\mu}z}) \end{aligned} \tag{11.5.13}$$

である。ここで

$$V_\pm(\omega) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)f_\pm, \qquad I_\pm(\omega) = \pm 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}f_\pm \tag{11.5.14}$$

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \tag{11.5.15}$$

と置くと

$$\left.\begin{aligned} V(z) &= V_+(\omega)e^{-jkz} + V_-(\omega)e^{jkz} \\ I(z) &= I_+(\omega)e^{-jkz} + I_-(\omega)e^{jkz} \end{aligned}\right\} \tag{11.5.16}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} k &= \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \\ V_\pm(\omega) &= \pm Z_0 I_\pm(\omega) \\ Z_0 &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}\right\} \tag{11.5.17}$$

であり Z_0 は特性インピーダンスである。

次に 11-1 節及び 11-2 節で導入された単位長さ当たりのインダクタンスL、静電容量Cとの対応を考える。(11.2.9)式において損失がない（$R=0, G=0$）ものとすると損失係数は$\alpha=0$であり、伝搬定数は

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} = jk \tag{11.5.18}$$

となる。したがって

$$\sqrt{LC} = \sqrt{\varepsilon\mu} = 1/v_0 \tag{11.5.19}$$

である。v_0は内導体と外導体間の媒質中の光速度である。また$Z_0 = \sqrt{L/C}$

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{11.5.20}$$

であり、(11.5.19)、(11.5.20)式より

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right), \qquad C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)} \tag{11.5.21}$$

が導かれる。ここでCは静電気学的に導かれる容量と同じものである。

11-6 表皮効果 I（軸対称電流の場合）

次節で同軸線路における導体損失を考察するための準備として、本節で表皮効果の一般論を解説する。考察対象として、半径aの円柱状導体を考え、図 11-7 に示すように軸対称電流が軸方向（z方向）に一様に流れている

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) = i(r)e^{j\omega t}\boldsymbol{e}_z \tag{11.6.1}$$

ものとする。考えている周波数領域では導体内部では$\omega << \sigma/\varepsilon_0$が成立する（注１）ので変位電流$\varepsilon\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)/\partial t$は無視でき、Maxwell 方程式は

$$rot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{11.6.2}$$

$$rot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) \tag{11.6.3}$$

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t) = \sigma\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{11.6.4}$$

となる。なお (11.6.3)、(11.6.4)式より

$$div\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{11.6.5}$$

である。(11.6.4)式を (11.6.2)、(11.6.3)式に代入することで

$$rot\ rot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{11.6.6}$$

を得る。ここで

$$rot\ rot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = grad\ div\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$

及び (11.6.5)式より、(11.6.6)式は

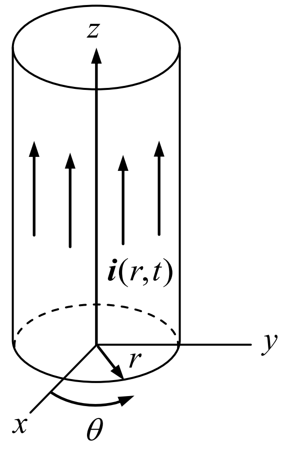


図 11-7　円柱導体に流れる電流

$$\Delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)-\mu\sigma\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=0 \tag{11.6.7}$$

となる。(11.6.1)式、(11.6.4)式より $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ も軸対称かつ z 方向に一様

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=E(r)e^{j\omega t}\boldsymbol{e}_z \tag{11.6.8}$$

であるから、 (11.6.7)式を円柱座標で書き（注２）、(11.6.8)式を代入することで $E(r)$ に対する次のベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2E(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dE(r)}{dr}-j\omega\mu\sigma E(r)=0 \tag{11.6.9}$$

を得る（注３）。ここで

$$\kappa=\sqrt{-j\omega\mu\sigma} \tag{11.6.10}$$

とし

$$\hat{z}=\kappa r \tag{11.6.11}$$

と置くと、(11.6.9)式は０次のベッセル微分方程式

$$\frac{d^2E(r)}{d\hat{z}^2}+\frac{1}{\hat{z}}\frac{dE(r)}{d\hat{z}}+E(r)=0 \tag{11.6.12}$$

となり、 $r\to 0$ で発散しない解は

$$E(r)=AJ_0(\kappa r) \tag{11.6.13}$$

で与えられる。 $J_0(\hat{z})$ は０次のベッセル関数、 A は境界条件で決まる定数である。なお(11.6.10)式は

$$\kappa=\frac{1-j}{\delta} \tag{11.4.14}$$

と書くことができ

$$\delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{11.6.15}$$

を表皮の深さ（skin depth）（または表皮の厚さ）と云う。ちなみに $\omega=2\pi\times 10MHz$ における銅の δ は、比抵抗を $\rho=1/\sigma=1.8\times 10^{-8}\Omega\cdot m$ として $\delta=21.4\mu m$ である。

次に定数 A を決めるために $\boldsymbol{H}(r,t)$ について解く。(11.6.2)式及び

$$\left.\begin{aligned}&\{rot\mathbf{E}(r,t)\}_r=\{rot\mathbf{E}(r,t)\}_z=0\\&\{rot\mathbf{E}(r,t)\}_\theta=-\frac{\partial E(r)}{\partial r}e^{j\omega t}=-\mu\frac{\partial H_\theta(r)}{\partial t}\end{aligned}\right\}$$

より

$$\boldsymbol{H}(r,t)=H(r)e^{j\omega t}\boldsymbol{e}_\theta \tag{11.6.16}$$

とすることができ

$$\frac{dE(r)}{dr}=j\omega\mu H(r) \tag{11.6.17}$$

を得る。これより

$$H(r)=\frac{\kappa A}{j\omega\mu}J_0'(\kappa r)=-\frac{\kappa A}{j\omega\mu}J_1(\kappa r) \tag{11.6.18}$$

となり、更に

$$\{rot\mathbf{H}(r,t)\}_z=i(r)e^{j\omega t} \tag{11.6.19}$$

より、電流密度$i(r)$は次式

$$i(r)=\frac{dH(r)}{dr}+\frac{1}{r}H(r)=\frac{A}{j\omega\mu}\left\{\frac{d}{dr}\frac{dJ_0(\kappa r)}{dr}+\frac{1}{r}\frac{dJ_0(\kappa r)}{dr}\right\}$$
$$=\frac{A}{j\omega\mu}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dJ_0(\kappa r)}{dr}\right)=-\frac{\kappa A}{j\omega\mu}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\{rJ_1(\kappa r)\} \tag{11.6.20}$$

全電流 I は

$$I=2\pi\int_0^a i(r)rdr$$
$$=-\frac{2\pi\kappa A}{j\omega\mu}\int_0^a\frac{d}{dr}\{rJ_1(\kappa r)\}dr=-\frac{2\pi\kappa A}{j\omega\mu}[rJ_1(\kappa r)]_0^a$$
$$=-\frac{2\pi a\kappa A}{j\omega\mu}J_1(\kappa a)=2\pi aH(a) \tag{11.6.21}$$

となる（注４）。以上より結果は以下のようになる。

$$A=-\frac{j\omega\mu I}{2\pi\kappa aJ_1(\kappa a)}=\frac{(1-j)I}{2\pi a\delta\sigma J_1(\kappa a)} \tag{11.6.22}$$

$$\left.\begin{aligned}E(r)&=(1-j)\frac{I}{2\pi\sigma a\delta}\frac{J_0(\kappa r)}{J_1(\kappa a)}\\H(r)&=\frac{I}{2\pi a}\frac{J_1(\kappa r)}{J_1(\kappa a)}\end{aligned}\right\} \tag{11.6.23}$$

次に$|\kappa r|=\sqrt{2}r/\delta>>1$の場合を考える。$|\kappa r|>>1$におけるベッセル関数の漸近形

$$\left.\begin{aligned}J_0(\kappa r)&\cong\sqrt{\frac{2}{\pi\kappa r}}\cos\left(\kappa r-\frac{\pi}{4}\right)\cong\sqrt{\frac{(1-j)\delta}{4\pi r}}e^{(1+j)r/\delta}\\J_1(\kappa r)&\cong\sqrt{\frac{2}{\pi\kappa r}}\cos\left(\kappa r-\frac{3\pi}{4}\right)\cong-j\sqrt{\frac{(1-j)\delta}{4\pi r}}e^{(1+j)r/\delta}\end{aligned}\right\} \tag{11.6.24}$$

より $r/\delta>>1$では

$$\left.\begin{aligned}E(r)&=\frac{(1+j)I}{2\pi\sigma\delta\sqrt{ar}}e^{-(1+j)(a-r)/\delta}\\H(r)&=\frac{I}{2\pi\sqrt{ar}}e^{-(1+j)(a-r)/\delta}\end{aligned}\right\} \tag{11.6.25}$$

$$i(r)=\frac{dH(r)}{dr}+\frac{1}{r}H(r)=\frac{I}{2\pi\sqrt{ar}}\left(\frac{1+j}{\delta}+\frac{1}{2r}\right)e^{-(1+j)(a-r)/\delta}$$
$$=\frac{(1+j)I}{2\pi\sqrt{ar}\delta}e^{-(1+j)(a-r)/\delta} \tag{11.6.26}$$

となる。また、単位長さ当たりのパワー損失

$$P=\frac{1}{2}\int_0^a 2\pi r\,\mathrm{Re}[E^*(r)i(r)]dr \tag{11.6.27}$$

は

$$E^*(r)i(r)=\frac{I^*I}{2\pi^2\sigma\delta^2 ar}e^{-2(a-r)/\delta} \tag{11.6.28}$$

より

$$P=\frac{I^2}{2\pi\sigma\delta^2 a}\int_0^a e^{-2(a-r)/\delta}dr=\frac{1-e^{-2a/\delta}}{4\pi\sigma\delta a}I^*I$$
$$=\frac{\rho}{2\pi a\delta}\left|\frac{I}{\sqrt{2}}\right|^2 \qquad (a/\delta>>1)$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[E^*(a)I] \tag{11.6.29}$$

となる。これは表面の厚さδの領域に電流Iが流れて表面電場

$$E(a)=(1+j)\frac{\rho}{2\pi a\delta}I \tag{11.6.30}$$

を発生し、それによって生ずるパワー損失に等しい。$\rho=1/\sigma$は抵抗率、$\rho/2\pi a\delta$は深さδの表面層の単位長さ当たりの直流抵抗である。以上より、半径aの円柱導体の単位長さ当たりのインピーダンス（表面インピーダンス）$Z_s(\omega)=E(a)/I$ は

$$Z_s(\omega)=(1+j)\frac{\rho}{2\pi a\delta}=(1+j)\frac{\sqrt{\omega\mu\rho}}{2\sqrt{2}\pi a} \tag{11.6.31}$$

となる。

注１：銅の導電率として$\sigma=1/\rho\approx 5.6\times 10^7 S/m$ ($\rho\approx 1.8\times 10^{-8}\Omega\cdot m$)とすると条件$\omega<<\sigma/\varepsilon_0$の成立範囲は

$$\omega<<\sigma/\varepsilon_0\approx 2\pi\times 10^{18}Hz$$

である。

注２：円柱座標表示

$$\Delta\boldsymbol{E}=\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial z^2}$$

注３：同軸線路を流れる電流は進行波であるので

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r},t)=i(r)e^{-j(kz-\omega t)}\boldsymbol{e}_z$$

とすると(11.6.4)式より

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=E(r)e^{-j(kz-\omega t)}\boldsymbol{e}_z$$

であるから

$$\frac{\partial^2 E(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial E(r)}{\partial r}-(k^2+j\omega\mu\sigma)E(r)=0$$

ここで$\sigma=5.6\times10^7 S/m$とすると、$v_0\approx c$として

$$\omega<<\mu\sigma v_0^2\approx\sigma/\varepsilon_0\approx2\pi\times10^{18}Hz$$

では

$$k^2<<\omega\mu\sigma$$

となり、(11.6.9)式が成立する。

注４：(11.6.3)式を導体表面一周について積分すると

$$I=\oint H(a)ad\theta=2\pi aH(a)$$

11-7 表皮効果 II（平面電磁波の場合）

前節では円柱状導体に、時間的に振動している軸対称電流が流れている場合についての表皮効果を考察したので、本節では平面状導体表面に平面電磁波が入射する場合の表皮効果を考察する。 図 11-8 に示すように電場がxに偏光した平面波の進行方向をz方向とし、$z<0$は自由空間、$z\geq0$は導体領域とする。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=E_x e^{-j(kz-\omega t)}\boldsymbol{e}_x \qquad (11.7.1)$$

(11.5.2)式より

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{k}{\omega\mu}E_x e^{-j(kz-\omega t)}\boldsymbol{e}_y \qquad (11.7.2)$$

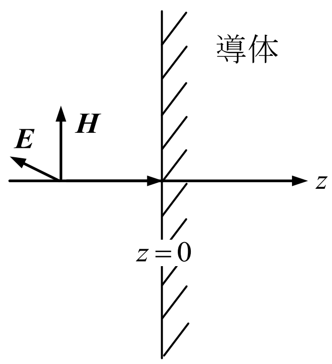


図 11-8 導体平面に入射する平面波

を(11.6.7)式 $\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)-\mu\sigma\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)/\partial t=0$ に代入することで分散式

$$k^2=-j\omega\mu\sigma \qquad (11.7.3)$$

を得る。従って(11.6.15)式で定義されるδを用いて

$$k=\sqrt{-j\omega\mu\sigma}=\frac{1-j}{\delta} \qquad (11.7.4)$$

と書けるので

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= E_x e^{-j(z/\delta-\omega t)} e^{-z/\delta} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) &= H_y e^{-j(z/\delta-\omega t)} e^{-z/\delta} \boldsymbol{e}_y\end{aligned}\right\} \tag{11.7.5}$$

$$H_y = (1-j)\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} E_x \tag{11.7.6}$$

となる。即ち導体中の電磁波の振幅は$e^{-z/\delta}$に従って減衰する。導体表面におけるポインティング・ベクトル

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{H}^*(\mathbf{r},t)]$$

はz方向（導体内部方向）を向いており、単位面積当たり導体に消費されるパワーは

$$\mathbf{P}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[E_x H_y^*]\mathbf{e}_z = \frac{1}{2\sigma\delta}\left|H_y\right|^2 \mathbf{e}_z \tag{11.7.7}$$

となる。ここで完全導体表面の境界条件は表面電流を

$$\boldsymbol{J}(t) = J_x e^{j\omega t} \boldsymbol{e}_x \tag{11.7.8}$$

として

$$J_x = H_y \tag{11.7.9}$$

である。即ち (11.6.29)式と同様に、(11.7.7)式は表面電流J_xが厚さδ、抵抗率$\rho = 1/\sigma$の層を流れて消費するパワー面密度である。以上より、導体表面は厚さδ（skin depth）の抵抗層と考えて良いことになる。

11-8 表皮効果による損失を考慮した同軸線路

11-6 節、11-7 節の結果を用いて、同軸線路の損失として導体の表皮効果のみを考慮に入れた場合を考察する。導体は単位長さ当たり 11-6 節 (11.6.31)式で与えられるインピーダンスを有する（表皮効果による表面インピーダンス）。同軸線路では内外両導体の表面インピーダンスを考慮して、11-2 節の図 11-3 におけるRを

$$\begin{aligned}Z_s(\omega) &= (1+j)\frac{\rho}{2\pi\delta(\omega)}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{\sqrt{j\omega\mu\rho}}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\end{aligned} \tag{11.8.1}$$

に置き代えれば良い。そこで、誘電体損失は無視できるものとして$G = 0$とすると(11.2.9)式の伝播定数は

$$\begin{aligned}\gamma(\omega) &= \sqrt{\{Z_s(\omega)+j\omega L\}j\omega C} \\ &= \sqrt{j\omega C(j\omega L + K\sqrt{j\omega})}\end{aligned} \tag{11.8.2}$$

となる。ここで

$$K=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \tag{11.8.3}$$

である。

$$\sqrt{\omega}>>\frac{K}{L}=\frac{v_0}{2\pi Z_0}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \tag{11.8.4}$$

を仮定して（注１）１次近似すると

$$\gamma(\omega)=j\omega\sqrt{LC}+\frac{K\sqrt{j\omega}}{2Z_0} \tag{11.8.5}$$

と近似される。ここで

$$Z_0=\sqrt{L/C},\qquad v_0=1/\sqrt{LC} \tag{11.8.6}$$

であり、11-2 節 (11.2.9)式で定義される減衰定数α及び伝搬定数kは

$$\alpha=\frac{\sqrt{\omega}K}{2\sqrt{2}Z_0},\qquad k=\omega\sqrt{LC}+\frac{\sqrt{\omega}K}{2\sqrt{2}Z_0} \tag{11.8.7}$$

で与えられる（注２）。

11-2 節の (11.2.6)、(11.2.7)式より信号伝搬は

$$\left.\begin{aligned}V(\omega,z)&=V_+(\omega)e^{-\gamma(\omega)z}+V_-(\omega)e^{\gamma(\omega)z}\\ I(\omega,z)&=I_+(\omega)e^{-\gamma(\omega)z}+I_-(\omega)e^{\gamma(\omega)z}\\ V_\pm(\omega)&=\pm Z_0' I_\pm(\omega)\end{aligned}\right\} \tag{11.6.8}$$

と表わされる。ここで特性インピーダンスZ_0'は

$$\begin{aligned}Z_0'&=\sqrt{\frac{Z_s(\omega)+j\omega L}{j\omega C}}\\ &=\sqrt{\frac{K\sqrt{j\omega}+j\omega L}{j\omega C}}\\ &=Z_0+\frac{(1-j)K}{2\sqrt{2\omega LC}}\end{aligned} \tag{11.8.9}$$

である。そこで出力端を$Z_L=Z_0$で短絡した場合振幅反射率は

$$|r|\cong\left|\frac{-(1-j)K}{4\sqrt{2\omega LC}Z_0}\right|=\frac{K}{4\sqrt{\omega LC}Z_0} \tag{11.8.10}$$

の程度生ずることになる（注３）。

ケーブルの周波数特性関数は$Z_L\cong Z_0'$として反射を無視すると

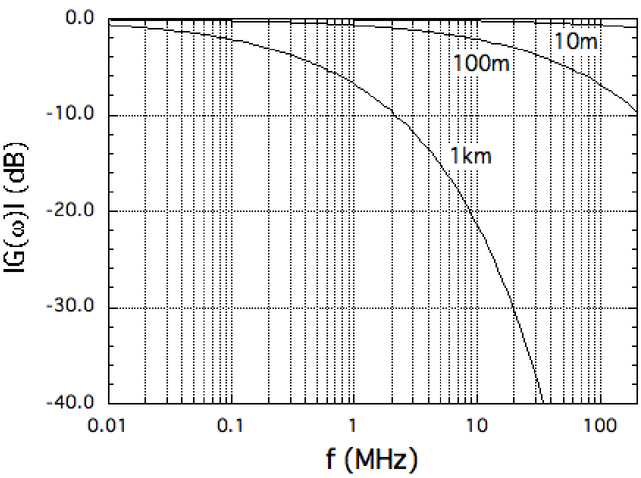


図 11-9　長さ 10m、100m 及び 1km の 5D2V の周波数特性

$$G(\omega)=\frac{V(\omega,\ell)}{V(\omega,0)}=e^{-\gamma\ell}$$

$$=\exp\left\{-\frac{\sqrt{\omega}K\ell}{2\sqrt{2}Z_0}-j\left(\frac{\omega}{v_0}+\frac{\sqrt{\omega}K}{2\sqrt{2}Z_0}\right)\ell\right\} \tag{11.8.11}$$

となる。5D2V 同軸ケーブルでは注２より $K=4.417\times10^{-5}\ (\Omega\cdot\sqrt{sec}/m)$ であるので $\ell=10m,100m,1km$ では $|G(\omega)|$ は図 11-9 のようになる。

注１：5D2V 同軸ケーブルを例にとると

$$5D2V:2a=1.4mm,2b=4.8mm,Z_0=50\Omega,v_0=2c/3,\rho=1.8\times10^{-8}\Omega\cdot m$$

より

$$\sqrt{\omega}>>\frac{K}{L}=\frac{v_0}{2\pi Z_0}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1.77\times10^2/\sqrt{sec}$$

即ち(11.8.4)式の条件は

$$\omega>>2\pi\times5kHz$$

注２：5D2V 同軸ケーブルの表皮効果による減衰量

$$K=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=4.417\times10^{-5}\ (\Omega\cdot\sqrt{sec}/m)$$

$$\alpha=\frac{R}{2Z_0}=\frac{\sqrt{\omega}K}{2\sqrt{2}Z_0}$$

$$R=\sqrt{\frac{\omega}{2}}K=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$\alpha=\begin{cases}4.29\times10^{-3}/m & (\text{at }30MHz)\\ 1.11\times10^{-2}/m & (\text{at }200MHz)\end{cases}$$

$$\text{減衰量：}10\log(e^{2\alpha\ell})=\begin{cases}37.2dB/km & (\text{at }30MHz)\\ 96.2dB/km & (\text{at }200MHz)\end{cases}$$

誘電体損失を $\tan\delta=\varepsilon'/\varepsilon''$ として、誘電体による減衰定数は

$$\alpha=\frac{GZ_0}{2}=\frac{\omega}{2v_0}\tan\delta$$

$$=\frac{3\omega}{4c}\tan\delta \quad (\text{PE ケーブル：}v_0=2c/3)$$

注３：

$$|r|=\frac{Kv_0}{4\sqrt{\omega}Z_0}=0.56\% \quad (\text{at }10MHz)$$

11-9 過度応答（transient response）

次にパルス信号の伝搬を考えよう。出力端はインピーダンスマッチングがとられていて反射波は存在しないものとする。入力端（$z=0$）に加わる入力電圧のラプラス変換を$V(s,0)$とし、(11.6.8)式において反射波振幅を$V_-=0$とし、zにおける電圧のラプラス変換$V(s,z)$は$j\omega$をラプラス変数sに置き代えて

$$V(s,z)=V(s,0)e^{-\gamma(s)z} \tag{11.9.1}$$

で与えられる。ここで

$$\gamma(s)=s\sqrt{LC}+\sqrt{s}\frac{K}{2Z_0} \tag{11.9.2}$$

である。これを逆変換することで出力端における電圧

$$V_2(t)=\mathcal{L}^{-1}[V(s,z)] \tag{11.9.3}$$

を求めることができる。信号源端に加えられる入力電圧を

$$V_1(t)=\mathcal{L}^{-1}[V(s,0)] \tag{11.9.4}$$

とするとラプラス変換公式（4−2 節 (4.2.26)式）

$$\mathcal{L}[\frac{a}{2\sqrt{\pi}}t^{-3/2}e^{-a^2/4t}]=e^{-a\sqrt{s}} \tag{11.9.5}$$

を用いて、出力は

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}[V(s,z)] \\ &= \mathcal{L}^{-1}[V(s,0)e^{-s\sqrt{LC}z}e^{-\sqrt{s}(Kz/2Z_0)}] \\ &= \frac{Kz}{4Z_0\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{LC}z}^{t}V_1(\tau-\sqrt{LC}z)(t-\tau)^{-3/2}e^{-(Kz/4Z_0)^2/(t-\tau)}d\tau \end{aligned} \tag{11.9.6}$$

となる。実際の同軸線路では絶縁体の誘電体損失を持つが、R.L.Wigington and N.S.Nahman (Transient Analysis of Coaxial Cables Considering Skin Effect, Proc. of the IRE, 1957, p.166) によれば、nsec以上の領域では導体の表皮効果による損失のみを考慮することで、実際の損失をよく再現できるようである。

例１：インパルス応答

長さzの同軸線路のインパルス入力

$$V_1(t)=V_1T\delta(t) \tag{11.9.7}$$

に対する出力は

$$V_2(t)=\frac{Kz}{4Z_0\sqrt{\pi}}V_1T(t-\sqrt{LC}z)^{-3/2}e^{-\{(K/2Z_0)z\}^2/4(t-\sqrt{LC}z)} \tag{11.9.8}$$

となる。

例２：ステップ応答

ステップ入力

$$V_1(t)=V_1u(t) \tag{11.9.9}$$

に対する応答は

$$V_2(t)=\frac{Kz}{4Z_0\sqrt{\pi}}V_1\int_0^t u(\tau-\sqrt{LC}z)(t-\tau)^{-3/2}e^{-(Kz/4Z_0)^2/(t-\tau)}d\tau$$

$$=\frac{Kz}{4Z_0\sqrt{\pi}}V_1\int_{\sqrt{LC}z}^t (t-\tau)^{-3/2}e^{-(Kz/4Z_0)^2/(t-\tau)}d\tau$$

$$=V_1\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-x'^2}dx' \qquad (x=\frac{Kz/4Z_0}{\sqrt{t-\sqrt{LC}z}})$$

$$=V_1\,\mathrm{erfc}\left(\frac{Kz/4Z_0}{\sqrt{t-\sqrt{LC}z}}\right) \qquad (\sqrt{LC}z\le t) \tag{11.9.10}$$

で与えられる。

例３：パルス応答

時間幅Tの矩形波パルス入力

$$V_1(t)=V_1\{u(t)-u(t-T)\} \tag{11.9.11}$$

に対する応答は

$$V_2(t)=\frac{Kz}{4Z_0\sqrt{\pi}}V_1\int_0^t\{u(\tau-\sqrt{LC}z)-u(\tau-T-\sqrt{LC}z)\}(t-\tau)^{-3/2}e^{-(Kz/4Z_0)^2/(t-\tau)}d\tau$$

$$=\frac{Kz}{4Z_0\sqrt{\pi}}V_1\int_0^t u(\tau-\sqrt{LC}z)(t-\tau)^{-3/2}e^{-(Kz/4Z_0)^2/(t-\tau)}d\tau$$

$$=\begin{cases} V_1\mathrm{erfc}\left(\dfrac{Kz/4Z_0}{\sqrt{t-\sqrt{LC}z}}\right) & (\sqrt{LC}z\le t<\sqrt{LC}z+T) \\ V_1\left\{\mathrm{erfc}\left(\dfrac{Kz/4Z_0}{\sqrt{t-\sqrt{LC}z}}\right)-\mathrm{erfc}\left(\dfrac{Kz/4Z_0}{\sqrt{t-\sqrt{LC}z-T}}\right)\right\} & (\sqrt{LC}z+T\le t) \end{cases}$$

(11.9.12)

である。図 11-10 に、長さ $z=100m$ の 5D2V ケーブルの給電端に波高値 V_1、幅 $10nsec$ 及び $100nsec$ の矩形パルスを印加したときの、負荷端における波形の例を示す。

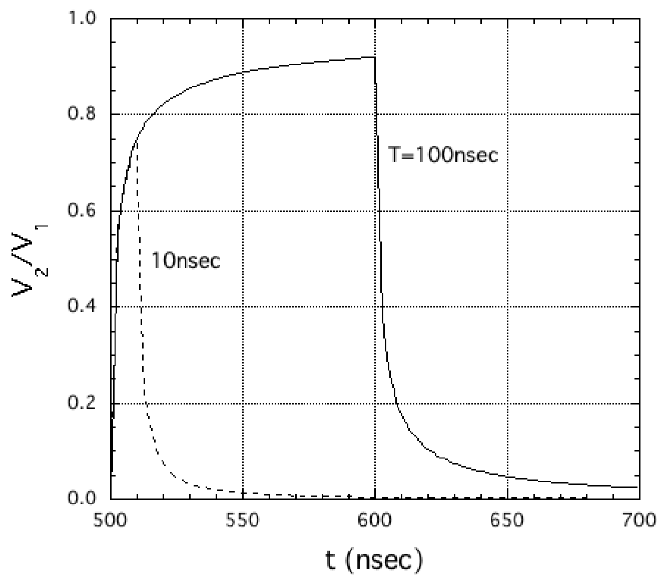


図 11-10　パルス応答（5D2V, 100m）